

45,— Ft

# TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISE



PÉLDATÁR

$$u = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

Handwritten notes in blue ink on a grid background, including the equation above and some other mathematical expressions and arrows.



FEKETE ZOLTÁN — ZALAY MIKLÓS

# TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISE

PÉLDATÁR

FEKETE ZOLTÁN—ZALAY MIKLÓS

# **TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISE**

**PÉLDATÁR**

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1985

Lektorálta :

**URBÁN JÁNOS**

okl. matematikus

## TARTALOM

<b>ELŐSZÓ</b>	<b>7</b>
<b>I. KOORDINÁTA-RENDSZEREK</b>	<b>9</b>
<b>II. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK</b>	<b>13</b>
1. A kétváltozós függvények értelmezési tartománya	13
2. A kétváltozós függvények szemléltetése	21
3. A kétváltozós függvények határértéke, folytonossága	31
<b>III. A KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLÁSA</b>	<b>40</b>
1. Parciális deriváltak	40
2. Teljes differenciál. Hibaszámítás	55
3. A többváltozós összetett függvények deriválása	74
4. Implicit függvények és deriválásuk	90
5. A kétváltozós függvények Taylor-sora	105
6. A kétváltozós függvények szélsőértéke, feltételes szélsőérték	112
<b>IV. VEKTORVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÉS DERIVÁLÁSUK</b>	<b>132</b>
1. Egyparaméteres vektor-skalár függvény. Térgörbék	132
2. Kétparaméteres vektor-skalár függvény. Felületek	150
3. Skalár-vektor függvények	168
4. Vektor-vektor függvények	182
<b>V. KETTŐS INTEGRÁL</b>	<b>198</b>
1. Kettős integrál négyszögtartomány esetén	198
2. Kettős integrál normáltartomány esetén	213
3. A kettős integrál transzformációja	231
4. A kettős integrál alkalmazásai	247
<b>VI. HÁRMAS INTEGRÁL</b>	<b>266</b>
1. Hármass integrál tégl-, ill. normáltartomány esetén	266
2. A hármass integrál transzformációja	278
3. A hármass integrál alkalmazásai	290

© Fekete Zoltán, Zalay Miklós, Budapest, 1985

ETO: 517.2

517.3

517.55

ISBN 963 10 5692 9

Felelős szerkesztő: Tóth Ildikó matematika—fizika tanár

<b>VII. VONAL- ÉS FELÜLETI INTEGRÁL . . . . .</b>	<b>305</b>
1. Vonalintegrál . . . . .	305
2. Felületi integrál . . . . .	321
<b>VIII. INTEGRÁLTÉTELEK . . . . .</b>	<b>335</b>
1. Gauss—Osztrogradszkij-tétel . . . . .	335
2. Stokes-tétel . . . . .	345

## ELŐSZÓ

Könyvünkkel a többváltozós függvények és a vektoranalízis témakörével ismerkedő Olvasók számára kívántunk segítséget nyújtani. Olvasóinkról feltételezzük az egyváltozós függvények analízisének és a vektoralgebrának bizonyos szintű ismeretét.

Könyvünk felépítése a Bolyai-sorozat első kiadott könyveinek felépítését követi. A rövid elméleti bevezetők során csak arra törekedtünk, hogy a lényegesebb fogalmakat definiáljuk, a fontosabb tételeket (bizonyítás nélkül) kimondjuk. A feladatok során igyekeztünk e tételek szükséges és elégséges feltételeit megvilágítani. Sok olyan feladatot is talál Olvasónk, amelyek a gyakorlati felhasználás lehetőségeire utalnak — a fizikai látásmód igényével —, bár e területen sem törekedhattünk teljességre.

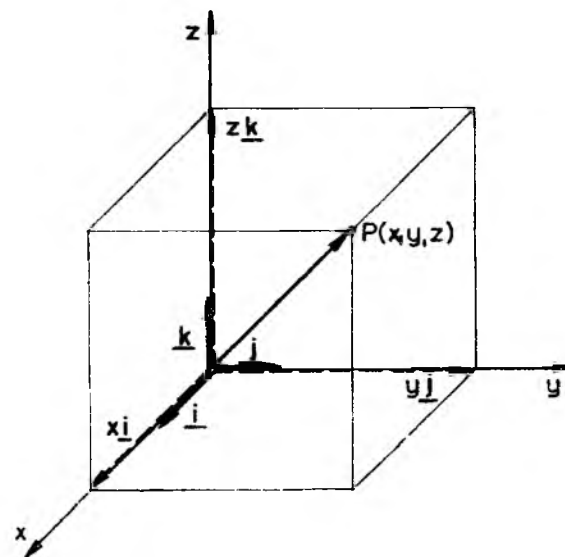
Reméljük, hogy könyvünk elérte célját, sikerült az Olvasóban a témakör mélyebb megismerése utáni vágyat felébreszteni és az alkalmazáshoz szükséges alapvető ismereteket megadni.

Végül köszönjük a lektornak rendkívül nagy segítséget jelentő, minden részletre kiterjedő munkáját.

A szerzők

## I. KOORDINÁTA-RENDSZEREK

A feladatok megoldása során leggyakrabban a térbeli Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert fogjuk alkalmazni, amelynek egymásra merőleges tengelyei jobbrendszert alkotnak (1. ábra).



1. ábra

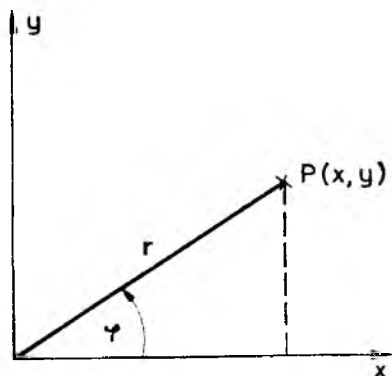
Egy tetszőleges  $P$  pont helyzete egyértelműen jellemezhető egy valós számokból álló rendezett számhármassal. Ha felvesszük a tengelyek irányába mutató  $i$ ,  $j$ ,  $k$  egységvektorokat, akkor a  $P$  pont  $\vec{OP}$ -helyvektora a következőképpen írható fel:

$$\vec{OP} = xi + yj + zk.$$

Természetesen e koordináta-rendszer mellett a feladat jellegének megfelelően más koordinátákat is alkalmazunk.



Bizonyos esetekben (pl. kétváltozós függvények határértékének meghatározásánál, síkbeli tartományok megadásánál stb.) célszerű a síkbeli *polárkoordináták* alkalmazása. A sík pontjait ekkor az origótól való távolsággal és az  $x$  tengely pozitív irányával bezárt szöggel jellemezzük (2. ábra).



2. ábra

Ha a  $\varphi$ -re a  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  megszorítást tesszük, akkor a transzformáció, az origó kivételével, kölcsönösen egyértelmű.

A 2. ábráról leolvashatjuk, hogy

$$x = r \cos \varphi$$

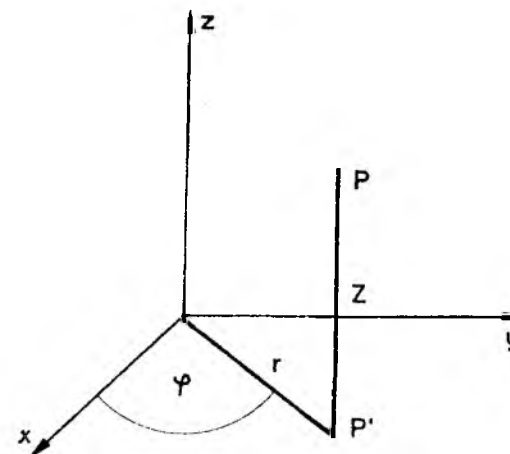
$$y = r \sin \varphi,$$

az inverz transzformáció pedig

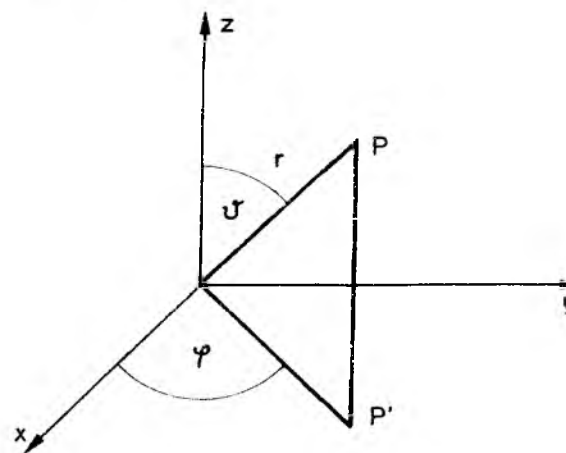
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0 \text{ és } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0 \text{ és } y < 0. \end{cases}$$

Az origó esetén  $\varphi$  nem egyértelmű.



3. ábra



4. ábra

A tér pontjait *hengerkoordinátákkal* is jellemezhetjük, és ekkor a pont helyzete a pont  $xy$  síkra való vetületének polárkoordinátáival és a pont  $xy$  síktól való távolságával adható meg (3. ábra). A  $z$  tengely pontjaiban  $\varphi$  nem egyértelmű.

Használni fogjuk a *gömbi koordinátákat* (térbeli polárkoordinátákat) is:

Egy tetszőleges  $P$  pont helyzetét az  $\vec{OP}$  vektor abszolút értékével, e vektornak a  $z$  tengely pozitív irányával bezárt szögével, valamint az  $\vec{OP'}$  (ahol  $P'$  a  $P$  pont  $xy$  síkra vett merőleges vetülete) és az  $x$  tengely pozitív irányával bezárt szögével jellemezzük (4. ábra). ( $\varphi, \vartheta$  jelentése a földgömbön szokásos hosszúsági, ill. szélességi körhöz hasonló, ha az északi sarkot tekintjük a 0. szélességi körnek.)

A 4. ábráról láthatóan :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \vartheta, \\y &= r \sin \varphi \sin \vartheta, \\z &= r \cos \vartheta.\end{aligned}$$

(A hengerkoordinátákhoz hasonlóan a  $z$  tengely pontjaiban  $\varphi$  nem egyértelmű.)

Esetenként (pl. felületek tárgyalásánál) az előzőektől eltérő koordinátákat is bevezetünk.

## II. KÉTVALTOZÓS FÜGGVÉNYEK

### 1. A kétváltozós függvények értelmezési tartománya

A többváltozós függvények témakörében elsőként a kétváltozós valós függvényekkel foglalkozunk. Mint a bevezetőben is említettük, sem itt, sem más fejezetekben nem törekedhetünk az elméleti alapok részletes tárgyalására, csak a leglényegesebb fogalmakat emeltük ki.

Definícióink  $n$ -változós esetre is könnyen általánosíthatók. Elsőként  $R \times R = R^2$  részhalmazainak néhány tulajdonságát definiáljuk, amelyek e fejezetben, ill. a későbbiekben szükségesek lesznek.

Egy  $P_0 \in R^2$  pont  $r$  sugarú ( $r > 0$ ) környezetét azok a  $P$  pontok alkotják, amelyekre

$$|\vec{P_0P}| < r,$$

tehát :

$$K_{P_0,r} = \{P \in R^2 \mid |\vec{P_0P}| < r\}.$$

A  $P_0$  pont egy  $D \subset R^2$  halmaz *torlódási pontja*, ha minden környezetében végtelen sok  $D$ -hez tartozó pont van.

A  $P_0$  pont egy  $D \subset R^2$  halmaz *határpontja*, ha  $P_0$  minden környezetében van  $D$ -hez és  $R^2 \setminus D$ -hez tartozó pont is. A határpontok halmaza  $D$  *határát* alkotja. Ha  $D$  minden határpontját tartalmazza, *zárt halmazról*, ha egyet sem, *nyílt halmazról* beszélünk. (Mindkét tulajdonság igen speciális ; a halmazok nagy része se nem nyílt, se nem zárt !)

A  $D$  halmaz *korlátos*, ha létezik az origónak olyan véges  $r$  sugarú környezete, hogy

$$D \subset K_{0,r} \subset R^2.$$

A korlátos, zárt halmazt *kompakt halmaznak* nevezzük.)

Az  $f$  függvény *kétváltozós valós függvény*, ha értelmezési tartománya a valós számsíknak, tehát  $R^2$ -nek részhalmaza, kép-



halmaza pedig  $R$ :

$$f: D_f \rightarrow R \quad D_f \subset R^2.$$

$f$  értelmezési tartománya tehát az  $xy$  sík részhalmaza, azaz:

$$f: (x, y) \mapsto f(x, y) \quad (x, y) \in D_f \subset R^2,$$

tehát a  $D_f$  halmaz minden pontjához (más szóval az  $e$  pontba mutató helyvektorhoz) egy-egy valós számot rendelünk hozzá.

A függvény csak értelmezési tartományával együtt adható meg.

### Gyakorló feladatok

1. Határozza meg  $R^2$ -nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

kifejezés értelmezhető!

Mivel a tört nevezője nulla nem lehet, ezért a kifejezés nem értelmezhető az  $x^2 + y^2 = 1$  kör pontjaiban.

Az értelmezési tartomány így:

$$(x, y) \in R^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

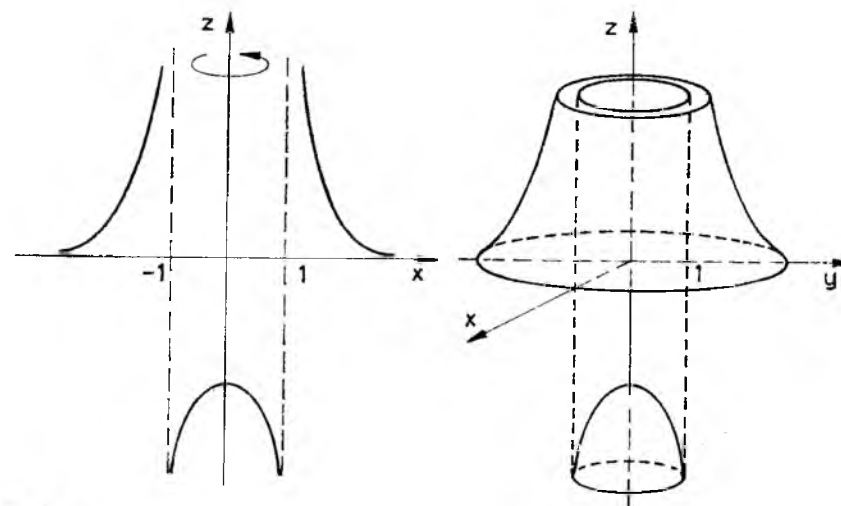
*Megjegyzés:* Az ezen a halmazon értelmezett

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

függvény grafikonját az

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1} \quad x \in R \setminus \{-1; 1\}$$

függvény grafikonjának  $z$  tengely körüli forgatásával származtathatjuk (5. ábra).



5. ábra

2.  $R^2$  mely részhalmazán értelmezhető a

$$\sqrt{x^2 - y},$$

ill. az

$$\ln(x^2 - y)$$

kifejezés?

a) Mivel a négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, így az

$$x^2 - y \geq 0,$$

azaz

$$x^2 \geq y$$

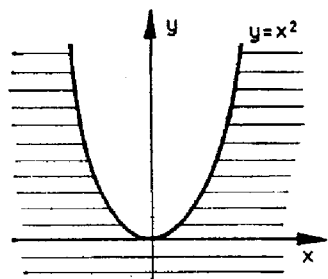
egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

Az értelmezési tartomány tehát:

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 \geq y\}.$$

Ezt a zárt, nem korlátos halmazt a 6. ábrán vonalkázással jelöltük.

b)  $\ln(x^2 - y)$  esetén az értelmezési tartomány nyílt halmaz, hiszen  $D$  határpontjai, amelyekre  $y = x^2$ , nem tartoznak e halmazba.



6. ábra

3. Határozza meg  $R^2$ -nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{1}{\arcsin(\sqrt{x^2+y^2}-2)}$$

kifejezés értelmezhető!

Mivel  $x^2+y^2 \geq 0$  mindig teljesül, így az értelmezési tartomány meghatározásakor két dolgot kell figyelembe vennünk:

Egyrészt a nevező nem lehet nulla, tehát

$$\sqrt{x^2+y^2}-2 \neq 0,$$

azaz

$$x^2+y^2 \neq 4.$$

Másrészt, mivel az arcsin függvény értelmezési tartománya a

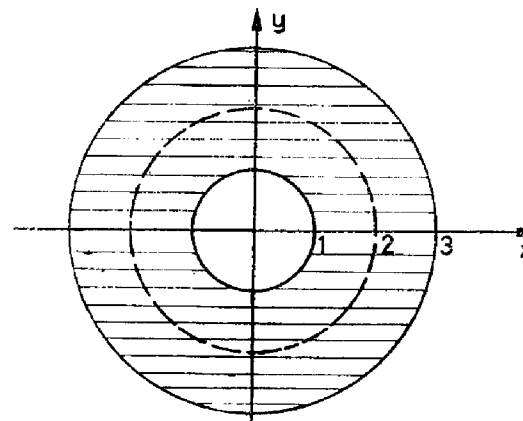
$[-1; 1]$  intervallum, így

$$|\sqrt{x^2+y^2}-2| \leq 1,$$

amelyből

$$1 \leq x^2+y^2 \leq 9.$$

Az értelmezési tartomány tehát egy körgyűrű, amelyből az  $r=2$  sugarú kör pontjai hiányoznak (7. ábra),



7. ábra

$$D : \{(x, y) \in R^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, x^2+y^2 \neq 4\}$$

tehát korlátos, de nem zárt halmaz.

4. Határozza meg  $R^2$ -nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{1-|x+y|}}$$

kifejezés értelmezhető!

Külön-külön megállapítjuk a két tag értelmezési tartományát, majd vesszük e két halmaz közös részét.

a)  $\frac{1}{\sqrt{xy}}$  akkor van értelmezve, ha  $xy > 0$ . Ez az első és a harmadik

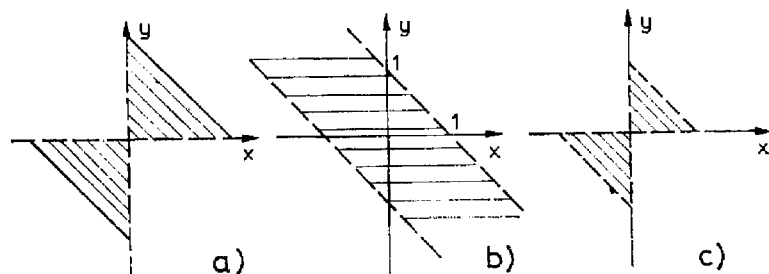
síknegyedben igaz. A tengelyek pontjai természetesen nem tartoznak bele a halmazba, hiszen azokra  $xy = 0$ .

b) A második tagban

$$|x+y| < 1$$

teljesülése szükséges, amely

$$-1 < x+y \quad \text{és} \quad x+y < 1$$



8. ábra

együttes fennállását jelenti. Ez az

$$y=1-x \quad \text{és} \quad y=-1-x$$

párhuzamos egyenesek közötti nyílt sáv.

c) A közös megoldás a 8c ábrán látható korlátos nyílt halmaz, a két részmegoldás közös része:

$$D=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0, |x+y| < 1\}.$$

5.  $\mathbb{R}^2$  mely pontjaiban értelmezhető a

$$\sqrt{\ln \cos \frac{2\pi x}{y}}$$

kifejezés?

Mivel a négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, így

$$\ln \cos \frac{2\pi x}{y} \geq 0,$$

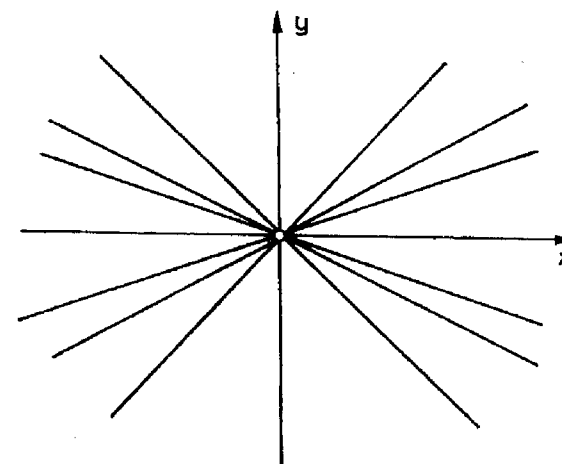
amelyből az  $\ln$  függvény monotonitása miatt következik a

$$\cos \frac{2\pi x}{y} \geq 1$$

egyenlőtlenség.

A koszinuszfüggvény értéke viszont egynél nagyobb nem lehet, tehát:

$$\cos \frac{2\pi x}{y} = 1.$$



9. ábra

Ez csak akkor teljesül, ha

$$\frac{2\pi x}{y} = k2\pi, \quad \text{ahol} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Az értelmezési tartomány tehát a 9. ábrán látható egyenessereg, amelyre

$$x=ky \mid y \neq 0 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Az origó nem tartozik bele e tartományba!)

*Megjegyzés:* A kifejezés értéke a tartomány minden pontjában nulla, így az

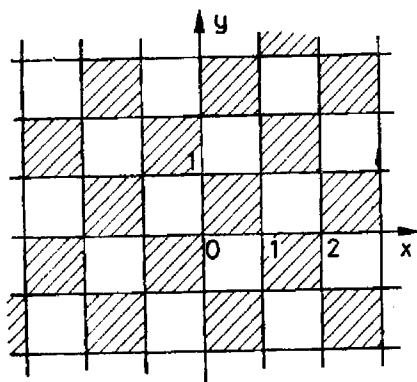
$$f: (x, y) \mapsto \sqrt{\ln \cos \frac{2\pi x}{y}} \quad (x, y) \in D$$

függvény értékkészlete egyetlen elemből áll.

6. Határozza meg  $\mathbb{R}^2$ -nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a

$$\sqrt{\sin \pi x \sin \pi y}$$

kifejezés értelmezhető!



10. ábra

Mivel a négyzetgyök alatt negatív szám nem állhat, e

$$\sin \pi x \sin \pi y \geq 0.$$

Vizsgáljuk meg, mikor nulla ez a kifejezés!

$$\sin \pi x = 0$$

esetén

$$\pi x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z},$$

azaz

$$x = k.$$

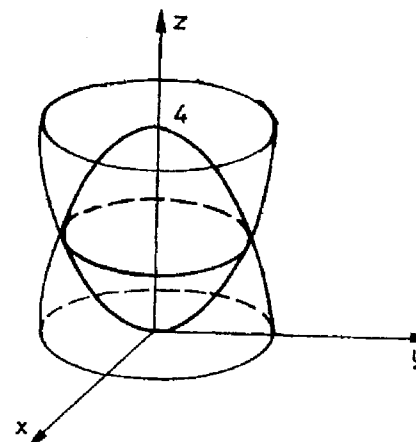
Az előjelváltási pontok tehát az egész koordinátájú helyeken vannak  $x$  és  $y$  esetén egyaránt. Mivel az egységnyezetben mindkét tényező pozitív, így az értelmezési tartomány a 10. ábrán látható sakktableszerű nemkorlátos zárt halmaz:

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{sg} \sin \pi x = \operatorname{sg} \sin \pi y\}.$$

7. Határozza meg, hogy  $\mathbb{R}^3$  mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a

$$\sqrt{z - x^2 - y^2} + \sqrt{z + x^2 + y^2} - 4$$

kifejezés!



11. ábra

$$A \quad z \geq x^2 + y^2$$

és a

$$z \leq 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2)$$

egyenlőtlenségeknek egyszerre kell teljesülniük.

Az első feltétel egy forgási paraboloid (l. a II.2. 1. feladatát!) feletti pontokra teljesül — a határoló felület pontjait is beleértve.

A második feltételnek megfelelő pontok egy fordított forgási paraboloid alatt helyezkednek el (11. ábra).

Az értelmezési tartomány e két halmaz közös része, korlátos zárt halmaz:

$$D : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

## 2. A kétváltozós függvények szemléltetése

Az

$$f : (x; y) \mapsto f(x; y) \quad (x; y) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$$

kétváltozós függvény grafikonja a háromdimenziós térben a

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

halmaz. E pontok általában (de nem minden esetben) egy felületet alkotnak.

E felületet a  $z=f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_f$  egyenlettel jellemezhetjük.

Szemléltetése történhet a felületnek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal való metszésvonalai alapján szerkesztett axonometrikus képpel. A másik szemléltetési mód — a térkép készítéséhez hasonlóan — a  $z=\text{állandó}$  síkokkal történő metszésvonalaknak (az ún. *szintvonalaknak*) az  $xy$  síkba történő vetítése.

A gyakorló feladatok során mindkét ábrázolási módra mutatunk példát.

Háromváltozós függvények esetén a szemléltetésre csak a szintvonalas szemléltetési mód általánosítása, a szintfelületekkel történő szemléltetés kínálkozik. Ennek lényege: az  $f(x, y, z)=\text{állandó}$  egyenlettel jellemzett szintfelületeket ábrázoljuk, paraméterként feltüntetve a függvényértéket.

### Gyakorló feladatok

1. Szemléltesse az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvényt!

a) Végezzük először a szemléltetést a koordinátasíkokkal való metszetek alapján!

Ha a

$$z = x^2 + y^2$$

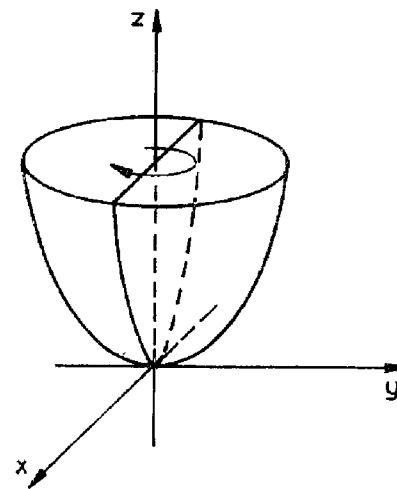
felületet elmetsszük a  $zy$  síkkal, amelynek egyenlete  $x=0$ , akkor a metszetgörbe a  $z=y^2$  parabola. Hasonlóan a  $zx$  síkkal való metszéskor is parabola a metszésvonal.

Az  $xy$  síkkal párhuzamos síkkal történő metszés esetén tehát, ha

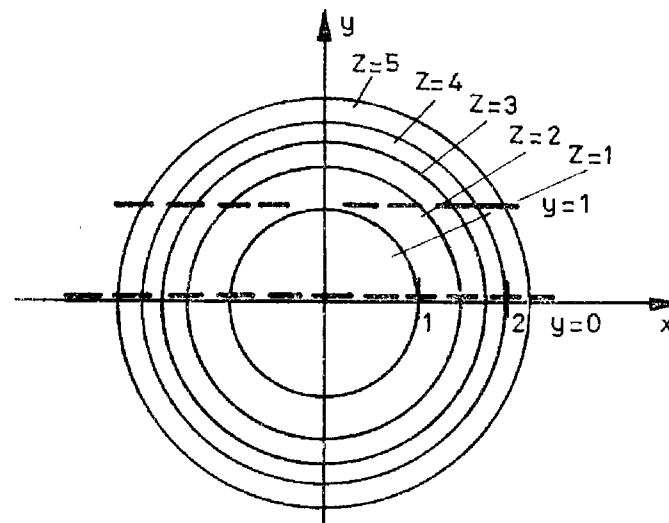
$$\begin{aligned} z &= r^2: \\ r^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

a metszésvonal egy  $r$  sugarú kör. A felület tehát a  $z=x^2+y^2$  parabola  $z$  tengely körüli forgatásával adódó forgási paraboloid (12. ábra).

b) Ugyanezt a felületet szemléltethetjük a szintvonalas ábrázolási móddal is.



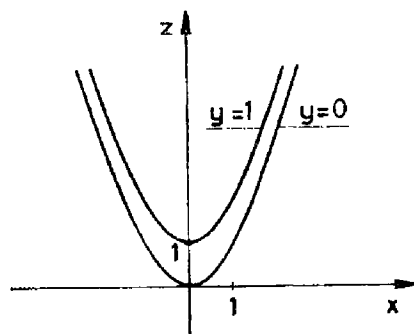
12. ábra



13. ábra

Az a) részben láttuk, hogy az  $xy$  síkkal párhuzamos síkokkal való metszésvonalak körök. E metszésvonalakat az alapsíkra vetítve kapjuk a felület szintvonalas képét (13. ábra). (A vonalakon a  $z$  paraméter, a „magasság” értékeit adja meg.)

c) Sok esetben szükséges az előző szintvonalas képről  $zx$  síkbeli, ill. ezzel párhuzamos síkbeli metszet képét előállítani, amelyekben  $y$  a paraméter. E metszévonalak pontjait megkaphatjuk, ha a szintvonalak  $y=c$  ( $c$  állandó) pontjait ábrázoljuk az  $xz$  síkon (14. ábra).



14. ábra

2. Szemléltesse a

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

egyenlettel jellemzett felületet!

Ha a felületet elmetsszük az  $x=0$  egyenletű  $yz$  síkkal, a metszévonal  $x^2=y^2$ , azaz két egyenes:

$$z=y, \quad \text{ill.} \quad z=-y.$$

Hasonlóan az  $xz$  síkkal való metszéskor is két egyenest kapunk.

Az  $xy$  síkkal párhuzamos síkmetszet, amelyben  $z=r$ , ahol  $r$  konstans, az  $r^2 = x^2 + y^2$  kör.

A felület tehát egy kettőskúp (15. ábra).

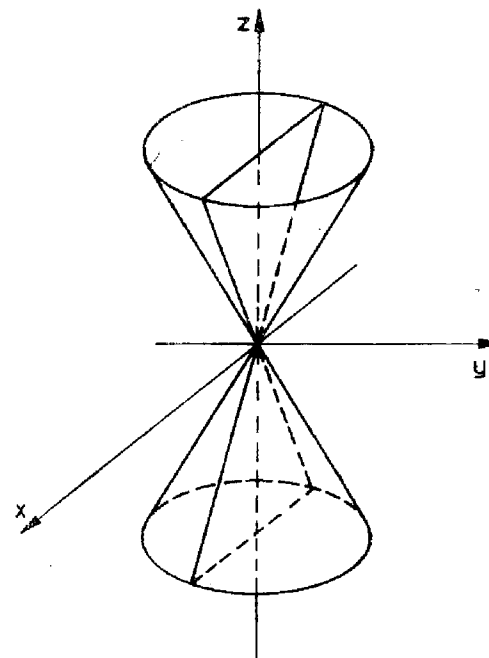
*Megjegyzés:* E felület az

$$f_1 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

és az

$$f_2 : (x, y) \mapsto -\sqrt{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvények grafikonja.



15. ábra

3. Szemléltesse metszetei segítségével a

$$z^2 = x^2 + y^2 - 1 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

egyenlettel jellemzett felületet!

Az  $xz$  síkkal ( $y=0$ ) metszve a metszévonal az

$$x^2 - z^2 = 1$$

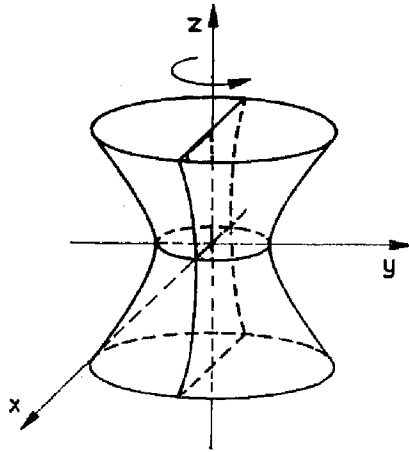
egyenletű hiperbola.

Hasonlóan hiperbolametszet adódik, ha a felületet az  $x=0$  síkkal metsszük el.

Az  $xy$  síkkal ( $z=0$ ) metszve a metszévonal az

$$x^2 + y^2 = 1$$

egységsugarú kör. Hasonlóan körök adódnak a  $z=c$  ( $c$  konstans) síkokkal való metszéskor is. A felület tehát egy egyköpenyű forgáshiperboloid, amely az  $x^2 - z^2 = 1$  hiperbola  $z$  tengely körüli forgatásával adódik (16. ábra).



16. ábra

*Megjegyzés:* A felület tartalmazza az

$$y=1; z=x$$

és

$$y=1; z=-x$$

egyenletrendszerű egyeneseket, amiről behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk. A felület származtatható e két egyenes  $z$  tengely körüli forogatásával is. Ebből könnyen belátható, hogy e felület minden pontján áthalad két olyan egyenes, amely illeszkedik a felületre.

4. Szemléltesse metszetei segítségével a

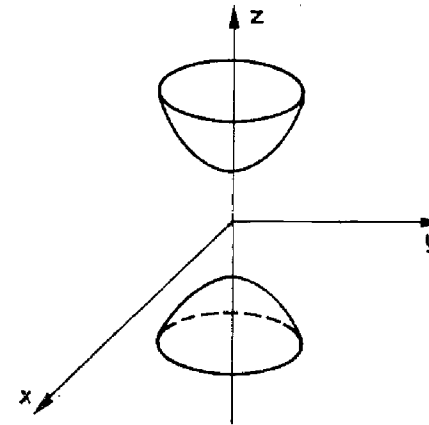
$$z^2 = x^2 + y^2 + 1 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

egyenlettel jellemzett felületet!

Ha a felületet az  $xz$  síkkal ( $y=0$ ) metsszük, akkor a metszésvonal a  $z^2 - x^2 = 1$  hiperbola. Az  $yz$  síkkal történő metszéskor is hiperbola adódik metszésvonalként.

Ha a  $z=c$  egyenletű síkkal ( $|c|>1$ ), metsszük el a felületet, akkor a metszésvonal kör.

A felület tehát egy forgásfelület, amelyet a  $z^2 - x^2 = 1$  hiperbola  $z$  tengely körüli forogatásával származtathatunk (kétköpenyű hiperboloid) (17. ábra).



17. ábra

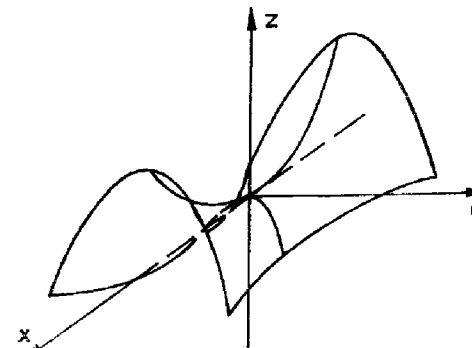
5. Szemléltesse az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 - y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvényt!

Ha a  $z = x^2 - y^2$  felületet az  $xz$  síkkal metsszük, a metszésvonal a  $z = x^2$  parabola. Az  $yz$  síkkal való metszéskor a  $z = -y^2$  parabolát kapjuk.

A felületet úgy képzelhetjük el szemléletesen, hogy a  $z = x^2$  parabolán „végigcsúszik” a  $z = -y^2$  parabola. Így adódik a 18. ábrán látható nyeregfelület, amely az  $xy$  síkot az  $x=y$ , ill.  $x=-y$  egyenesekben metszi.



18. ábra



*Megjegyzés:* Ha bevezetjük az

$$u = x + y$$

és

$$v = x - y$$

új változókat, akkor a felület egyenlete

$$z = uv$$

alakban írható.

A transzformáció lényegében az  $xy$  sík  $z$  tengely körüli  $45^\circ$ -os elforgatását jelenti. Ugyanis  $\alpha$  szögű elforgatáskor az új koordináták a következők:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

$\alpha = -45^\circ$  esetén:

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y),$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y).$$

A  $z = uv$  felület esetén az

$$u = u_0$$

és

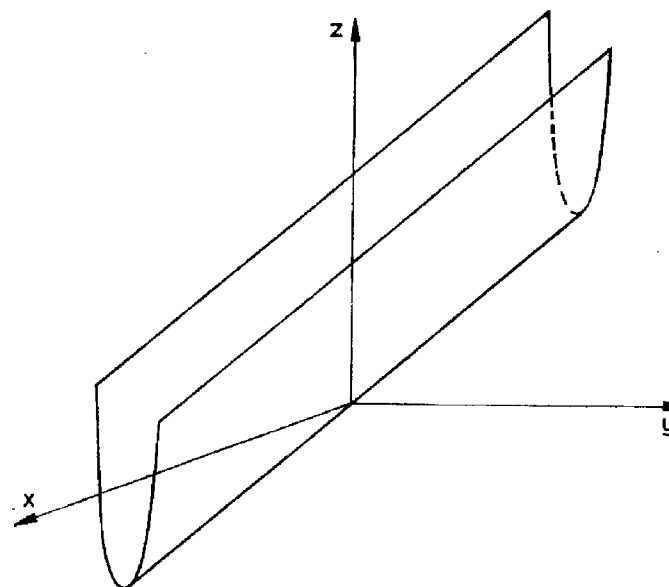
$$v = v_0 \quad (u_0, v_0 \text{ állandó})$$

síkokkal való metszésvonalak egyenesek, így a felület minden pontján áthalad két-két, a felületre illeszkedő egyenes. (Természetesen ugyanez igaz az eredeti nyeregfelületre is, hiszen ennek forgatásával adódott a  $z = uv$  felület.)

6. Szemléltesse a

$$z = x^2 + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

felületet!



19. ábra

Az  $yz$  síkban ( $x=0$ ) a metszésvonal a  $z=y$  egyenes.

Az  $xz$  síkban ( $y=0$ ) adódó metszésvonal a  $z=x^2$  parabola.

A felületet a  $z=x^2$  parabolának a  $z=y$  egyenesen való „csúsztatásával” származtathatjuk, és így parabolikus hengert kapunk (19. ábra).

7. Szintfelületei segítségével szemléltesse az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

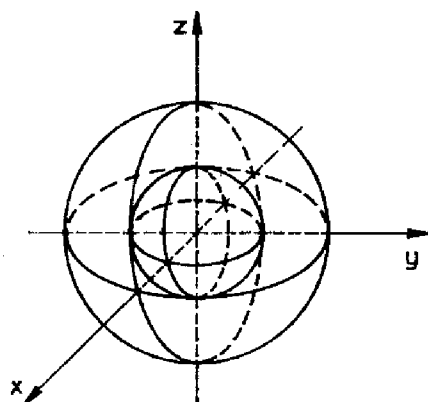
háromváltozós függvényt!

A *szintfelület* az  $f(x, y, z) = c$  ( $c$  konstans) egyenlettel jellemzett felületet jelenti.

$c = r^2 > 0$  esetén a felület egyenlete

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ami egy origóközéppontú  $r$  sugarú gömb egyenlete;  $f$  szintfelületei tehát gömbök (20. ábra).



20. ábra

8. Szemléltesse szintfelületei segítségével az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvényt!

a)  $f(x, y, z) = 0$  esetén a szintfelület egyenlete

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Ez a felület a 2. feladatban tárgyalt kettőskúp.

b)  $f(x, y, z) = 1$  esetben a szintfelület

$$z^2 = x^2 + y^2 - 1,$$

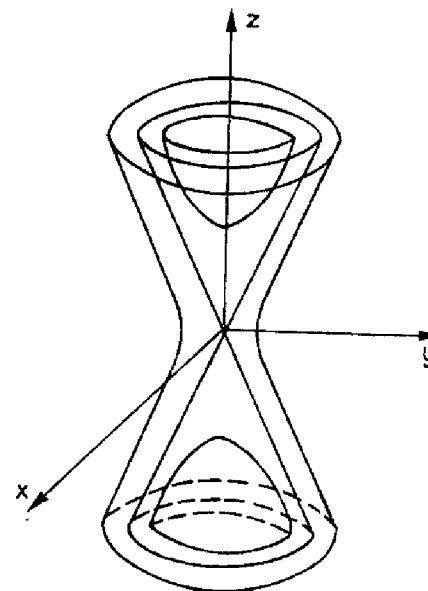
amely a 3. feladatban tárgyalt egyköpenyű hiperboloid.  $f(x, y, z) = c > 0$  esetében mindig egyköpenyű hiperboloidot kapunk.

c)  $f(x, y, z) = -1$  esetén a szintfelület

$$z^2 = x^2 + y^2 + 1,$$

amely a 4. feladatban tárgyalt kétköpenyű hiperboloid.

A szintfelületeket a 21. ábrán láthatjuk.



21. ábra

### 3. A kétváltozós függvények határértéke, folytonossága

Legyen a  $P_0$  pont az

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad D_f \subset \mathbb{R}^2$$

függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! Az  $f$  *határértéke* a  $P_0(x_0, y_0)$  pontban  $A$ , ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz tartozik  $P_0$ -nak egy olyan  $\delta$  sugarú környezete, hogy

$$|f(P) - A| < \varepsilon \quad \text{ha } P \in D_f \cap K_{P_0, \delta} \setminus \{P_0\}.$$

(A határérték létezésének vizsgálatakor tehát  $P_0$  környezetének csak az értelmezési tartományba tartozó pontjait kell figyelembe venni!)

Az előzővel egyenértékű a következő definíció: A  $P_0$  pontban csak akkor van határértéke az  $f$  függvénynek, ha tetszőleges,  $P_0$ -hoz tartozó  $\{P_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ( $P_n \neq P_0$ ) pontsorozatra, amelyre  $P_n \in D_f$ , a függvényértékek sorozata  $A$ -hoz tart. Tehát, ha két

különböző pontsorozaton közeledve  $P_0$ -hoz a függvényértékek sorozata két különböző számhoz tart, akkor a függvénynek biztosan nincs határértéke e pontban.

A határérték létezéséhez azonban nem elegendő, hogy tetszőleges  $P_0$ -hoz tartó egyenes mentén mindig ugyanazt a határértéket kapjuk.

Az

$$f: D_f \rightarrow R \quad D_f \subset R^2$$

függvényt *folytonosnak* mondjuk egy  $P_0$  pontban, ha  $P_0 \in D_f$ ,  $P_0$ -ban létezik  $f$ -nek határértéke (tehát  $P_0$   $D_f$ -nek torlódási pontja),

$$* \quad f(P_0) = \lim_{P_0} f.$$

E definíció alapján a II.1. 5. feladatában szereplő függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, mivel értelmezési tartományának minden pontja torlódási pont, a határérték és helyettesítési érték e pontokban egyaránt nulla.

Az egyváltozós függvények körében megismert összeg-, különbség-, szorzat-, hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételek a kétváltozós függvények körében is érvényesek.

### Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } xy \neq 0 \\ 0 & \text{ha } xy = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in R^2$$

függvény folytonos az origóban!

Mivel az origóban a függvényérték nulla, azt kell belátnunk, hogy a határérték is ennyi. A tengelyeken a függvényérték azonosan nulla, a tengelyeken kívül pedig:

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|,$$

hiszen

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1,$$

viszont

$$\lim (|x| + |y|) = 0 = f(0; 0),$$

amivel megmutattuk, hogy a függvény az origóban valóban folytonos.

*Megjegyzés:*

a) Adott  $\varepsilon > 0$  esetén az origó mely környezetében teljesül az

$$|f(x, y)| < \varepsilon \text{ egyenlőtlenség?}$$

Láttuk, hogy

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y|.$$

Mivel

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

és

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

ahol  $\sqrt{x^2 + y^2}$  az origó és a  $P(x, y)$  pont távolsága, így az

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

egyenlőtlenség biztosan teljesül akkor, ha a  $P$  pont az origó  $\frac{\varepsilon}{2}$  sugarú környezetében van.

b) Az  $x$  és  $y$  tengely más pontjaiban a függvénynek nincs határértéke, itt ugyanis az összegnek csak egyik tagja tart nullához, a másikban a szinuszos tényező erősen oszcillál.

2. Van-e határértéke az origóban az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in R^2 \setminus \{0; 0\}$$

függvénynek?

Közeledjünk az origóhoz az

$$y=mx \quad (m \in \mathbb{R}) \text{ egyenesen!}$$

Az egyenes pontjaiban a függvényérték

$$f(x, mx) = \frac{2m}{1+m^2},$$

amely —  $m$  értékétől függően — minden egyenesen más és más, tehát  $f$ -nek az origóban nincs határértéke.

3. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x^4 + y^4}, & \text{ha } y \neq 0 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ha } y = 0 \text{ és } x \neq 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0; 0\}$$

függvénynek nincs határértéke az origóban, bár tetszőleges egyenes mentén közeledve az origóhoz mindig ugyanaz a határérték adódik.

a) Az  $y=mx$   $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  egyenesen közeledve:

$$f(x; mx) = \frac{m^2 x^2}{x^4 + m^4 x^4} = \frac{m^2}{x^2(1+m^2)},$$

ami  $+\infty$ -hez tart, ha  $x$  nullához tart. (Ugyanez adódik  $m=0$  esetén az  $x$  tengely pontjaira is, mert  $f(x, 0) = \frac{1}{x^2}$ .)

b) Közelítsünk az origóhoz az  $y=x^4$  görbén! Ekkor

$$f(x, x^4) = \frac{x^8}{x^4 + x^{16}} = \frac{x^4}{1+x^{12}},$$

ami nullához tart, ha  $x$  nullához közeledik. Tehát  $f$ -nek valóban nincs határértéke az origóban annak ellenére, hogy tetszőleges egyenes mentén ugyanazt az értéket kaptuk.

4. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto 0 \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \in \mathbb{Q}\}$$

függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos!

A függvény az  $xy$  síknak csak azon pontjaiban értelmezett, amelyekben az  $xy$  szorzat racionális szám. E pontok mindenütt sűrűn helyezkednek el a síkon, de ugyancsak sűrűn mindenütt vannak olyan pontok is, amelyek nem tartoznak hozzá  $D_f$ -hez. Mivel  $D_f$  minden pontja torlódási pont, a függvényérték minden pontban nulla, így tetszőleges  $P \in D_f$  esetén

$$\lim_{P \rightarrow P} f = 0 = f(P),$$

azaz  $f$  valóban folytonos  $D_f$  minden pontjában.

5. Igazolja, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} \right) \neq \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} \right) !$$

Vizsgáljuk előbb a bal oldalt:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} = 0,$$

mivel a szinuszfüggvény argumentuma rögzített  $x$  esetén nullához tart. Tehát

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Hasonlóan a jobb oldal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

tehát a két oldal értéke valóban különböző.

6. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0; 0\}$$

függvénynek az origóban van határértéke!

A bizonyításhoz polárkoordinátákra térünk át; ekkor:

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = r \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Ez utóbbi viszont  $r$  nullához tartása esetén nullához tart,  $\varphi$  értékétől függetlenül.

Tehát

$$\lim_{(0;0)} f = 0.$$

*Megjegyzés:* Hasonlóan látható be, hogy a

$$g: (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0; 0\}$$

függvénynek az origóban nincs határértéke. Ekkor ugyanis polárkoordinátákra áttérve:

$$\frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \frac{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi},$$

aminek, ha  $r$  nullához tart, nincs határértéke, hiszen  $\varphi = 0$  esetén értéke nulla,

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ esetén pedig } \frac{1}{2}.$$

7. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y, z) \mapsto \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény folytonos  $\mathbb{R}^3$  minden pontjában!

Az állítás bebizonyításához elegendő az origóbeli folytonosságot igazolni. Egy törtfüggvény ugyanis, amelynek számlálója és nevezője is folytonos, folytonos minden olyan pontban, ahol nevezője nem nulla. Határozzuk meg a függvény határértékét az origóban! Gömbi koordinátákkal:

$$\begin{aligned} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{r^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi}{r^2 [\sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \vartheta]} \\ &= r \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi, \end{aligned}$$

amely az origóhoz közeledve nullához tart. A függvénynek tehát van az origóban határértéke, ez egyenlő a függvényértékkel, tehát  $f$  az origóban is folytonos.

8. Értelmezze a  $g$  kétváltozós függvényt úgy, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}, & \text{ha } x - y \neq 0 \\ g(x, y) & \text{ha } x - y = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény folytonos legyen  $\mathbb{R}^2$  minden pontjában!

Alakítsuk át a számlálót a következőképpen:

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

ekkor:

$$\lim_{(x-y) \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \lim_{(x-y) \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = \cos x,$$

mivel

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Tehát a

$$g: (x, y) \mapsto \cos x \quad D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

választás mellett  $f$  az  $\mathbb{R}^2$  minden pontjában folytonos lesz.

9. Értelmezze a  $g$  kétváltozós függvényt úgy, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x^2 - y^2}, & \text{ha } x^2 - y^2 \neq 0 \\ g(x, y) & \text{ha } x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény folytonos legyen  $\mathbb{R}^2$  minden pontjában!

Az előző feladathoz hasonlóan átalakítjuk a számlálót:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Ezt alkalmazva:

$$\frac{\cos x - \cos y}{x^2 - y^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}},$$

ahonnan látszik, hogy a függvény az origóban folytonossá tehető, ha ott a

függvényértéket  $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -nek választjuk, a többi pontban pedig

$x^2 - y^2 = 0$ , ami  $x = y$ , ill.  $x = -y$  teljesülését jelenti.

Ha  $x = y$ , akkor

$$\frac{x+y}{2} = x,$$

másrészt

$$\lim_{(x-y) \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = 1.$$

E pontokban tehát  $g$ -t célszerű  $-\frac{1}{2} \frac{\sin x}{x}$ -nek választani.

Ha  $x = -y$ , akkor  $\frac{x-y}{2} = x$ , s a szorzatalak másik tényezőjének a ha-

tárértéke egy.

Tehát, ha  $g$ -t a következőképpen választjuk:

$$g: (x, y) \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x = \pm y \text{ és } xy \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } x = y = 0, \end{cases} \quad D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$$

akkor  $f$  a sík minden pontjában folytonos lesz.

### III. A KÉTVALTOZÓS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLÁSA

#### 1. Parciális deriváltak

A parciális deriváltakat az egyváltozós függvények deriváltját általánosítva, különbségi hányados határértékeként definiáljuk, s megmutatjuk, hogy geometriai jelentésük bizonyos esetekben érintők iránytangenseként adható meg.

Tekintsük az

$$f: D_f \rightarrow R \quad D_f \subset R^2$$

kétváltozós függvényt! Legyen a  $P_0(x_0, y_0)$  pont a  $D_f$  torlódási pontja!

Ekkor, ha rögzített (állandó)  $y$  mellett létezik és véges a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

ill. rögzített  $x$  mellett létezik és véges a

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

határérték, akkor ezeket az  $f$  függvény  $P_0$  pontbeli parciális differenciálhányadosainak nevezzük.

Jelölésük:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} = f'_x(x_0, y_0), \quad \text{ill.} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} = f'_y(x_0, y_0).$$

Ha egy  $T \subset D_f$  tartomány pontjaiban léteznek a parciális differenciálhányadosok, akkor az  $f'_x: T \rightarrow R$  függvényt, amely minden  $(x_0, y_0) \in T$ -hez az  $f'_x(x_0, y_0)$  értéket rendeli, az  $x$  szerinti parciális derivált függvénynek nevezzük.

Hasonlóan értelmezhető  $f'_y$  is.

A feladatok során megmutatjuk, hogy a parciális deriváltak adott pontbeli létezése még a függvény adott pontbeli foly-

tonosságát sem feltételezi, de a folytonosság nem mindig biztosítja a parciális derivált létezését.

Az eddigiekből már világos, de külön is kiemeljük, hogy a parciális deriváltak kiszámításakor az egyváltozós függvényeknél megismert differenciálási szabályokat kell alkalmazni, figyelembe véve, hogy az a változó, amely szerint *nem* differenciálunk, konstansnak tekintendő.

Tegyük fel, hogy az  $f$  függvénynek a  $P_0(x_0, y_0)$  pontban létezik az  $x$  és  $y$  szerinti parciális deriváltja! A  $P_0$  ponton áthaladó,  $xz$  síkkal párhuzamos  $y = y_0$  egyenletű sík a függvény grafikonját alkotó felületet a  $z = f(x, y_0)$  síkgörbében metszi. Ha ennek a görbének az  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pontban van érintője, akkor az érintő iránytangense:

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

hasonlóképpen:

$$f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$$

(22. ábra).

A parciális deriváltak általában továbbra is kétváltozós függvények. Amennyiben ezek is parciálisan differenciálhatók, képezhetjük mindkét változó szerint újabb parciális deriváltjait. Így a *másodrendű parciális deriváltakat* kapjuk. Ezek jelölése:

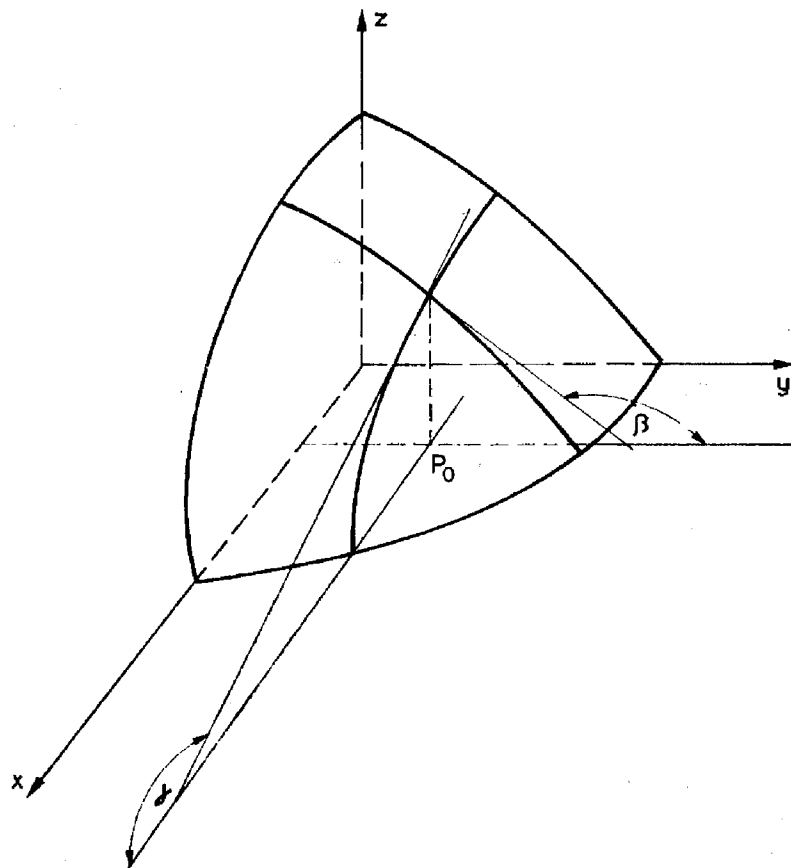
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}. \end{aligned}$$

$f''_{xx}$ -et és  $f''_{yy}$ -t *tiszta*,  $f''_{xy}$  és  $f''_{yx}$ -et *vegyes* másodrendű parciális deriváltaknak szokás nevezni. Elég általános feltételek mellett igaz, hogy:

$$f''_{xy} = f''_{yx};$$

azaz: a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, a deriválás sorrendje felcserélhető. Bizonyítás nélkül közöljük





22. ábra

ennek elégséges feltételét. Ha a  $P_0(x_0, y_0)$  pont egy környezetében  $f''_{xy}$  és  $f''_{yx}$  léteznek és a  $P_0$  pontban folytonosak, akkor:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Hasonlóan értelmezhetők a harmadrendű parciális deriváltak amelyekre például az

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

egyenlőség áll fenn, az előzőhöz hasonló feltételek teljesülése esetén.

Az elmondottak általánosíthatók három, négy stb. változó esetére is, minden lényeges változtatás nélkül.

### Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

Ha  $x$  szerint deriválunk, akkor  $y$  állandó, tehát  $y^3$  deriváltja zérus.

$$f'_x: (x, y) \mapsto 3x^2 - 3y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f'_y: (x, y) \mapsto 3y^2 - 3x \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^y \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

Az  $x$  szerinti parciális derivált kiszámításakor  $y$  állandónak tekintendő, tehát hatványfüggvényként kell deriválni:

$$f'_x: (x, y) \mapsto yx^{y-1} \quad (x, y) \in D_f.$$

Az  $y$  szerinti parciális deriváláskor  $x$  állandó, tehát a függvényt exponenciális függvényként kell deriválni:

$$f'_y: (x, y) \mapsto x^y \ln x \quad (x, y) \in D_f.$$

3. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^{y^z} \quad x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}^+$$

függvény parciális deriváltjait!

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el:

$$f'_x : (x, y, z) \mapsto x^{yz-1} y^z,$$

$$f'_y : (x, y, z) \mapsto x^{yz} (\ln x) z y^{z-1},$$

$$f'_z : (x, y, z) \mapsto x^{yz} (\ln x) y^z (\ln y).$$

Mindhárom parciális derivált értelmezési tartománya azonos  $D_f$ -fel.

A továbbiakban csak akkor fogjuk feltüntetni a parciális deriváltak értelmezési tartományát, ha ez az eredeti függvényétől különböző.

A következő feladatokban is az elsőrendű parciális deriváltakat kell meghatározni:

$$4. f : (x, y, z) \mapsto (xy)^z = x^z y^z \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad y \in \mathbb{R}^+, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$f'_x : (x, y, z) \mapsto y^z z x^{z-1},$$

$$f'_y : (x, y, z) \mapsto x^z z y^{z-1},$$

$$f'_z : (x, y, z) \mapsto (xy)^z \ln(xy).$$

$$5. f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x}} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{1}{y} e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right),$$

$$f'_y : (x, y) \mapsto \frac{-x}{y^2} e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x}} \frac{1}{x} = e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right).$$

$$6. g : (x, y) \mapsto \arcsin \frac{x}{y}, \quad D_g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{y} \leq 1 \right\}.$$

$$g'_x : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}},$$

$$g'_y : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

$g'_x$  és  $g'_y$  értelmezési tartománya szűkebb, mint  $g$ -é, hiszen  $y^2 = x^2$  feltétel esetén a deriváltak nem léteznek. (E feltétel a  $D_g$  halmaz határpontjait jelöli.)

$$7. f : (x, y) \mapsto y^2 \ln \sqrt{xy} + \operatorname{arsh}(xy) \quad x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+.$$

Deriválás előtt alakítsuk át  $\ln \sqrt{xy}$ -t!

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} y^2 \ln x + \frac{1}{2} y^2 \ln y + \operatorname{arsh}(xy),$$

$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{y^2}{2x} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2y^2}},$$

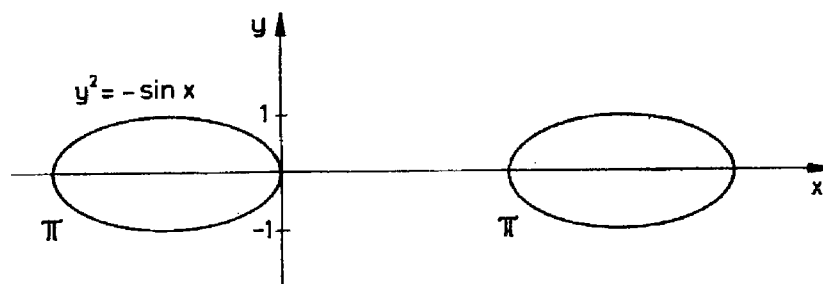
$$\begin{aligned} f'_y : (x, y) &\mapsto y \ln x + y \ln y + \frac{y^2}{2y} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2y^2}} = \\ &= y \ln(xy) + \frac{y}{2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2y^2}}. \end{aligned}$$

$$8. f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 e^y}{\sin x + y^2} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y^2 = -\sin x\}.$$

Az  $y^2 = -\sin x$  feltételnek eleget tevő pontok halmazát a 23. ábrán látható görbék adják.

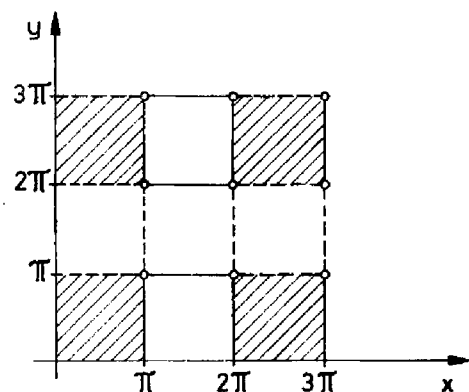
$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{3x^2 e^y (\sin x + y^2) - x^3 e^y (\cos x)}{(\sin x + y^2)^2},$$

$$f'_y : (x, y) \mapsto \frac{x^3 e^y (\sin x + y^2) - x^3 e^y 2y}{(\sin x + y^2)^2}.$$



23. ábra

9.  $f: (x, y) \mapsto \sqrt{\sin x} \sin \sqrt{y} + \sin \ln x \ln \sin y$ ,  
 $D_f: x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{x \mid \sin x < 0\}, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{y \mid \sin y \leq 0\}$ .



24. ábra

A feltételnek eleget tevő pontok az első síknegyedben egy sakktábla-szerű elrendezést adnak. (A  $D_g$ -hez tartozó határpontokat vastagítással jelöltük.) (24. ábra)

$$f'_x: (x, y) \mapsto \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \sin \sqrt{y} + \frac{\cos \ln x}{x} \ln \sin y,$$

$$f'_y: (x, y) \mapsto \sqrt{\sin x} \frac{\cos \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} + \sin \ln x \frac{\cos y}{\sin y}.$$

( $f'_y$  értelmezési tartománya azonos  $D_f$ -fel,  $f'_x$ -é ennél szűkebb: nem tartalmazza a határpontokat.)

10. Az előző fejezetben láttuk, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban.

Igazolja, hogy e függvény parciálisan differenciálható az origóban!

A definíció szerint:  $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ .

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan  $f'_y(0; 0) = 0$ .

A parciális derivált adott pontbeli létezéséhez tehát valóban nem szükséges, hogy a függvény e pontban folytonos legyen.

11. Határozza meg az előző feladat mintájára az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{ha } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^4 + y^4 = 0 \end{cases}$$

függvény tiszta másodrendű parciális deriváltjainak értékét az origóban!

Az előző fejezetben láttuk, hogy a függvény nem folytonos az origóban.

Az origó kivételével:

$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{2xy^2(x^4 + y^4) - 4x^3x^2y^2}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{2xy^6 - 2x^5y^2}{(x^4 + y^4)^2}.$$

Az origóban a definíció alapján  $f'_x(0, 0) = 0$ .

Legyen

$$g = f'_x : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^6 - 2x^5y^2}{(x^4 + y^4)^2}, & \text{ha } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^4 + y^4 = 0. \end{cases}$$

Arról, hogy  $g$  sem folytonos az origóban, könnyen meggyőződhetünk, ha az  $y = 2x$  egyenes mentén tartunk az origóhoz.

Ekkor

$$\lim_{0} \frac{128x^7 - 8x^7}{(x^4 + 16x^4)^2} = \lim_{0} \frac{120x^7}{289x^8} = \lim_{0} \frac{120}{289x},$$

ez utóbbi viszont nem korlátos, így  $g$  valóban nem folytonos az origóban.

Számítsuk ki  $g$  origóbeli parciális differenciálhányadosait!

$$g'_x(0, 0) = f''_{xx}(0, 0) = \lim_{0} \frac{g(0 + \Delta x, 0) - g(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

mivel a számláló azonosan nulla.

Hasonlóan látható be, hogy

$$g'_y(0, 0) = f''_{xy}(0, 0) = 0.$$

A számítást nem részletezve:  $f''_{yx}(0, 0) = 0$ .

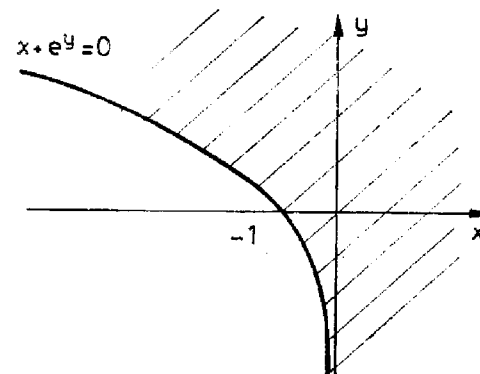
*Megjegyzés:* A feladat nem tesz eleget a vegyes másodrendű parciálisok egyenlőségére felírt elégséges feltételnek, a vegyes parciális deriváltak mégis egyenlők az origóban.

Az említett feltétel tehát *elégséges*, de nem *szükséges* feltétele a vegyes parciális deriváltak egyenlőségének.

A következő feladatokban a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét kell igazolni.

12.

$$f : (x, y) \mapsto \ln(x + e^y) \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + e^y) > 0\}.$$



25. ábra

Az értelmezési tartomány az ábrán látható nyílt halmaz (25. ábra).

$$f'_x = \frac{1}{x + e^y},$$

$$f'_y = \frac{e^y}{x + e^y},$$

$$f''_{xy} = -\frac{e^y}{(x + e^y)^2},$$

$$f''_{yx} = -\frac{e^y}{(x + e^y)^2}.$$

A vegyes parciális deriváltak tehát valóban egyenlők  $D_f$  minden pontjában.

*Megjegyzés:* Tekintsük a

$$g : (x, y) \mapsto \ln|x + e^y| \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x + e^y = 0\}$$

függvényt! Könnyen igazolható, hogy  $g$  parciális deriváltjai formailag azonosak  $f$  megfelelő parciálisaiival, de  $D_f \subset D_g$ , és  $D_f \neq D_g$  miatt  $f'_x = g'_x$  nem teljesül.  $(x_0, y_0) \in D_f$  esetén  $f'_x(x_0, y_0) = g'_x(x_0, y_0)$ .

13.

$$f : (x, y) \mapsto x^y \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$f'_x = yx^{y-1},$$

$$f'_y = x^y \ln x$$

$$f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$f''_{yx} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = yx^{y-1} + x^{y-1}.$$

$$14. f: (x, y) \mapsto \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$f'_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2},$$

$$f''_{xy} = \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f''_{yx} = \frac{-(x^2 + y^2) - (-x)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Tehát a vegyes parciális deriváltak  $D_f$  minden pontjában megegyeznek. (A parciális deriváltak értelmezési tartománya természetesen nem lehet  $D_f$ -nél bővebb halmaz. Bár látszatra csak az origóban nincsenek értelmezve, de ahol a függvény nem értelmezett, deriváltja sem lehet.)

15. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény esetében

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

$$f'_x = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f'_y = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

[ $f'_x(0, 0)$ , ill.  $f'_y(0, 0)$  értékét a 10. példához hasonlóan a definíció alapján számolhatjuk.]

Azt, hogy  $f, f'_x, f'_y$  az origóban folytonos, egyszerűen igazolhatjuk polárkoordinátákra való áttéréssel.

Ekkor ugyanis:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

a számlálóban viszont  $r$  magasabb hatványa szerepel, tehát a határérték valóban nulla.

A definíció szerint:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\left( \Delta y \frac{0 - (\Delta y)^2}{0 + (\Delta y)^2} + 0 \right) - 0}{\Delta y} = -1.$$

Hasonlóképpen

$$f''_{yx}(0, 0) = 1.$$

A vegyes másodrendű parciálisok értékei tehát az origóban különbözőek. Ennek oka az, hogy nem teljesülnek a tétel elégséges feltételei: a második parciális deriváltak nem folytonosak az origóban, ugyanis

$$f''_{xy} = \begin{cases} \frac{(x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{12xy^2(x^2 + y^2) - 16x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ -1, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Itt is polárkoordinátákra áttérve: a számláló megjelölt tagja  $r^5$  szerint, a nevező  $r^6$  szerint tart nullához, így  $f''_{xy}$  nem korlátos.

16. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \arctg \frac{x}{y} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

függvény kielégíti az

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

parciális differenciálegyenletet! (Síkbeli Laplace-egyenlet.)

E függvény elsőrendű parciális deriváltjait a 14. feladatban már meghatároztuk.

A tiszta másodrendű parciálisok:

$$f''_{xx} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tehát  $f$  valóban kielégíti az

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

egyenletet.

17. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$$

függvény kielégíti az

$$f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0$$

parciális differenciálegyenletet (Laplace-egyenlet).

$$f'_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x,$$

$$f''_{xx} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} 4x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3x^2 - (x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Mivel  $f$  szimmetrikus a három változójában  $f''_{yy}$  és  $f''_{zz}$  hasonló alakú.

Összegezve a tiszta másodrendű parciálisokat:

$$\frac{3x^2 - (x^2+y^2+z^2) + 3y^2 - (x^2+y^2+z^2) + 3z^2 - (x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Így  $f$  valóban kielégíti az egyenletet.

18. Igazolja, hogy az

$$f: (x, t) \mapsto A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

függvény ( $A, \omega, c$  állandók) eleget tesz az

$$f''_{xx} = \frac{1}{c^2} f''_{tt}$$

parciális differenciálegyenletnek (hullámeqyenlet)!

$$f'_x = A \left(-\frac{\omega}{c}\right) \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$f'_t = A \omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$f''_{xx} = -A \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$f''_{tt} = -A \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right).$$

*Megjegyzés:* Könnyen belátható, hogy bármilyen kétszer differenciálható  $f$  függvény, amelyre tetszőleges  $f(x, t) \in \mathbb{R}^2$  esetén teljesül az  $f(x, t) =$

$= \varphi \left(t - \frac{x}{c}\right)$  egyenlőség, eleget tesz a hullámeqyenletnek.

19. Határozza meg az  $f'''_{xyz}$  függvényt, ha

$$f: (x, y, z) \mapsto e^{xyz} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mivel a függvény is és parciális deriváltjai is folytonosak, így a deriválás sorrendje tetszőleges

$$f'_x = e^{xyz} yz,$$

$$f''_{xy} = e^{xyz} x y z^2 + e^{xyz} z = e^{xyz} (x y z^2 + z),$$

$$f'''_{xyz} = e^{xyz} x y (x y z^2 + z) + e^{xyz} (2 x y z + 1) = e^{xyz} (x^2 y^2 z^2 + 3 x y z + 1).$$

*Megjegyzés:* Várható, hogy  $f'''_{xyz}$  szimmetrikus három változójában, hiszen  $f$  is ilyen tulajdonságú volt.

20. Határozza meg a

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^m \partial y^n}$$

derivált függvényt, ha

$$f: (x, y) \mapsto (x-a)^m (y-b)^n \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mivel  $f$  is és parciálisai is folytonosak, így a deriválás sorrendje tetszőleges.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = m(x-a)^{m-1}(y-b)^n,$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = m!(y-b)^n,$$

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = m!n!.$$

21. Határozza meg a  $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$  függvényt, ha

$$f: (x, y) \mapsto x^4 \sin y + y^4 \cos x \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = x^4 \sin y + 4! \cos x,$$

és mivel  $\sin y$   $y$  szerinti negyedik deriváltja önmaga,

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} = 4! (\sin y + \cos x).$$

22. Igazolja, hogy az

$$f: (x, t) \mapsto \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

függvény, ahol  $a \neq 0$  állandó, kielégíti az

$$a^2 f''_{xx} = f'_t$$

parciális differenciálegyenletet (lineáris hővezetés egyenlete)!

$$f'_x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left( \frac{-2x}{4a^2 t} \right),$$

$$f''_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left( \frac{-2x}{4a^2 t} \right)^2 + e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left( -\frac{2}{4a^2 t} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left( \frac{x^2}{4a^2 t^2} + \frac{-1}{2t} \right).$$

$$f'_t = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left( -\frac{1}{2} \right) t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \frac{x^2}{4a^2 t^2} =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) t^{-1} + \frac{x^2}{4a^2 t^2} \right].$$

Tehát az  $f$  függvény valóban kielégíti a lineáris hővezetés differenciálegyenletét.

## 2. Teljes differenciál. Hibaszámítás

A parciális deriváltak a függvény megváltozását csak a felületből az  $y$ , ill.  $x$  tengelyre merőleges síkokkal kimetszett síkgörbék mentén jellemezték. E speciális síkgörbék esetében az egyik változó rögzített érték volt. Ahhoz, hogy a függvény megváltozását tetszőleges irányban vizsgálhassuk, definiálni kell a differenciálhatóságot és a teljes differenciál fogalmát.



Tekintsük az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$   $D_f \subset \mathbb{R}^2$  kétváltozós függvényt!

Legyen a  $P_0(x_0, y_0) \in D_f$  pont a  $D_f$  torlódási pontja,  $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D_f$  egy  $P_0$ -tól különböző pont, és

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

jelölje a függvény megváltozását.

Az  $f$  függvényt a  $P_0$  pontban *totálisan differenciálhatónak* nevezzük, ha léteznek olyan  $A_1, A_2$  valós számok, amelyekre

$$\left| \frac{\Delta f - A_1 \Delta x - A_2 \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \rightarrow 0,$$

ha a nevező nullához tart.

Tehát, ha  $f$  differenciálható a  $P_0$  pontban, akkor

$$\Delta f = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

ahol  $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$  nullához tart, ha a  $P$  ponttal  $P_0$ -hoz közeledünk; így  $f$  a  $P_0$  környezetében egy lineáris függvénnyel közelíthető.

A  $P_0$  pontbeli totális differenciálhatóságból már következik a parciális differenciálhányadosok létezése a  $P_0$ -ban, és az

$A_1 = f'_x(x_0, y_0)$ , ill.  $A_2 = f'_y(x_0, y_0)$  is fennáll. A parciális deriváltak létezése a  $P_0$  pontban azonban nem elégséges feltétele a totális differenciálhatóságnak. Elégséges — de nem szükséges — feltétele viszont a parciális deriváltak folytonossága az adott pontban.

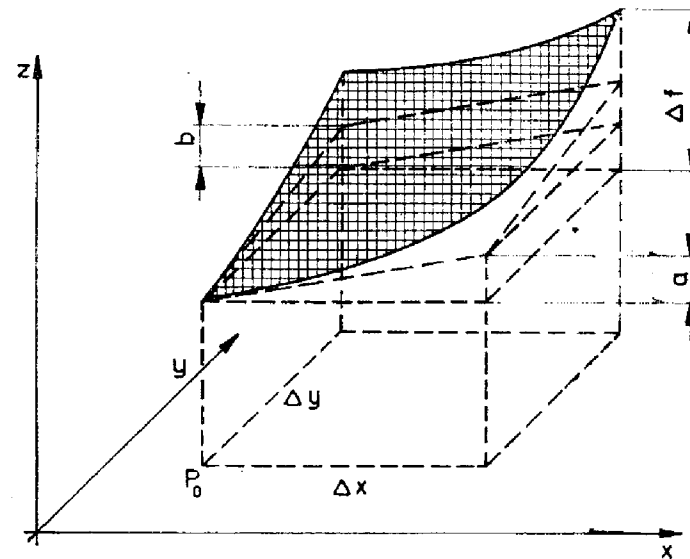
A  $P_0$  pontbeli differenciálhatóság egyben azt jelenti, hogy a  $z = f(x, y)$  felületnek az  $(x_0, y_0, z_0)$  pontban létezik érintősíkja. E kérdéssel bővebben a IV.3. szakaszban foglalkozunk.

A 26. ábrán az  $f$  felülethez a  $P_0$  pontban húzható érintősíkot láthatjuk, amelyet az  $x = x_0$ , ill.  $y = y_0$  síkok által a felületből kimetszett síkgörbék érintői határoznak meg.

Mivel ezek irántangensét a  $P_0$ -beli parciális deriváltak adják, így az ábra jelölései szerint:

$$a = f'_x(x_0, y_0) \Delta x,$$

$$b = f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$



26. ábra

és

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \approx a + b = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y.$$

Természetesen a közelítés annál pontosabb, minél kisebb a  $\overline{PP_0}$  távolság:

$$\overline{PP_0} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Az egyváltozós függvények differenciáljának megfelelően definiáljuk a kétváltozós függvény  $P_0$ -beli teljes differenciálját.

Ha a

$$g: x \rightarrow g(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény differenciálható az  $x_0$  helyen, akkor differenciálja:

$$dg = g'(x_0) dx.$$

E fogalmat általánosítva:

Ha  $f$  a  $P_0$  pontban differenciálható, akkor  $P_0$ -beli teljes differenciálja

$$df = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

azaz  $f$ -nek  $P_0$  pontbeli érintősíkjáig való megváltozása.

Tekintve, hogy az

$$f = x \quad (x, y) \in R^2$$

függvény esetén

$$df = dx = \Delta x,$$

így a teljes differenciál szokásos alakja:

$$df = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy.$$

Ha  $f$  a  $T \subset D_f$  tartomány minden pontjában differenciálható, akkor  $T$ -ben *differenciálhatónak* nevezzük, és differenciálja a

$$df: (x, y) \mapsto f'_x dx + f'_y dy \quad (x, y) \in T$$

függvény.

Hasonlóan értelmezhető három-, ill. többváltozós függvények differenciálhatósága is.

Sok esetben szükséges a következő kérdés eldöntése: Teljes differenciál-e a

$$\delta f = p dx + q dy$$

kifejezés, ahol  $p$  és  $q$  egy  $T \subset R^2$  tartományban differenciálható függvények. (A  $\delta$ -val jelezzük, hogy ez nem biztos.)

Annak feltétele, hogy  $\delta f$  teljes differenciál legyen, az, hogy

$$p'_x = q'_y$$

teljesüljön  $T$  minden pontjában. Ugyanis, ha teljes differenciál, akkor

$$f'_x = p \quad \text{és} \quad f'_y = q,$$

így a vegyes parciális deriváltak egyenlőségéből:

$$p'_y = f''_{xy} = f''_{yx} = q'_x$$

következik.

A teljes differenciál lényeges alkalmazási területe a *hiba-számítás*:

Minden mérés elvégzése egy névleges értéket ad (legyen ez  $x$ ), meghatározott hibakorláttal (legyen ez  $\Delta x$ ). A mért mennyiség valódi értéke tehát az  $[x - \Delta x; x + \Delta x]$  intervallumba esik.

Elnevezések:

$\Delta x$  abszolút hiba (korlát),

$x \neq 0$  esetén  $\frac{\Delta x}{x}$  relatív hiba (korlát),

$$\frac{\Delta x}{x} \cdot 100 \text{ százalékos hiba.}$$

$x, y$  mért értékeiből valamilyen  $f$  kétváltozós függvény értékét határozzuk meg. Mivel  $x$  és  $y$  nem pontos, így  $f(x, y)$  sem lesz az. Ha  $f$  totálisan differenciálható az  $(x, y)$  helyen, akkor abszolút hibája (hibakorlátja):

$$\Delta f = |f'_x(x, y)\Delta x| + |f'_y(x, y)\Delta y|.$$

(Megjegyzés: feltételezzük, hogy nem mind a két parciális derivált értéke nulla. Ekkor ugyanis  $\Delta f = 0$  adódna, ami hibakorlátra lehetetlen. Ezzel az esettel a III.5. szakaszban foglalkozunk.)

Az öröklött hiba meghatározásánál gyakran használhatók a következő szabályok:

1. Összeg és különbség hibája egyenlő a tagok hibájának összegével:

$$\Delta(f \pm g) = \Delta f + \Delta g.$$

2. Szorzat és hányados relatív hibája a tényezők relatív hibáinak összegével egyenlő (ha ezek léteznek):

$$\frac{\Delta(fg)}{fg} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g},$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\frac{f}{g}} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g}.$$

3. Hatvány relatív hibája az alap relatív hibájának és a kitevőnek a szorzata:

$$\frac{\Delta(f^a)}{f^a} = a \frac{\Delta f}{f} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

### Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény folytonos az origóban, léteznek a parciális deriváltak, de a függvény nem differenciálható az origóban!

a) A folytonosságot polárkoordináták segítségével könnyen beláthatjuk:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2} = 0 = f(0, 0).$$

b)

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

hiszen a számláló mindkét tagja nulla.

Hasonlóan

$$f'_y(0, 0) = 0,$$

$$f'_x: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Az a) alatti módszerrel könnyen igazolható, hogy  $f'_x$  nem folytonos az origóban.

c) Vizsgáljuk meg, hogy differenciálható-e az origóban!

$$\begin{aligned} \lim_{(0,0)} \frac{|f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \\ &= \lim_{(0,0)} \frac{\left| \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}. \end{aligned}$$

Szintén polárkoordinátákra áttérve, a következő határértéket kell vizsgálnunk:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 |\sin \varphi \cos^2 \varphi|}{r^3 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} |\sin \varphi \cos^2 \varphi|.$$

Ez a határérték viszont nem létezik, mivel  $\varphi$  értékétől nem független. Tehát a függvény nem differenciálható az origóban.

2. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} xy, & \text{ha } xy \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } xy \text{ irracionális} \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény differenciálható az origóban!

a) A függvény folytonos az origóban, mivel

$$|f| \leq |xy|,$$

$xy$  határértéke viszont itt nulla.

b) A parciális deriváltak értéke az origóban nulla, mivel mindkét tengelyen azonosan nulla a függvény értéke:

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0.$$

c) A differenciálhatósághoz a

$$\lim_{(0,0)} \frac{|\Delta x \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

egyenlőség teljesülése szükséges.

Ennek teljesülése polárkoordinátákra való áttéréssel azonnal látható. Vagy

más módon :

$$\frac{|\Delta x \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq \frac{|\Delta x \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + 0^2}} = \left| \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x} \right|,$$

ez utóbbi viszont az origóban nullához tart. A függvény tehát valóban differenciálható az origóban.

*Megjegyzés:* E függvény parciális deriváltjai nem folytonosak az origó környezetében (és másutt sem).

Legyen pl.  $P_0(x_0, y_0)$  olyan pont, melyre  $x_0$  és  $y_0$  racionális ( $x_0 y_0 \neq 0$ ). Ekkor

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \begin{cases} y_0, & \text{ha } \Delta x \text{ racionális} \\ -\frac{x_0 y_0}{\Delta x}, & \text{ha } \Delta x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

tehát e helyen az  $x$  szerinti parciális derivált nem létezik.

Az origóbeli differenciálhatósághoz tehát nem szükséges feltétel, hogy itt a parciális deriváltak folytonosak legyenek.

### 3. Legyen

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Határozza meg a  $z = f(x, y)$  felülethez a  $P_0(4; 3; 25)$  pontban húzható érintősík egyenletét!

A függvény differenciálható a  $P_0$  pontban, tehát létezik érintősík.

Meg kell határoznunk az érintősík normálvektorát. A 26. ábra szerinti két speciális görbe érintőinek irányvektorai:

$$v_1(1; 0; f'_x(x_0, y_0)),$$

$$v_2(0; 1; f'_y(x_0, y_0)).$$

Az érintősík normálvektora e két vektorra merőleges, tehát választható ezek vektoriális szorzatának:

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

A determináns értékét meghatározva:

$$n(-f'_x(x_0, y_0); -f'_y(x_0, y_0); 1);$$

esetünkben  $n(-8; -6; 1)$ , az érintősík egyenlete tehát:

$$-8(x-4) - 6(y-3) + z - 25 = 0,$$

azaz

$$8x + 6y - z = 15.$$

### 4. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{x^2}{y} \quad x \in \mathbb{R} \Delta y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

függvény esetén a lehetséges megváltozások pontos értékeit, ha

$$x_0 = y_0 = 100 \quad \text{és} \quad \Delta x = \Delta y = 1.$$

Határozza meg  $\Delta f$  közelítő értékét teljes differenciállal is, majd hasonlítsa össze a kapott eredményeket!

a) A lehetséges megváltozások:

$$\begin{aligned} f(101; 101) - f(100; 100) &= 1, \\ f(99; 99) - f(100; 100) &= -1, \\ f(101; 99) - f(100; 100) &= 3,04, \\ f(99; 101) - f(100; 100) &= -2,96. \end{aligned}$$

A maximális érték tehát:

$$\Delta f = 3,04 \approx 3,$$

b) Differenciálással megkeresve  $f$  hibakorlátját:

$$\begin{aligned} \Delta f &= |f'_x(x_0, y_0) \Delta x| + |f'_y(x_0, y_0) \Delta y| = \\ &= \left| \frac{2x_0}{y_0} \Delta x \right| + \left| \frac{-x_0^2}{y_0^2} \Delta y \right| = 3, \end{aligned}$$

tehát látható, hogy a két módon számított érték igen jó közelítéssel egybeesik.

Megjegyzés: A  $\Delta f$  értékét műveletek hibáira vonatkozó szabályok alapján is meghatározhatjuk:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = 0,03,$$

tehát  $\Delta f = f(x_0, y_0) \cdot 0,03 = 3$ .

5. Egy anyag törésmutatóját az

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

összefüggésből számoljuk.

Határozza meg  $n$  névleges értékét és hibáját, ha a mért adatok

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \text{ és a mérés pontossága mindkét szög esetén}$$

0,01 (radián)!

A névleges érték:

$$n = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1,22475,$$

a hibakorlát:

$$\begin{aligned} \Delta n &= |f'_\alpha(\alpha, \beta) \Delta \alpha| + |f'_\beta(\alpha, \beta) \Delta \beta| = \\ &= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ} \Delta \alpha + \left| -\frac{\sin 60^\circ \cos 45^\circ}{\sin^2 45^\circ} \Delta \beta \right| = 0,019, \end{aligned}$$

$n$  értékéből tehát maximálisan három tizedesjegyet érdemes figyelembe venni.

A törésmutató értéke így:

$$n = 1,225 \pm 0,019.$$

6. Ellenállások névleges értékei

$$R_1 = 150 \, \Omega, \quad R_2 = 500 \, \Omega.$$

Mindkét érték 2% pontosságú, azaz

$$\Delta R_1 = 3 \, \Omega, \quad \Delta R_2 = 10 \, \Omega.$$

Határozza meg soros, ill. párhuzamos kapcsolások esetén az eredő relatív hibáját!

a) Soros kapcsolás esetén a névleges érték:

$$R_s = R_1 + R_2 = 650 \, \Omega.$$

Mivel összeg hibája a tagok hibáinak összegével egyenlő, így:

$$\Delta R_s = 13 \, \Omega,$$

a relatív hiba pedig:

$$\frac{\Delta R_s}{R_s} = 0,02,$$

tehát az eredő ellenállás ugyancsak 2% pontosságú.

b) Párhuzamos kapcsolás esetén:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 115,4 \, \Omega,$$

$$\begin{aligned} \Delta R_p &= |f'_{R_1}(R_1, R_2) \Delta R_1| + |f'_{R_2}(R_1, R_2) \Delta R_2| = \\ &= \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_1 + \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_2, \end{aligned}$$

rendezve:

$$R_p = \frac{R_2^2 \Delta R_1 + R_1^2 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} = 2,3 \, \Omega.$$

A relatív hiba

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = 0,02,$$

tehát az eredő ellenállás most is 2% pontosságú. Lássuk be általánosan is, hogy ez nem véletlenül egyezik meg az összetevők pontosságával!

Alakítsuk át a  $\Delta R_p$ -re kapott alakot!

$$\Delta R_p = \frac{R_2^2 \Delta R_1 + R_1^2 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2 R_1 \frac{\Delta R_1}{R_1} + R_1^2 R_2 \frac{\Delta R_2}{R_2}}{(R_1 + R_2)^2};$$

ha

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2},$$

tehát  $R_1$  és  $R_2$  azonos pontosságú, akkor e közös tényezőt kiemelve:

$$\Delta R_p = \frac{\Delta R_1}{R_1} \cdot \frac{R_2 R_1 (R_2 + R_1)}{(R_2 + R_1)^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1} R_p,$$

így

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = \frac{\Delta R_1}{R_1}.$$

Azonos pontosságú elemekből tehát soros, ill. párhuzamos kapcsolásokkal ugyanakkora pontosságú eredőt kapunk.

## 7. Megmérjük egy derékszögű háromszög befogóit:

$$a = 80 \text{ m},$$

$$b = 60 \text{ m};$$

a mérés pontossága mindkét befogó esetén 1 m. Határozza meg az átfogó és a háromszög egyik hegyesszögének abszolút, ill. relatív hibáját! (Feltéve, hogy a derékszög pontosan  $90^\circ$ .)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a \in R^+, b \in R^+,$$

$$\Delta c = |c'_a(a, b) \Delta a| + |c'_b(a, b) \Delta b| =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Delta a + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Delta b = 1,4 \text{ m},$$

$$\frac{\Delta c}{c} = 0,014.$$

*Megjegyzés:* Ugyanezt kapjuk, ha a

$$c^2 = a^2 + b^2$$

implicit függvény (I. III.4.) differenciálját képezzük:

$$2c \Delta c = 2a \Delta a + 2b \Delta b,$$

ebből

$$\Delta c = \frac{1}{c} (a \Delta a + b \Delta b) = 1,4 \text{ m},$$

ami az előzővel megegyezik.

$$\alpha = \arctg \frac{a}{b} \quad a \in R^+, b \in R^+,$$

$$\Delta \alpha = |\alpha'_a(a, b) \Delta a| + |\alpha'_b(a, b) \Delta b| =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{b} \Delta a + \frac{a}{b^2} \Delta b \right) = 0,014,$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 0,0151.$$

*Megjegyzés:*

$$A \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

implicit függvény differenciálját képezve:

$$\left| \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Delta \alpha \right| = \left| \frac{\Delta a}{b} \right| + \left| \frac{a}{b^2} \Delta b \right|,$$

$$\Delta \alpha = \cos^2 \alpha \left( \frac{\Delta a}{b} + \frac{a \Delta b}{b^2} \right) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \left( \frac{\Delta a}{b} + \frac{a \Delta b}{b^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left( \frac{\Delta a}{b} + \frac{a \Delta b}{b^2} \right).$$

Az eredmény tehát az előzővel megegyezik.

8. Matematikai inga hosszát és lengésidejét mérésel állapítjuk meg. A mért adatokból számoljuk ki  $g$  névleges értékét és hibakorlátját!

Az adatok:

$$\begin{aligned} T &= 1 \text{ s} & \Delta T &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \\ l &= 0,99 \text{ m} & \Delta l &= 10^{-3} \text{ m}. \end{aligned}$$

Mivel

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2} = 9,77 \text{ m/s}^2,$$

$g$  relatív hibáját a műveletek hibáira vonatkozó összefüggések segítségével számítjuk ki:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta l}{l} = 10^{-3} + \frac{10^{-3}}{0,99} \approx 2 \cdot 10^{-3},$$

ahonnan

$$\Delta g = 9,77(2 \cdot 10^{-3}) = 1,95 \cdot 10^{-3} \approx 0,02 \text{ m/s}^2,$$

tehát  $g$  értékét 2‰ pontossággal tudjuk megállapítani.

9. Határozza meg az

$$u = \frac{x^3}{\sqrt[3]{y}\sqrt{z}} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$$

függvény relatív hibáját, ha

$$\frac{\Delta x}{x} = 0,02; \quad \frac{\Delta y}{y} = 0,04; \quad \frac{\Delta z}{z} = 0,03.$$

Melyik változó pontosabb mérése csökkentené lényegesen  $u$  relatív hibáját?

A műveletek hibáira vonatkozó összefüggések alapján:

$$\frac{\Delta u}{u} = 3 \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{y} + \frac{1}{3} \frac{\Delta z}{z},$$

$$\frac{\Delta u}{u} = 0,09.$$

$\frac{\Delta u}{u}$  alakjából látszik, hogy  $x$  relatív hibájának csökkentésével érhető el

$\frac{\Delta u}{u}$  lényeges csökkenése.

10. Téglatest éleit mérésel állapítjuk meg.

A mért értékek:

$$a = 50 \text{ cm}; \quad b = 30 \text{ cm}; \quad c = 40 \text{ cm}.$$

Az adatok hibakorlátai:

$$a = 1 \text{ cm}; \quad b = 0,5 \text{ cm}; \quad c = 0,5 \text{ cm}.$$

Határozza meg a felszín és a térfogat hibakorlátját!

A névleges értékek:

$$A = 2ab + 2ac + 2bc = 9400 \text{ cm}^2,$$

$$V = abc = 60\,000 \text{ cm}^3.$$

A felszín abszolút hibája:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \left| \frac{\partial A}{\partial a} \Delta a \right| + \left| \frac{\partial A}{\partial b} \Delta b \right| + \left| \frac{\partial A}{\partial c} \Delta c \right| = \\ &= 2(b+c)\Delta a + 2(a+c)\Delta b + 2(a+b)\Delta c, \\ \Delta A &= 310 \text{ cm}^2, \end{aligned}$$

tehát

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{310}{9400} = 0,033 = 3,3\%.$$

A térfogat esetében célszerűbb először a relatív hibát meghatározni:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} = 0,049 = 4,9\%$$

Innen az abszolút hiba értéke:

$$V = V \cdot 0,049 = 2940 \text{ cm}^3.$$



11. Egy henger sugara és magassága:

$$M=20 \text{ cm}, \quad R=15 \text{ cm}.$$

Mennyivel csökkentjük a henger sugarát, hogy a felszíne lehetőleg ne változzék, ha a magassága  $\Delta M=1$  cm-rel növekszik?

$$A=2R^2\pi+2R\pi M,$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= A'_R(R, M)\Delta R + A'_M(R, M)\Delta M = \\ &= (4R\pi + 2\pi M)\Delta R + 2R\pi\Delta M. \end{aligned}$$

A feladat feltételei miatt  $\Delta A=0$ , amiből következik, hogy

$$\Delta R = -\frac{R\Delta M}{2R+M} = -0,3 \text{ cm}.$$

(A felszín nem pontosan egyezik meg az eredetivel, de változása  $M$  és  $R$  változásánál jóval kisebb.)

12. Tekintsük a következő differenciálható függvényt:

$$i_a = i_a(U_a, U_g) \quad U_a \in R^+, \quad U_g \in R^+.$$

Hogyan változtassuk  $U_a$  változásától függően  $U_g$  értékét, hogy  $i_a$  változatlan maradjon?

(A feladatban a trióda rácsfeszültsége, anódfeszültsége, anódárama változásai közötti összefüggést keressük.)

$$\Delta i_a = \frac{\partial i_a}{\partial U_a} \Delta U_a + \frac{\partial i_a}{\partial U_g} \Delta U_g = 0.$$

Ezt átalakítva (feltéve, hogy  $\Delta U_g \neq 0$ )

$$\frac{\partial i_a}{\partial U_g} = -\frac{\partial i_a}{\partial U_a} \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g} \approx -\frac{\partial i_a}{\partial U_a} \cdot \frac{\partial U_a}{\partial U_g}.$$

Megjegyzés: Ez az ún. Barkhausen-egyenlet. A parciális deriváltak fizikai tartalma:

$$\frac{\partial i_a}{\partial U_g} = s$$

áthatás,

$$\frac{\partial i_a}{\partial U_a} = \frac{1}{r_b},$$

ahol  $r_b$  a belső ellenállás,

$$-\frac{\partial U_a}{\partial U_g} = \mu$$

erősítés.

13. Teljes differenciál-e az alábbi kifejezés?

$$\begin{aligned} df &= (3x^2 e^{\frac{\sin y}{x}} - x e^{\frac{\sin y}{x}} \sin y) dx + \\ &+ x^2 e^{\frac{\sin y}{x}} \cos y dy \quad x \in R \setminus \{0\}, y \in R. \end{aligned}$$

$$A \, df = P \, dx + Q \, dy \quad (x, y) \in D_P \cap D_Q$$

akkor és csak akkor teljes differenciál, ha

$$P'_y = Q'_x \quad \forall (x, y) \in D_P \cap D_Q$$

esetén, feltéve, hogy  $P'_y$  és  $Q'_x$  léteznek.

A feladatban

$$P = e^{\frac{\sin y}{x}} (3x^2 - x \sin y),$$

$$Q = x^2 e^{\frac{\sin y}{x}} \cos y.$$

$$P'_y = e^{\frac{\sin y}{x}} \frac{\cos y}{x} (3x^2 - x \sin y) - e^{\frac{\sin y}{x}} x \cos y = e^{\frac{\sin y}{x}} (2x - \sin y) \cos y,$$

$$Q'_x = 2x e^{\frac{\sin y}{x}} \cos y + x^2 e^{\frac{\sin y}{x}} \left( \frac{-\sin y}{x^2} \right) \cos y =$$

$$= e^{\frac{\sin y}{x}} (2x - \sin y) \cos y,$$

azaz az értelmezési tartomány minden pontjában  $P'_y = Q'_x$ , tehát a kifejezés teljes differenciál.

*Megjegyzés:* Az  $f$  függvény meghatározásával a VII.1-ben foglalkozunk.

14. Teljes differenciál-e az alábbi kifejezés:

$$\delta f = (2x \sin y - 6x) dx + (x^2 \sin y + x + 6) dy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2?$$

E feladatnál

$$P = 2x \sin y - 6x,$$

$$Q = x^2 \sin y + x + 6.$$

$$P'_y = 2x \cos y; \quad Q'_x = 2x \sin y.$$

Tehát

$$P'_y \neq Q'_x,$$

ezért nem teljes differenciál.

15. Határozza meg a

$$\varphi : y \mapsto \varphi(y) \quad y \in \mathbb{R}$$

függvényt úgy, hogy a

$$\delta f = \varphi(y) \sin y e^{x^2-x} (2x-1) dx + 2\varphi(y) e^{x^2-x} \cos y dy$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

teljes differenciál legyen!

$$P = \varphi(y) \sin y e^{x^2-x} (2x-1),$$

$$Q = 2\varphi(y) e^{x^2-x} \cos y,$$

$$P'_y = \varphi'(y) e^{x^2-x} (2x-1) \sin y + \varphi(y) (2x-1) e^{x^2-x} \cos y,$$

$$Q'_x = 2\varphi(y) e^{x^2-x} (2x-1) \cos y.$$

A  $P'_y = Q'_x$  egyenlőség mindkét oldalát osztjuk  $e^{x^2-x} \neq 0$ -val, és rendezzük a kifejezést, így azt kapjuk, hogy

$$\varphi'(y) \sin y (2x-1) = \varphi(y) \cos y (2x-1).$$

(Mivel a két oldal azonosan egyenlő, tehát nemcsak  $x = \frac{1}{2}$  esetén):

$$\varphi'(y) \sin y = \varphi(y) \cos y.$$

Feltételezve, hogy

$$\varphi(y) \neq 0,$$

és

$$\sin y \neq 0,$$

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{\cos y}{\sin y},$$

azaz:

$$\ln |\varphi(y)| = \ln |\sin y| = \ln c \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

Tehát:

$$\varphi : y \mapsto c \sin y \quad y \in \mathbb{R},$$

amelyről helyettesítéssel látható, hogy  $y = k\pi$  esetén is megoldása az egyenletnek.

*Megjegyzés:* A kapott kifejezés az

$$f = c \sin^2 y e^{x^2-x} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény teljes differenciálja, ugyanis helyettesítés után

$$df = c \sin^2 y e^{x^2-x} (2x-1) dx + 2c \sin y \cos y e^{x^2-x} dy.$$

16. Határozza meg a

$$\varphi : x \mapsto \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényt úgy, hogy

$$\delta g = \frac{2xy\varphi(x)}{1+ye^{x^2}} dx + \frac{\varphi(x)}{1+ye^{x^2}} dy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$$

teljes differenciál legyen!

A feladatban

$$P = \frac{2xy\varphi(x)}{1+ye^{x^2}}; \quad Q = \frac{\varphi(x)}{1+ye^{x^2}}.$$

Ahhoz, hogy  $\delta g$  teljes differenciál legyen, a  $P'_y = Q'_x$  azonosságnak kell teljesülnie  $D_g$  minden pontjában;

$$P'_y = 2x\varphi(x) \frac{(1+ye^{x^2}) - ye^{x^2}}{(1+ye^{x^2})^2} = \frac{2x\varphi(x)}{(1+ye^{x^2})^2},$$

$$Q'_x = \frac{\varphi'(x)(1+ye^{x^2}) - \varphi(x)2xye^{x^2}}{(1+ye^{x^2})^2}.$$

A kettő egyenlőségéből:

$$\varphi'(x)(1+ye^{x^2}) = \varphi(x)2xye^{x^2} + 2x\varphi(x) = 2x\varphi(x)(1+ye^{x^2})$$

adódik, amiből

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 2x$$

és így

$$\ln |\varphi(x)| = x^2 + \ln c$$

következik. Vagyis:

$$\varphi: x \mapsto \varphi(x) = ce^{x^2} \quad x \in \mathbb{R},$$

amelyet az eredeti feladatba helyettesítve a

$$dg = \frac{2xyce^{x^2}}{1+ye^{x^2}} dx + \frac{ce^{x^2}}{1+ye^{x^2}} dy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$$

kifejezést kapjuk, ami a

$$g = c \ln(1+ye^{x^2}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$$

függvény teljes differenciálja.

### 3. A többváltozós összetett függvények deriválása

Többváltozós függvények körében az összetett függvény előállítására többféle lehetőség nyílik. Először az általános esetet definiáljuk, itt vizsgáljuk a differenciálhatóságot, majd külön-külön tárgyalunk néhány speciális esetet.

a) Adott  $n$  számú  $m$ -változós függvény, értelmezési tartományaik közös részét jelölje  $D \subset \mathbb{R}^m$ :

$$\varphi_i: D \rightarrow \mathbb{R} \quad i=1, \dots, n,$$

továbbá egy

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad D_f \subset \mathbb{R}^n$$

$n$ -változós függvény, amelynek értelmezési tartománya minden  $P(x_1, \dots, x_m) \in D$  esetén tartalmazza a  $Q(\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P))$  pontokat. Ekkor értelmezhető a

$$g = f \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n): (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m))$$

összetett függvény, amelynek értelmezési tartománya  $D \subset \mathbb{R}_m$ . Továbbá, ha a  $\varphi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) függvények totálisan differenciálhatók egy  $P_0(x_1, \dots, x_m) \in D$  pontban, akkor az előzőekben értelmezett  $g$  is totálisan differenciálható a  $P$  pontban, és parciális deriváltjai:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|_P = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial y_i} \right|_Q \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right|_P \quad k=1, \dots, m.$$

**Megjegyzés:** a mondott feltételek  $g$  differenciálhatóságának elégséges, de nem szükséges feltételei. Nézzünk néhány speciális esetet!

b) Legyen

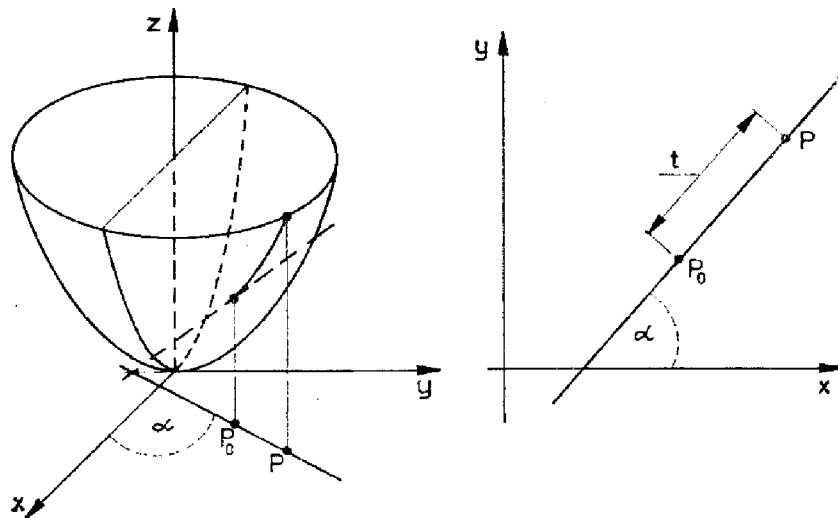
$$\begin{aligned} f: D_f &\rightarrow \mathbb{R}, & D_f &\subset \mathbb{R} \text{ egyváltozós,} \\ \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R}, & D &\subset \mathbb{R}^2 \text{ pedig kétváltozós függvény.} \end{aligned}$$

Ekkor, ha  $D_f$  tartalmazza a  $\varphi(x, y)$  pontokat minden  $(x, y) \in D$  esetén, és teljesülnek a differenciálhatóságra vonatkozó a)-ban tett kikötések, akkor:

$$dg = d(f \circ \varphi) = (x, y) \mapsto (f' \circ \varphi) d\varphi \quad (x, y) \in D.$$

c) Legyenek

$$\begin{aligned} \varphi_i: D &\rightarrow \mathbb{R} & D &\subset \mathbb{R} & i=1, 2 \text{ egyváltozós,} \\ f: D_f &\rightarrow \mathbb{R} & D_f &\subset \mathbb{R}^2 \text{ pedig kétváltozós függvények.} \end{aligned}$$



27. ábra

Ha az a)-beli kikötések teljesülnek:

$$dg|_{t_0} = d(f \circ (\varphi_1, \varphi_2))|_{t_0} =$$

$$= f'_x(\varphi_1(t_0); \varphi_2(t_0)) \varphi'_1(t_0) dt +$$

$$+ f'_y(\varphi_1(t_0); \varphi_2(t_0)) \varphi'_2(t_0) dt \quad t_0 \in D.$$

d) Legyenek

$$\varphi_i: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2 \quad i=1, 2$$

és

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad D_f \subset \mathbb{R}^2 \text{ kétváltozós függvények.}$$

Az a)-beli feltételek teljesülése esetén:

$$g = f \circ (\varphi_1, \varphi_2): D \rightarrow \mathbb{R} \text{ kétváltozós függvény differenciálható}$$

és:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \quad (u, v) \in D.$$

A parciális deriváltak:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_P = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_Q \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right|_P + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_Q \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right|_P,$$

ahol  $P(u, v) \in D$  és  $Q(\varphi_1(u, v); \varphi_2(u, v)) \in D_f$ . (Hasonlóan írható fel a  $v$  szerinti parciális derivált is.)

e) Vizsgáljuk meg c) egy speciális esetét! Legyen adott az

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad D_f \subset \mathbb{R}^2$$

kétváltozós függvény és egy rögzített  $P_0(x_0, y_0) \in D_f$  pont, továbbá legyen

$$x: t \mapsto x_0 + t \cos \alpha \quad t \in \mathbb{R},$$

$$y: t \mapsto y_0 + t \sin \alpha \quad t \in \mathbb{R},$$

azaz haladjunk a rögzített  $P_0$  pontból egy egyenes mentén, és vizsgáljuk  $f$  változási sebességét! (A  $t$  paraméter abszolút értéke a  $\overline{PP_0}$  távolság.) (27. ábra)

Ha létezik a

$$g = f \circ (x, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény  $t$  szerinti deriváltja, akkor ezt az  $f$  függvény  $P_0$  pontbeli *iránymenti deriváltjának* nevezzük:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{P_0} = f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha.$$

Az iránymenti derivált jelölésére a  $\frac{df}{dx}$ , ill.  $\frac{df}{de}$  jelölés is használatos, amellyel azt hangsúlyozzuk, hogy a deriválást az  $e$  vektor irányában végezzük. Ha  $f$  differenciálható a  $P_0$  pontban, akkor az iránymenti derivált tetszőleges  $\alpha$  érték mellett létezik. A  $P_0$  pontbeli parciális deriváltak speciálisan az  $\alpha=0$ , ill.  $\alpha=\frac{\pi}{2}$  irányhoz tartozó iránymenti deriváltak, ezek létezéséhez nem szükséges az  $f$   $P_0$ -beli differenciálhatósága.

### Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$f: u \mapsto \sqrt{u} \quad u \in \mathbb{R}^+$$

és

$$\varphi: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Határozza meg a  $g=f \circ \varphi$  függvény teljes differenciálját!

$$dg = (f' \circ \varphi) d\varphi|_{(x,y)} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} (2x dx + 2y dy) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

2. Legyen

$$f: (x,y) \mapsto x^3 + y^2 - 6x \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

és

$$\begin{aligned} \varphi_1: t &\mapsto 3 \operatorname{ch} t & t \in \mathbb{R} \\ \varphi_2: t &\mapsto 5 \operatorname{sh} t & t \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

határozza meg a  $g=f \circ (\varphi_1, \varphi_2)$  függvény deriváltját!

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= f'_x \circ (\varphi_1, \varphi_2) \varphi'_1 + f'_y \circ (\varphi_1, \varphi_2) \cdot \varphi'_2 = \\ &= (3(3 \operatorname{ch} t)^2 - 6) 3 \operatorname{sh} t + 2(5 \operatorname{sh} t) \cdot 5 \operatorname{ch} t = \\ &= (27 \operatorname{ch}^2 t - 6) 3 \operatorname{sh} t + 50 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \\ &= \operatorname{sh} t (81 \operatorname{ch}^2 t + 50 \operatorname{ch} t - 18). \end{aligned}$$

Határozzuk meg  $g'$  értékét más úton is! A helyettesítést elvégezve:

$$\begin{aligned} g: t &\mapsto 27 \operatorname{ch}^3 t + 25 \operatorname{sh}^2 t - 18 \operatorname{ch} t & t \in \mathbb{R}, \\ g'_y t &\mapsto 81 \operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t + 50 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - 18 \operatorname{sh} t = \\ &= \operatorname{sh} t (81 \operatorname{ch}^2 t + 50 \operatorname{ch} t - 18), \end{aligned}$$

ami az előzővel megegyezik.

*Megjegyzés:* A kapott eredmény úgy értelmezhető, hogy vizsgáljuk  $f$  változási sebességét az

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$$

hiperbolán elmozdulva.

3. Határozza meg  $g$  deriváltját, ha

$$\begin{aligned} f: (x,y) &\mapsto x^2 e^{\frac{x}{y}} & x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \varphi_1: t &\mapsto \ln(1+t^4) & t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\varphi_2: t \mapsto (t^2+1)^3 \quad t \in \mathbb{R},$$

és

$$g = f \circ (\varphi_1, \varphi_2).$$

Mivel  $\varphi_2(t) > 0$  minden  $t$  esetén, és  $f, \varphi_1, \varphi_2$  az értelmezési tartományaik minden pontjában differenciálhatók, így  $g$  is differenciálható minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén:

$$g' = f'_x \circ (\varphi_1, \varphi_2) \varphi'_1 + f'_y \circ (\varphi_1, \varphi_2) \varphi'_2,$$

$$f'_x = 2xe^{\frac{x}{y}} + x^2 e^{\frac{x}{y}} \frac{x}{y} = xe^{\frac{x}{y}} \left( 2 + \frac{x}{y} \right),$$

$$f'_y = x^2 e^{\frac{x}{y}} \left( \frac{-x}{y^2} \right) = -\frac{x^3}{y^2} e^{\frac{x}{y}},$$

$$\varphi'_1 = \frac{4t^3}{1+t^4}, \quad \varphi'_2 = 3(t^2+1)^2 2t.$$

A  $g'$  képletébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g' &= e^{\frac{\ln(1+t^4)}{(1+t^2)^3}} \ln(1+t^4) \left( 2 + \frac{\ln(1+t^4)}{(1+t^2)^3} \right) \frac{4t^3}{1+t^4} - \\ &\quad - \frac{\ln^3(1+t^4)}{(1+t^2)^6} e^{\frac{\ln(1+t^4)}{(1+t^2)^3}} \cdot 6t \left( \frac{t^2+t}{t} \right)^2 \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* Ha elvégezzük a helyettesítést és a kapott függvényt közvetlenül deriváljuk  $t$  szerint, természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk.

4. Legyen

$$\varphi_1 = \varphi_2: t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } t \text{ racionális} \\ -1 & \text{ha } t \text{ irracionális} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

továbbá

$$f: (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{ha } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x^4 + y^4 = 0 \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Határozza meg  $g'(0)$  értékét, ha

$$g = f \circ (\varphi_1, \varphi_2).$$

$\varphi_1$  és  $\varphi_2$  sehol sem folytonosak,  $f$  az origóban nem folytonos, így a differenciálhatóságra kimondott elégséges feltételek nem teljesülnek.  $g'(0)$  létezése egyben azt mutatja, hogy ezek a feltételek nem szükségesek.

Ha a helyettesítést elvégezzük, akkor azt kapjuk, hogy

$$g: t \mapsto 1 \quad t \in \mathbb{R},$$

amelynek deriváltja azonosan nulla, tehát  $g'(0) = 0$ .

5. Határozza meg  $g$  parciális deriváltjait, ha

$$g = f \circ (\varphi_1, \varphi_2),$$

ahol:

$$\begin{aligned} f: (x, y) &\mapsto xye^{x+y} & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \varphi_1: (u, v) &\mapsto \operatorname{tg}(u^2 + v^2), \\ & (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \mid \cos(u^2 + v^2) = 0\}, \\ \varphi_2: (u, v) &\mapsto u \sin v & (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \\ &= (ye^{x+y}(1+x)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}) \frac{2u}{\cos^2(u^2 + v^2)} + \\ &+ (xe^{x+y}(1+y)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}) \sin v = \\ &= e^{u \sin v + \operatorname{tg}(u^2 + v^2)} \left\{ [1 + \operatorname{tg}(u^2 + v^2)] u \sin v \frac{2u}{\cos^2(u^2 + v^2)} + \right. \\ &\left. + \sin v (1 + u \sin v) \operatorname{tg}(u^2 + v^2) \right\}. \end{aligned}$$

Hasonlóan a  $v$  szerinti parciális derivált:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \\ &= (ye^{x+y}(1+x)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}) \frac{2v}{\cos^2(u^2 + v^2)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (xe^{x+y}(1+y)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}) u \cos v = \\ &= e^{\operatorname{tg}(u^2 + v^2) + u \sin v} \left\{ [1 + \operatorname{tg}(u^2 + v^2)] u \sin v \frac{2v}{\cos^2(u^2 + v^2)} + \right. \\ &\left. + [1 + u \sin v] \operatorname{tg}(u^2 + v^2) u \cos v \right\}. \end{aligned}$$

(Ugyanerre az eredményre juthattunk volna a helyettesítés elvégzése után kapott függvény  $u$ , ill.  $v$  szerinti deriválásával is.)

6. Igazolja, hogy ha a

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható, akkor:

$$yh'_x = xh'_y,$$

ahol  $h = g(x^2 + y^2)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint:

$$h'_x = 2xg'(u),$$

$$h'_y = 2yg'(u),$$

így a  $h$  függvény valóban eleget tesz a felírt parciális differenciálegyenletnek.

*Megjegyzés:* Az  $f: x \mapsto f(x)$   $x \in D_f$  függvény grafikonjának  $z = f(x)$ -nek  $z$  tengely körüli forgatásakor keletkező felület a  $z = f(x^2 + y^2)$  függvény grafikonja.

7. Igazolja, hogy ha  $g_1$  és  $g_2$  differenciálható egyváltozós függvények, akkor

$$h''_{xx} - 2h''_{xy} + h''_{yy} = 0,$$

ahol  $h = xg_1(x+y) + yg_2(x-y)$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$h'_x = g_1 + xg'_1 + yg'_2,$$

$$h''_{xx} = 2g'_1 + xg''_1 + yg''_2,$$

$$h'_y = xg'_1 + g_2 + yg'_2,$$

$$h''_{yy} = xg''_1 + 2g'_2 + yg''_2,$$

$$h''_{xy} = g'_1 + xg''_1 + g'_2 + yg''_2.$$

Behelyettesítve a parciális differenciálegyenletbe:

$$(2g'_1 + xg''_1 + yg''_2) - 2(g'_1 + g'_2 + xg''_1 + yg''_2) + (xg''_1 + yg''_2 + 2g'_2) = 0,$$

tehát  $h$ -ra valóban teljesül az egyenlet.

8. Fejezzük ki az

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad D_f \subset \mathbb{R}^2$$

függvény parciális deriváltjait polárkoordinátákkal!

A polártranszformáció egyenletrendszere:

$$x = r \cos \varphi \quad r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0; 0\},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

(Az origó esetén  $\varphi$ -t nem értelmezzük, de azt kizártuk.)

Értelmezzük a  $g$  függvényt a következőképpen:

$$g(r, \varphi) = f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) \quad r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right],$$

ekkor:

$$f'_x = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

és hasonlóan

$$f'_y = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Először külön meghatározzuk az  $r$  és  $\varphi$  függvények  $x$ , ill.  $y$  szerinti parciálisait:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( \frac{-y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

(Látjuk, hogy az origó kizárása lényeges volt; az  $y$  tengely origótól különböző pontjai esetén viszont parciálisaira a fenti értékeket kapjuk. Ezt külön nem igazoljuk.)

Ennek alapján:

$$f'_x = \frac{\partial g}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi,$$

$$f'_y = \frac{\partial g}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cos \varphi.$$

9. Írjuk fel a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

síkbeli Laplace-egyenlet polárkoordinátákban kifejezett alakját!

A megoldáshoz felhasználjuk az előző feladat eredményeit.  
A  $g$  függvényt a 9. feladatban már értelmeztük. Ezzel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \frac{1}{r} \sin \varphi = \\ &= \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi \partial r} \sin \varphi \cos \varphi \right) - \\ &\quad - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial g}{\partial r} \sin^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi \right),\end{aligned}$$

hasonlóan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \sin \varphi + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{r} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi \partial r} \sin \varphi \cos \varphi \right) + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial g}{\partial r} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right) \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

A két eredmény összegzéséből

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi).\end{aligned}$$

Végeredményben tehát:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}.$$

*Megjegyzés:* Ez az átalakítás olyan parciális differenciálegyenletek megoldásakor hasznos, amelyekben a peremfeltételek hengerszimmetrikusak.

10. Mely irányokban létezik az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény iránymenti deriváltja az origóban?

Az iránymenti derivált definíciója alapján azt kell vizsgálnunk, hogy  $\alpha$  milyen értékeire létezik az alábbi határérték:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t},$$

hol  $x_0 = 0, y_0 = 0$ .

a A

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 \cos \alpha \sin \alpha}{t^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{t}$$

határérték csak akkor létezik, ha

$$\sin 2\alpha = 0, \text{ azaz, ha } \alpha = k \frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Ez azt jelenti, hogy az iránymenti derivált csak a tengelyek irányában létezik, ezek pedig a parciális deriváltak. Az iránymenti deriváltak tehát bizonyos irányokra létezhetnek anélkül, hogy a függvény differenciálható lenne.

11. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto (x - y)^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény iránymenti deriváltját a  $P_0(2; 3)$  pontban az  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  irányban!

$f$  minden pontban, így a  $P_0$  pontban is differenciálható, tehát létezik az iránymenti deriváltja:



$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{P_0} = f'_x(2; 3) \cos \alpha + f'_y(2; 3) \sin \alpha,$$

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{P_0} = 2(-1) \cos \frac{\pi}{3} + (-2)(-1) \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - 1.$$

12. Határozza meg, mely irány esetén nulla az

$$f: (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy + e^y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény iránymenti deriváltja a  $P_0(2; 0)$  pontban!

Mivel  $f$  az  $\mathbb{R}^2$  minden pontjában differenciálható, így a  $P_0$  pontban tetszőleges  $\alpha$  esetén létezik az iránymenti derivált:

$$f'_x(2; 0) = (3x^2 - 3y)|_{P_0} = 12,$$

$$f'_y(2; 0) = (3y^2 - 3x + e^y)|_{P_0} = -5.$$

Az iránymenti derivált:

$$\frac{df}{d\alpha} = 12 \cos \alpha - 5 \sin \alpha = 0,$$

amiből

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5} = 2,4,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2,4 + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

13. Határozza meg, mely irány(ok) esetén maximális az előző feladatban szereplő függvény  $P_0$  pontbeli iránymenti deriváltja!

Az előző feladatban láttuk, hogy az iránymenti derivált a  $P_0$  pontban:

$$g: \alpha \mapsto 12 \cos \alpha - 5 \sin \alpha \quad \alpha \in [0; 2\pi]$$

Ennek azon értékei esetén lehet maximuma, melyekre deriváltja nullával egyenlő:

$$g'(\alpha) = -12 \sin \alpha - 5 \cos \alpha = 0.$$

Ebből:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}.$$

Szélsőérték tehát az

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( -\frac{5}{12} \right) + k\pi \quad (k = 1, 2)$$

irányokban lehet.

Valóban maximuma van  $g$ -nek, ha ezen a helyen a második derivált értéke negatív:  $k = 2$  esetén

$$g'' = -12 \cos \alpha + 5 \sin \alpha,$$

$$g' \left( \operatorname{arctg} \frac{-5}{12} + 2\pi \right) = g'' \left( \operatorname{arctg} \left( -\frac{5}{12} \right) \right) = \frac{-12 - 5 \frac{5}{12}}{\sqrt{1 + \left( -\frac{5}{12} \right)^2}} < 0.$$

Tehát az  $\alpha = \operatorname{arctg} \left( -\frac{5}{12} \right)$  helyen maximum van. Ez az irány az előző feladatban kapott irányra merőleges. Azt, hogy ez általánosan is igaz, a gradiens-vektor értelmezésénél mutatjuk meg. (Megjegyzés:  $k = 1$  esetén  $g$ -nek minimuma van.)

14. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{25x^2y}{x^2 + y^3} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^3 = 0\}$$

függvény iránymenti deriváltját a  $P_0(2, 1)$  pontban az  $x + 3y = 5$  egyenes irányvektora irányában!

Az egyenes irányvektora:

$$v(-3; 1),$$

a  $v$  irányába mutató egységvektor:

$$e_v \left( -\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}} \right),$$

tehát  $\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 25 \cdot \frac{2xy(x^2+y^3) - x^2y2x}{(x^2+y^3)^2}; \quad f'_x(2; 1) = 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 25 \cdot \frac{x^2(x^2+y^3) - x^2y3y^2}{(x^2+y^3)^2}; \quad f'_y(2; 1) = 8,$$

tehát az iránymenti derivált értéke a  $P_0$  pontban:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{P_0} = 4 \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} + 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{4}{\sqrt{10}} = -\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

15. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 e^y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény iránymenti deriváltját a  $P_0(2; 0)$  pontban, az  $a(3; 4)$  vektorra merőleges irányokban!

Az  $a$ -ra merőleges vektorok:  $b(-4; 3)$  és  $c(4; -3)$ . Egységvektoraik:

$$e_b \left( -\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right), \text{ tehát } \cos \beta = -\frac{4}{5}; \sin \beta = \frac{3}{5},$$

$$e_c \left( \frac{4}{5}; -\frac{3}{5} \right), \text{ tehát } \cos \gamma = \frac{4}{5}; \sin \gamma = -\frac{3}{5}.$$

A parciális deriváltak értéke a  $P_0$  pontban:

$$f'_x(2; 0) = 4, \quad f'_y(2; 0) = 4,$$

$$\left. \frac{df}{d\beta} \right|_{P_0} = -\frac{4}{5},$$

$$\left. \frac{df}{d\gamma} \right|_{P_0} = \frac{4}{5},$$

ami természetesen nem véletlen, hiszen  $\gamma = \pi + \beta$  és  $\cos(\pi + \beta) = -\cos \beta$ , valamint  $\sin(\pi + \beta) = -\sin \beta$ .

16. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

forgási paraboloid  $P_0(3; 1)$  pontjában az iránymenti derivált értékét a felület  $P_0$  ponton áthaladó szintvonalának  $P_0$ -beli érintője irányában!

A szintvonal az  $xy$  síkkal párhuzamos síkban fekszik, tehát érintője is párhuzamos az  $xy$  síkkal, így az iránymenti derivált értéke nulla lesz (l. a 12. feladat megjegyzését!).

Ellenőrizzük számítással!

A szintvonal egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 10.$$

(28. ábra).

Az  $OP_0(3; 1)$ , egy rá merőleges vektor a  $(-1; 3)$ , így az egységvektor

$$e_a \left( -\frac{1}{10}; \frac{3}{10} \right);$$

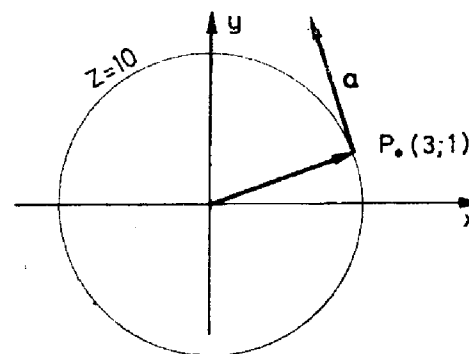
$$f'_x(3; 1) = 6,$$

$$f'_y(3; 1) = 2,$$

tehát az iránymenti derivált értéke:

$$\frac{df}{d\alpha} = 6 \cdot \left( -\frac{1}{10} \right) + 2 \cdot \frac{3}{10} = 0,$$

amint azt vártuk.



28. ábra

#### 4. Implicit függvények és deriválásuk

Síkgörbék megadhatók az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel is.

Legyen például

$$F: (x, y) \mapsto y - x^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

akkor az  $F(x, y) = y - x^2 = 0$  egyenletet kielégítő  $(x, y)$  koordinátájú pontok halmaza a síkon egy parabola. Ez a parabola az

$$x \mapsto x^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény grafikonjával azonos.

Általában is érdemes vizsgálni azt a kérdést, milyen feltételek teljesülése esetén létezik olyan

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad D_f \subset \mathbb{R}$$

egyváltozós függvény, amelyre teljesül, hogy

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{minden } x \in D_f \text{ esetén.}$$

Szemléletesen: az  $F(x, y) = 0$  egyenlet annak a síkgörbének az egyenlete, amelyet a  $z := F(x, y)$  egyenletű felületből a  $z = 0$  sík metsz ki. Természetesen megtörténhet, hogy nincs metszészvonal, vagy több metszészvonal van.

Például a

$$z = x^2 + y^2 + 25 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

felületnél nincs metszészvonal (hiszen  $z \geq 25$ ). Láttuk, hogy a

$$z = x^2 - y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

felület esetén a metszészvonal az  $y = x$ , ill.  $y = -x$  egyenes. Igazolható, hogy ha  $F$ -re egy  $(x_0, y_0) \in D_f$  esetén teljesülnek a következő feltételek:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0, \\ F \text{ az } (x_0, y_0) \text{ környezetében folytonos,} \end{aligned}$$

$F'_y$  létezik és nemnulla az  $(x_0, y_0)$  pont egy környezetében, akkor van az  $x_0$ -nak olyan  $D_f$  környezete, amelyben egyetlen olyan

$$x \mapsto f(x) \quad x \in D_f$$

függvény létezik, amelyre  $f(x_0) = y_0$  és

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{minden } x \in D_f \text{-re.}$$

Továbbá, ha  $F$  differenciálható a  $P_0$  pontban, akkor  $y$  is differenciálható az  $x_0$  helyen és:

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Hasonlóan az  $F(x, y, z) = 0$  egyenlet bizonyos esetekben egy  $z := z(x, y)$  felületet definiál, amely egy háromváltozós függvény szintfelületének tekinthető (I. II.2.!). E kétváltozós implicit függvény létezésére és egyértelműségére az előbbihez hasonló feltételek teljesülése szükséges. A parciális deriváltak:

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

$$z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Könnyű megmutatni, hogy amennyiben az implicit módon definiált függvények léteznek, a deriváltjaikat valóban így kell meghatározni.

Vizsgáljuk meg ezt az egyváltozós esetben!

Tegyük fel, hogy  $F$ -re teljesülnek az implicit függvény létezésének elégséges feltételei az  $(x_0, y_0)$  pontban, továbbá, hogy  $f$  is differenciálható az  $x_0$  pontban. Ekkor a közvetett függvény differenciálási szabálya szerint:

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0)f'(x_0) = 0,$$

ahonnan

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

A parciális deriváltak általában ismét kétváltozós függvények, így, ha az előzőekben említett feltételek teljesülnek, tovább folytathatjuk a differenciálást, meghatározhatjuk  $y''$  értékét is.

Differenciáljuk  $x$  szerint az előbb kapott

$$F'_x + F'_y y' = 0$$

egyenletet!

$$F''_{xx} + F''_{xy} y' + (F''_{xy} + F''_{yx} y') y' + F''_{yy} y'^2 + F'_y y'' = 0,$$

a második derivált:

$$y'' = - \frac{F''_{xx} + 2F''_{xy} y' + F''_{yy} y'^2}{F'_y}.$$

Hasonlóan számíthatók ki kétváltozós függvény esetén is a magasabb rendű parciális deriváltak.

### Gyakorló feladatok

1. Határozza meg  $y'$  értékét a  $P_0(2; 4)$  pontban, ha

$$x^y = y^x.$$

Legyen

$$F: (x, y) \mapsto x^y - y^x \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A  $P_0(2; 4)$  pont a görbe egy pontja, mivel  $2^4 = 4^2$ . E pontban  $F'_y \neq 0$ , így e pont környezetében létezik egy olyan függvény, amelyre  $F(x, y) = 0$ .

Deriváltja:

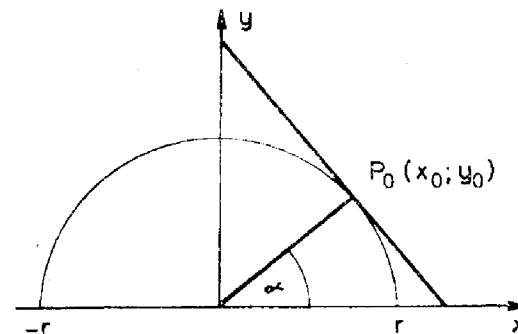
$$y' = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

Felhasználva, hogy  $x^y = y^x$ ,

$$y' = - \frac{\frac{yx^{y-1}}{x^y} - \frac{y^x \ln y}{y^x}}{\frac{x^y \ln x}{x^y} - \frac{xy^{x-1}}{y^x}} = - \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}.$$

$$y'(2) = \frac{2 - \ln 4}{\frac{1}{2} - \ln 2}.$$

2. Állapítsa meg, milyen feltételek mellett határoz meg az  $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  egyenlet egy differenciálható függvényt és adja meg a deriváltját!



29. ábra

A feladatban egy origó középpontú  $r$  sugarú kör egyenlete szerepel. Ha  $y > 0$ , akkor az egyenlet egyértelműen definiálja az

$$y: x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2} \quad x \in (-r, r)$$

függvényt (29. ábra).

E félkör  $P_0(x_0, y_0)$  pontbeli érintője merőleges az adott pontba húzott sugárra, amelynek iránytangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0},$$

így az érintő iránytangense:

$$-\frac{x_0}{y_0} = y'(x_0).$$

Természetesen ugyanezt kapjuk implicit függvényként való deriválással:

$$y' = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{x}{y}.$$

3. Határozza meg  $y'$  értékét, ha  $x_0 = y_0 \neq 0$  és  $F(x_0, y_0) = 0$ , ahol  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ .

A feladatban

$$F: (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3axy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\},$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Mivel  $x_0 = y_0$ , így  $y'(x_0) = -1$ . [Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a  $P_0\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$  pont kielégíti az egyenletet, és  $a \neq 0$  esetben teljesülnek a deriválhatóságra vonatkozó kikötések, hiszen ekkor  $y^2 - ax \neq 0$ .]

4. Határozza meg, mely pontokban nulla az előző feladatbeli

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

egyenlettel definiált  $y$  függvény deriváltja!

Az előző feladatból:

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \quad y^2 \neq ax.$$

Ha  $y' = 0$ , akkor  $ay - x^2 = 0$ , tehát  $y = \frac{x^2}{a}$ . Ezt az értéket az eredeti egyenletbe helyettesítve:

$$x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3ax \frac{x^2}{a} = 0,$$

vagyis

$$x^3 \left(1 + \frac{x^3}{a^3} - 3\right) = 0,$$

amely egyenlet gyökei:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = a\sqrt[3]{2}.$$

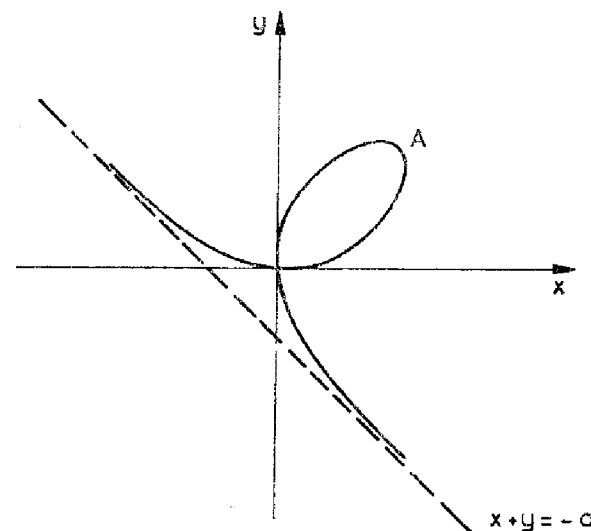
Az  $x_1 = 0$  esetben:  $y_1 = 0$ , így  $F'_y = 0$ , tehát az implicit függvény létezésére ki-mondott tétel kikötései nem teljesülnek. (Speciálisan, ha  $a = 0$ , akkor az egyenlet az  $y = -x$  függvényt határozza meg, amelynek origóbeli deriváltja nemnulla.)

$$x_2 = a\sqrt[3]{2} \text{ esetben } y_2 = a\sqrt[3]{4}$$

és

$$y_2^2 \neq ax_2, \text{ így e helyen } y' = 0.$$

Megjegyzés: A 3. és a 4. feladatban szereplő impliciten adott függvény képe, az ún. Descartes-féle levél. ( $a \neq 0$  esetben l. a 30. ábrát!)



30. ábra

E görbe paraméteres alakban is megadható:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}; \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Amint a grafikomból látható is, igazolható, hogy az origó kivételével a görbe minden pontjának van olyan környezete, amelyben egyetlen olyan

$$x \mapsto y(x) \quad x \in D_y$$

függvény van, amely kielégíti az egyenletet. Az origóban a koordinátaten-

gelyek érintik a görbét. Mivel a görbe szimmetrikus az  $y=x$  egyenesre, így az

$A\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$  pontbeli érintője erre merőleges.

5. Határozza meg  $y'$  értékét a  $P_0\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  pontban, ha

$$F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$$

A  $P_0$  pont koordinátái kielégítik az egyenletet:

$$F'_x = \sin y,$$

$$F'_y = x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y \quad \text{és} \quad F'_y\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \neq 0,$$

így az egyenlet  $P_0$  környezetében egy függvényt határoz meg.

$$y' = \frac{-\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y},$$

$$y'(1) = -1.$$

*Megjegyzés:* Ha  $\sin y \neq 0$ , akkor az  $F(x, y) = 0$  egyenlet egyértelműen meghatároz egy  $x \mapsto x(y)$  függvényt, amelyre

$$x \mapsto \frac{\cos y - \cos 2y}{\sin y} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid \sin y = 0\}.$$

Deriváltja:

$$\left(\frac{\cos y - \cos 2y}{\sin y}\right)' = \frac{(-\sin y + 2 \sin 2y) \sin y - (\cos y - \cos 2y) \cos y}{\sin^2 y}.$$

Ennek értéke az  $y = \frac{\pi}{2}$  helyen:  $-1$ , amint az várható volt, hiszen az előző függvény inverzének deriváltját számítottuk ki, ami a most kapott érték reciproka.

6. Határozza meg

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{P_0}$$

értékét, ha

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$$

és

$$P_0(-1; 1; 0).$$

$$F: (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 - 3z \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

A bevezetőben láttuk, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{-3x^2}{3z^2 - 3} = \frac{x^2}{1 - z^2},$$

hasonlóan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{3y^2}{3z^2 - 3} = \frac{y^2}{1 - z^2}.$$

Mivel  $F$  mindenütt folytonos és differenciálható,

$$F'_z(-1; 1; 0) \neq 0,$$

így  $z'_x$ , ill.  $z'_y$  létezik a  $P_0$  pontban.

A keresett másodrendű parciális derivált:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z'_y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{2zx^2y^2}{(1 - z^2)^3},$$

amelynek az értéke a  $P_0$  pontban

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{P_0} = 0.$$

7. Igazolja, hogy létezik olyan  $y: x \mapsto y(x)$   $x \in D_f \subset \mathbb{R}$  függvény, amely az origó környezetében egyértelmű megoldása a

$$2ye^x - xe^y = 0$$

egyenletnek!

Az origó koordinátái kielégítik az egyenletet;

$$F: (x, y) \mapsto 2ye^x - xe^y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

mindenütt folytonos és differenciálható;

$$F'_y = 2e^x - xe^y$$

folytos és az origóban nullától különbözik.

Így valóban létezik olyan  $y$  függvény, amely az origó környezetében egyértelmű megoldása az

$$F(x, y) = 0 \text{ egyenletnek.}$$

Deriváltja:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2ye^x - e^y}{2e^x - xe^y} \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

8. Legyen  $z$  az a  $D_z \rightarrow R$ ,  $D_z \subset R^2$  típusú függvény, amelynek értékét minden alkalmas  $(x, y) \in R^2$ -re az

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$$

egyenlet definiálja.

Igazolja, hogy  $e$  függvény másodrendű vegyes parciális deriváltjai egyenlők!

Legyen

$$F: (x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5, \quad (x, y, z) \in R^3.$$

Ekkor a

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-2x-4}{2z+2} = \frac{2-x}{1+z},$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-4y}{2z+2} = \frac{2y}{1+z}$$

parciálisok minden olyan pontban léteznek, amelyre

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{és} \quad z_0 \neq -1.$$

(A  $z_0 = -1$  eset azt jelenti, hogy a fenti egyenletet mint  $z$ -re vonatkozó másodfokú egyenletet megoldva a diszkrimináns értéke nulla, így a deriváláskor nullával kellene osztanunk.)

A másodrendű vegyes parciálisok:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z'_y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{-2y}{(1+z)^2} = \frac{2-x}{1+z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z'_x}{\partial y} = -\frac{2-x}{(1+z)^2} \cdot \frac{2y}{1+z},$$

valóban egyenlők.

9. Határozza meg az

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

egyenlettel definiált  $z$  függvény teljes differenciálját! (Tegyük fel, hogy  $F$  differenciálható és  $F'_z \neq 0$ .)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{F'_x}{F'_z} dx - \frac{F'_y}{F'_z} dy,$$

amit átalakítva és rendezve:

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$$

Utóbbit megkapjuk, ha az  $F: D_F \rightarrow R$ ,  $D_F \subset R^3$  háromváltozós függvény teljes differenciálját írjuk fel. Ez indokolja a hibaszámításnál látozott alkalmazásokat: implicit alakból is meghatározható a teljes differenciál.

10. A hibaszámításnál láttuk, hogy az adott függvényt implicit függvénynek tekintve sokszor egyszerűbben juthatunk eredményhez.

Lássunk erre egy feladatot!

Határozzuk meg az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

egyenletből a gyökök relatív hibáját, ha

$$a = 1 \quad \Delta a = 0,05,$$

$$b = -4 \quad \Delta b = 0,1,$$

$$c = -5 \quad \Delta c = 0,1.$$

A megoldandó egyenlet

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \text{ ahonnan } x_1 = 5; x_2 = -1.$$

Legyen

$$F(a, b, c, x(a, b, c)) = ax^2 + bx + c.$$

$F$  teljes differenciálja:

$$F'_a \Delta a + F'_b \Delta b + F'_c \Delta c + F'_x \Delta x = 0.$$

A parciálisokat meghatározva, majd rendezve:

$$x^2 \Delta a + x \Delta b + \Delta c + \Delta x(2ax + b) = 0,$$

$$\Delta x = \left| -\frac{x^2 \Delta a + x \Delta b + \Delta c}{2ax + b} \right|,$$

ahonnan

$$\Delta x_1 = \frac{25 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,1 + 0,1}{10 - 4} = 0,32,$$

$$\Delta x_2 = \left| \frac{(-1)^2 \cdot 0,05 + 0,1 + 0,1}{-2 - 4} \right| = 0,042,$$

tehát a relatív hibák:

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} = 0,064, \quad \frac{\Delta x_2}{x_2} = 0,042.$$

Megjegyzés: A  $2ax + b = 0$  esetben  $x = -\frac{b}{2a}$ , vagyis ekkor  $x_1 = x_2$ .

Ekkor a  $\Delta x$  csak a műveletek hibáira vonatkozó szabályok alapján határozható meg.

11. Igazolja, hogy az

$$\frac{e^{axy}}{axy} - e^{ax} = 0 \quad (a > 0 \text{ állandó})$$

egyenlettel definiált  $y: x \mapsto y(x)$   $x \in \mathbb{R}^+$  függvénynek az

$$x_0 = \frac{e-1}{a}, \quad y_0 = \frac{e}{e-1}$$

pontban szélsőértéke van!

Legyen

$$F: (x, y) \mapsto \frac{e^{axy}}{axy} - e^{ax}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}.$$

Ekkor

$F(x_0, y_0) = 0$ , tehát  $P_0$  a görbén van,

és

$$F'_x = \frac{aye^{axy}axy - ae^{axy}}{a^2x^2y^2} - ae^{ax} = e^{axy} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{axy^2} \right) - ae^{ax},$$

$$\begin{aligned} F'_x|_{P_0} &= e^{\frac{e-1}{a}} \cdot \frac{e}{e-1} \left( \frac{a}{e-1} - \frac{a^2(e-1)}{a(e-1)^2e} \right) - ae^{\frac{e-1}{a}} = \\ &= e^e \left( \frac{a}{e-1} - \frac{a}{e(e-1)} \right) - ae^{e-1} = e^e \frac{ae-a}{e(e-1)} - ae^{e-1} = e^e \frac{a}{e} - ae^{e-1} = 0, \end{aligned}$$

$$F'_y = \frac{e^{axy}axaxy - e^{axy}ax}{a^2x^2y^2} = e^{axy} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{axy^2} \right),$$

$$\begin{aligned} F'_y|_{P_0} &= e^{\frac{e-1}{a}} \cdot \frac{e}{e-1} \left( \frac{e-1}{e} - \frac{a(e-1)^2}{a(e-1)e^2} \right) = e^e \left( \frac{e-1}{e} - \frac{e-1}{e^2} \right) = \\ &= e^{e-2}(e-1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Mivel

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

így  $y'(x_0)$  létezik és

$$y'(x_0) = 0.$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele tehát teljesül.

Be kell még látni, hogy  $y''(x_0) \neq 0$ .

A bevezetőben láttuk, hogy

$$y'' = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2}{F'_y}.$$

Mivel a  $P_0$  pontban  $y' = 0$ , így csak  $F''_{xx}|_{P_0}$  értékét kell meghatároznunk:



$$F''_{xx} = e^{axy} \left[ ay \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{ax^2y} \right) + \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{ax^3y} \right) \right] - a^2 e^{ax} =$$

$$= e^{axy} \frac{(axy-1)^2 + 1}{ax^3y} - a^2 e^{ax},$$

$$F''_{xx}|_{P_0} = e^{\frac{a}{e-1} \cdot \frac{e}{e-1}} \frac{\left( a \frac{e-1}{a} \cdot \frac{e}{e-1} - 1 \right)^2 + 1}{a \left( \frac{e-1}{a} \right)^3 \cdot \frac{e}{e-1}} = \frac{e^{e-1} a^2}{(e-1)^2} > 0,$$

tehát  $y''(x_0) < 0$ , így a függvénynek az adott pontban maximuma van.

*Megjegyzés:* Ha az eredeti egyenletet átalakítjuk, rövidebben adódik ugyanez az eredmény:

$$\frac{e^{axy}}{axy} = e^{ax},$$

mivel  $(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$ , vehetjük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát:

$$axy - \ln a - \ln x - \ln y = ax.$$

Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton, így a függvénynek ugyanott van szélsőértéke, mint ahol az eredeti függvénynek.

Tehát:

$$F := axy - \ln a - \ln x - \ln y - ax \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{+2},$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{ay - \frac{1}{x} - a}{ax - \frac{1}{y}},$$

$$y'(x_0) = -\frac{a \frac{e}{e-1} - \frac{a}{e-1} - a}{a \frac{e-1}{a} - \frac{e-1}{e}} = 0.$$

A nevező:  $\frac{(e-1)^2}{e} > 0.$

Az előzőhöz hasonlóan a második derivált adott pontbeli értékének meghatározásához csak  $F''_{xx}|_{P_0}$  szükséges.

$$F''_{xx}|_{P_0} = \frac{1}{x_0^2} > 0,$$

tehát  $y''(x_0) < 0$ , így a függvénynek az adott pontban maximuma van.

E megoldásból az is látszik, hogy több szélsőérték hely nem lehet,

ugyanis, ha  $y' = 0$ , akkor  $ay - \frac{1}{x} - a = 0$ . Így

$$x = \frac{1}{a(y-1)},$$

amelyet behelyettesítve az

$$axy - \ln a - \ln x - \ln y = ax$$

egyenletbe, átalakítások után

$$\ln(y-1) - \ln y + 1 = 0$$

adódik, amiből pedig

$$y = \frac{e}{e-1}.$$

12. Legyen  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható egyváltozós függvény, továbbá

$$z : D_z \rightarrow \mathbb{R} \quad D_z \subset \mathbb{R}^2$$

olyan kétváltozós függvény, amelyet a

$$z = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$$

egyenlet definiál. (Feltesszük, hogy  $(x, y) \in D_z$  esetén  $\frac{z}{y} \in D$ .)

Igazoljuk, hogy a kétváltozós függvény megoldása az

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

differenciálegyenletnek!

Jelölje a  $z - x\varphi\left(\frac{z}{y}\right) = 0$  egyenlet bal oldalán álló függvényt  $F$ , vagyis

$$F := z - x\varphi\left(\frac{z}{y}\right) \quad D_F \subset \mathbb{R}^3.$$

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{és} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

az  $F'_z \neq 0$  feltétel teljesülése esetén az igazolásra váró egyenlőség az

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = 0$$

egyenlettel ekvivalens.

$$F'_x = -\varphi\left(\frac{z}{y}\right),$$

$$F'_y = -x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\left(-\frac{z}{y^2}\right),$$

$$F'_z = 1 - x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}.$$

(Mivel  $\varphi$  egyváltozós függvény, helyes a  $\varphi'$  jelölés.) Behelyettesítve:

$$z - x\varphi\left(\frac{z}{y}\right) + \frac{xz}{y}\varphi'\left(\frac{z}{y}\right) - \frac{xz}{y}\varphi'\left(\frac{z}{y}\right) = -x\varphi\left(\frac{z}{y}\right) + z = 0,$$

hiszen ebből indultunk ki!

A fenti implicit függvény tehát valóban megoldása a parciális differenciálegyenletnek, amely a kúpfelületek jellemző egyenlete.

13. Legyen  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható egyváltozós függvény, továbbá

$$z : D_z \rightarrow \mathbb{R} \quad D_z \subset \mathbb{R}^2$$

olyan kétváltozós függvény, amelyet az

$$x - az = \varphi(y - bz)$$

egyenlet definiál. (Feltesszük, hogy  $(x, y) \in D_z$  esetén  $y - bz \in D$ .)

Igazoljuk, hogy e kétváltozós függvény megoldása az

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

differenciálegyenletnek!

Az előző feladathoz hasonlóan legyen

$$F := \varphi(y - bz) - x + az \quad D_F \subset \mathbb{R}^3.$$

Ekkor az igazolandó egyenlőség ( $F'_z \neq 0$  esetén)

$$aF'_x + bF'_y + F'_z = 0.$$

$F$  parciálisai:

$$F'_x = -1; \quad F'_y = \varphi'(y - bz); \quad F'_z = -b\varphi'(y - bz) + a.$$

( $\varphi'$ -vel jelöltük a  $\varphi$  egyváltozós függvény deriváltját.)

Helyettesítéssel:

$$-a + b\varphi'(y - bz) - b\varphi'(y - bz) + a = 0.$$

A  $z$  függvény tehát valóban megoldása a parciális differenciálegyenletnek, a hengerfelületek jellemző egyenleteinek.

## 5. A kétváltozós függvények Taylor-sora

Ismert, hogy bármely, egy  $P_0$  pont környezetében  $n+1$ -szer differenciálható egyváltozós függvényt e pont környezetében elég pontosan közelíthetünk egy  $n$ -edfokú polinommal: a függvény Taylor-polinomjával. Ennek általánosításaként értelmezzük a kétváltozós függvény Taylor-polinomját.

Ha az

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2$$

kétváltozós függvény a  $P_0(x_0, y_0)$  és a  $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  pontokban, valamint a  $\overline{P_0 P}$  szakasz pontjaiban értelmezett, és a pontokban a függvény  $(n+1)$ -ed és ennél alacsonyabb rendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, akkor itt  $f$  a  $\Delta x$  és  $\Delta y$   $n$ -edfokú polinomjával közelíthető.

Tekintsük ugyanis a következő egyváltozós függvényt:

$$h: t \mapsto f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \quad t \in [0; 1].$$

Az  $f$ -re tett kikötések teljesülése esetén  $h$   $n+1$ -szer differenciálható, így a 0 helyhez tartozó Taylor-polinomja a maradéktaggal:

$$h: t \mapsto h(0) + \frac{h'(0)}{1!} t + \frac{h''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{h^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} t^{n+1} \quad t \in [0; 1],$$

ahol  $0 < \xi < t$ .

Az összetett függvény differenciálási szabálya (I. III.3.c) miatt:

$$h'(0) = f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y,$$

$$h''(0) = f''_{xx}(x_0; y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0; y_0)(\Delta y)^2.$$

(Felhasználtuk, hogy  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$  a parciálisok folytonossága miatt.)

Formálisan  $h''$  a következőképpen írható:

$$h'' = \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f$$

Hasonlóan írható fel a  $h$  függvény  $n$ -edik deriváltja is:

$$h^{(n)}(0) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f|_{P_0}.$$

Figyelembe véve még, hogy:

$$h(1) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y),$$

$h$  Taylor-polinomjából adódik az  $f$  kétváltozós függvény  $n$ -edfokú Taylor-polinomja a maradéktaggal:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) &= \\ &= f(x_0; y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f|_{P_0} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{n+1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f|_{P_1},$$

ahol  $P_1 = \overline{P_0 P}$  szakasz pontja.

Ha  $f$  tetszőlegesen sokszor differenciálható a  $P_0$  pont előbbi környezetében, akkor  $f$  Taylor-sora a  $P_0$  pontban:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f|_{P_0}. \end{aligned}$$

### Gyakorló feladatok

1. Írja fel az

$$f: (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

függvény  $P_0(0; 0)$  helyhez tartozó Taylor-sorának néhány tagját!

A feladat megoldásánál alkalmazzuk az egyváltozós függvények köréből ismert binomiális sort:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots; \quad z \in (-1; 1),$$

esetünkben:

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = [1 + (-x^2 - y^2)]^{\frac{1}{2}},$$

tehát  $f$  Taylor-sora:

$$\begin{aligned} (x, y) \mapsto 1 + \frac{1}{2}(-x^2 - y^2) + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) (-x^2 - y^2)^2 + \dots = \\ = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^3 \dots \end{aligned}$$

Mivel az értelmezési tartomány pontjaiban  $x^2 + y^2 \leq 1$ , így a sor az egységsugarú kör lap határpontjai kivételével előállítja a függvényt.

2. Írja fel az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{(1-x)(3-y)} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

függvény origóhoz tartozó Taylor-sorának néhány tagját!

Ismert, hogy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{ha } |x| < 1 \text{ (geometriai sor),}$$

hasonlóan:

$$\frac{1}{3-y} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{y}{3}} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{y}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{y^3}{27} + \dots \right),$$

ha  $|y| < 3$ .

Ha az  $|x| < 1$  és  $|y| < 3$  feltételek teljesülése esetén képezzük a két végtelen sor Cauchy-szorzatát, amely az abszolút konvergencia miatt átrendezhető, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \left( 1 + x + \frac{y}{3} + x^2 + \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} + x^3 + \frac{x^2y}{3} + \frac{xy^2}{9} + \frac{y^3}{27} + \dots \right) = \\ = \frac{1}{3} + \frac{x}{3} + \frac{y}{9} + \frac{x^2}{3} + \frac{xy}{9} + \frac{y^2}{27} + \dots, \end{aligned}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1, y \in \mathbb{R} \mid |y| < 3\}.$$

A sor tehát csak az  $|x| < 1$  és  $|y| < 3$  feltételek teljesülése esetén állítja elő az  $f$  függvényt.

3. Határozzuk meg  $f$  abszolút hibáját, ha

$$f: (x, y, z) \mapsto \cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$$

és

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

valamint

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1.$$

A függvény minden elsőrendű parciálisa az origóban nulla, hiszen  $\sin 0 = 0$ . Mivel azonban hibakorlát nem lehet nulla, így a feladat egyenértékű azzal, hogy  $f$  Taylor-sorának első el nem tűnő tagját kell megkeresnünk. Felhasználva, hogy

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \quad t \in \mathbb{R},$$

tehát:

$$\cos(x+y+z) = 1 - \frac{(x+y+z)^2}{2!} + \frac{(x+y+z)^4}{4!} - \dots$$

Hasonlóan:

$$\cos x \cos y \cos z = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right).$$

Mindkét tagból csak a legfeljebb másodfokú tagokat figyelembe véve (az abszolút konvergencia miatt a sor átrendezhető):

$$\begin{aligned} \cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z = \\ = 1 - \frac{(x+y+z)^2}{2!} + \dots - \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right) + \dots \right] = \\ = -(xy + yz + xz) + \dots, \end{aligned}$$

tehát  $\Delta f = 0,03$ .

4. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{\cos x}{\cos y} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mid \cos y \neq 0$$

függvény origóhoz tartozó Taylor-polinomjának legfeljebb másodfokú tagjait!

$\cos x$  és  $\cos y$  origóhoz tartozó Taylor-sorából egyaránt csak az első két tagot vesszük figyelembe, és a nevezőt geometriai sorral közelítjük:

$$\frac{1 - \frac{x^2}{2!}}{1 - \frac{y^2}{2!}} = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} \right) \left[ 1 + \frac{y^2}{2!} + \left( \frac{y^2}{2!} \right)^2 + \dots \right] = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \dots$$

**Megjegyzés:** Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha meghatározzuk az első- és másodrendű parciálisok értékét az origóban, s ezek segítségével írjuk fel a Taylor-polinomot.

Ugyanis:

$$f'_x = -\frac{\sin x}{\cos y}; \quad f'_x(0; 0) = 0,$$

$$f'_y = \frac{\sin y \cos x}{\cos^2 y}; \quad f'_y(0; 0) = 0,$$

$$f''_{xx} = -\frac{\cos x}{\cos y}; \quad f''_{xx}(0; 0) = -1,$$

$$f''_{xy} = -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}; \quad f''_{xy}(0; 0) = 0,$$

$$f''_{yy} = \cos x \frac{\cos^3 y + 2 \sin^2 y \cos y}{\cos^4 y}; \quad f''_{yy}(0; 0) = 1.$$

Innen:

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{y^2}{2!} \dots$$

Ha további tagokat akarunk meghatározni  $f$  Taylor-sorából, akkor a deriválás folytatása helyett egy másik módszer célravezetőbb.

Írjuk fel  $\cos x$  és  $\cos y$  sorának néhány tagját, és végezzük el a kijelölt osztást a legalacsonyabb kitevőjű tagokkal kezdve!

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \dots\right) : \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \dots\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \dots$$

$$\frac{-\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} \dots\right)}{-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{y^4}{24} - \frac{x^6}{720} \dots}$$

$$\frac{-\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^2 y^4}{48} \dots\right)}{\frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^2 y^4}{48} \dots}$$

$$\frac{-\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{48} - \dots\right)}{\frac{x^4}{24} + \frac{5y^4}{24} - \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^6}{720} \dots}$$

Az osztást a fenti módon folytatva  $f$  Taylor-sorának negyedfokú tagjai:

$$\frac{x^4}{24} + \frac{5y^4}{24} - \frac{x^2 y^2}{4}.$$

(Ha még további tagok is szükségesek, akkor  $\cos x$  és  $\cos y$  sorának magasabb rendű tagját is figyelembe kell vennünk!)

5. Igazolja, hogy ha  $A > a$  és  $B > b > 0$ , akkor

$$\frac{A+a}{B+b} = \frac{A}{B} \left(1 + \frac{a}{A} - \frac{b}{B} - \frac{ab}{AB} + \frac{b^2}{B^2} + \dots\right).$$

$$\frac{A+a}{B+b} = \frac{A}{B} \left(1 + \frac{a}{A}\right) \frac{1}{1 + \frac{b}{B}}.$$

Mivel  $\left|\frac{b}{B}\right| < 1$ , így az utolsó tényező:

$$\frac{1}{1 + \frac{b}{B}} = 1 - \frac{b}{B} + \frac{b^2}{B^2} - \dots \quad (\text{geometriai sor}).$$

Ezt figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{A+a}{B+b} &= \frac{A}{B} \left(1 + \frac{a}{A}\right) \left(1 - \frac{b}{B} + \frac{b^2}{B^2} - \dots\right) = \\ &= \frac{A}{B} \left(1 + \frac{a}{A} - \frac{b}{B} - \frac{ab}{AB} + \frac{b^2}{B^2} \dots\right), \end{aligned}$$

amivel állításunkat igazoltuk.

## 6. A kétváltozós függvények szélsőértéke, feltételes szélsőérték

A  $P_0$  pontot az  $f$  kétváltozós függvény *lokális maximum- (minimum-) helyének* nevezzük, ha  $P_0$ -nak van olyan környezete, amelyben  $f(P_0)$ -nál nagyobb (kisebb) függvényérték nincs.

A  $P_0$  pont az  $f$  *abszolút maximum-, ill. minimumhelye*, ha  $f(P_0) > f(P)$  (ill.  $f(P_0) < f(P)$ ) minden  $P \in D_f, P \neq P_0$  esetén. Ha az  $f$  kétváltozós függvénynek a  $P_0(x_0, y_0)$  pontban lokális szélsőértéke van, és e pontban a függvény differenciálható, akkor:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

E feltétel *szükségessége* azonnal látható, hiszen ha a  $P_0$  pont lokális szélsőérték hely, akkor az

$$x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{és} \quad y \mapsto f(x_0, y)$$

egváltozós függvényeknek is lokális szélsőértékük van az  $x_0$ , ill.  $y_0$  helyen.

A feltétel azonban nem elégséges feltétele a lokális szélsőérték létezésének. Lehetséges ugyanis, hogy az előbb említett két egyváltozós függvénynek külön-külön szélsőértéke van a  $P_0$  pontban, de ezek különböző minőségűek. (Például a II.2.-ben látott nyeregfelületnek az origóban rögzített  $x$  mellett maximuma, rögzített  $y$  mellett pedig minimuma van.)

Hasonlóképpen előfordulhat, hogy ezen egyváltozós függvények valamelyikének vagy mindkettőnek inflexiós pontja van a  $P_0$  pontban. Ilyen például az

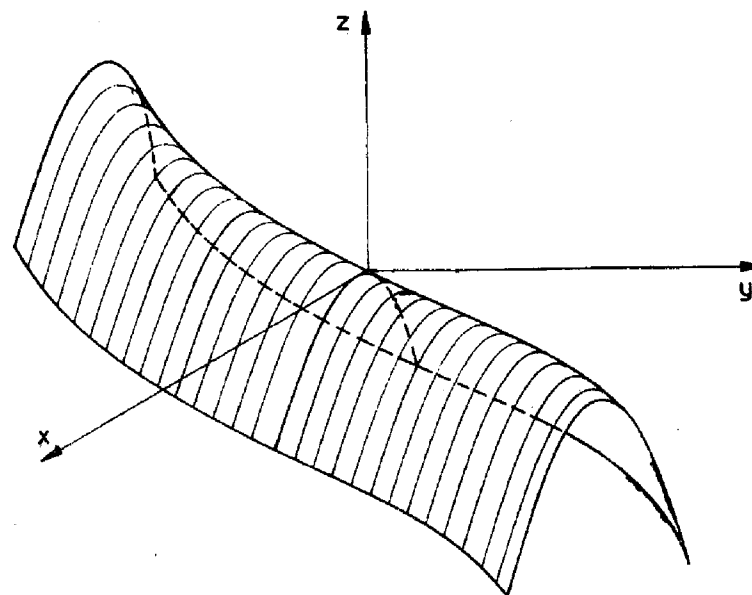
$$f: (x, y) \mapsto -x^2 - y^3 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény, amelynek grafikonját a 31. ábra mutatja. E függvénynek az origóban rögzített  $y$  mellett maximuma, rögzített  $x$  mellett pedig inflexiós pontja van.

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele III.5. alapján adható meg.

Mivel a  $P_0$  pontban az elsőrendű parciálisok nullák, így  $P_0$  kis környezetében  $\Delta f$  előjelét az

$$f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y$$



31. ábra

kvadratikusan alak határozza meg. Ha ezen kvadratikusan alak előjele állandó, azaz, ha ez (pozitív vagy negatív) definit, akkor a  $P_0$  pontban biztosan van szélsőérték.

Ez akkor teljesül, ha

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{xy}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Ha  $f''_{xx}(x_0; y_0)$  pozitív, akkor  $f$ -nek a  $P_0$  pontban minimuma, ha negatív, maximuma van. Ha a determináns értéke negatív, biztosan nincs szélsőérték, ha nulla, akkor további vizsgálat döntheti el, hogy van-e szélsőérték, azonban ezzel könyvünkben nem foglalkozunk.

A lokális szélsőértéket tehát a következő módon kereshetjük meg: az

$$f'_x = 0 \quad \text{és} \quad f'_y = 0$$

egyenletrendszerből megkapjuk a lehetséges szélsőérték helye-

ket, majd e pontokban megvizsgálva a fenti determináns előjelét, megállapítjuk, hogy van-e valóban szélsőérték.

Három, ill. több változó esetén hasonlóan járhatunk el. (A változókat  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -nel jelölve.) A lehetséges szélsőértékhelyeket az

$$f'_{x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

egyenletrendszer megoldásai adják.

Ezekben a  $P$  pontokban megvizsgáljuk a következő sorozat előjelét:

$$1; f'_{x_1 x_1}(P); \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1}(P) & f''_{x_1 x_2}(P) \\ f''_{x_2 x_1}(P) & f''_{x_2 x_2}(P) \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1}(P) & \dots & f''_{x_1 x_n}(P) \\ \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_n x_1}(P) & \dots & f''_{x_n x_n}(P) \end{vmatrix}.$$

Ha e sorozat állandó, ill. váltakozó előjelű, akkor az adott pontban minimuma, ill. maximuma van a függvénynek. Az abszolút szélsőértékre vonatkozik a következő tétel:

*Ha az  $f$  kétváltozós függvény folytonos a  $T \subset \mathbb{R}^2$  korlátos, zárt tartományban, akkor itt  $f$  felveszi legnagyobb, ill. legkisebb értékét.*

Abszolút szélsőértékhely keresésekor először a tartomány belsejében, majd a tartomány határán keressük meg a szélsőértékhelyeket, s ezen, általában véges sok függvényérték közül már kiválasztható a legkisebb, ill. legnagyobb.

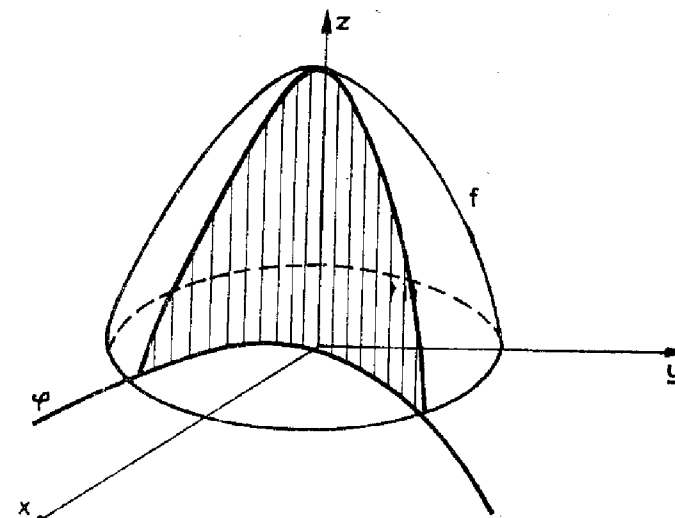
Sok esetben szükséges az  $f$  kétváltozós függvény szélsőértékének meghatározása a  $\varphi(x, y) = 0$  feltétel mellett. Szemléletesen: az  $f$  függvény grafikonjából a  $\varphi(x, y) = 0$  egyenletű görbére állított  $z$  tengellyel párhuzamos alkotójú henger egy térbeli görbét metsz ki. E térgörbén keressük  $f$  maximumát, ill. minimumát (32. ábra).

A feladat — a szükséges feltétel szempontjából — egyenértékű a következővel:

Keressük az

$$F: (x, y, \lambda) \mapsto f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \in D_f \cap D_\varphi$$

függvény feltétel nélküli szélsőértékét.



32. ábra

Ugyanis  $\varphi$  minden pontjában  $\varphi(x, y) = 0$ , tehát e pontokban

$$F'_x = f'_x; \quad F'_y = f'_y; \quad F'_\lambda = \varphi$$

Háromváltozós függvény esetén maximálisan két feltétel adható meg. Az eljárás az előzőhöz hasonló: Ha tehát a  $g$  háromváltozós függvény szélsőértékét keressük a  $\varphi_1(x, y, z) = 0$  és  $\varphi_2(x, y, z) = 0$  feltételek mellett, akkor ez a

$$G: (x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z), \\ \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in D_f \cap D_{\varphi_1} \cap D_{\varphi_2}$$

feltétel nélküli szélsőértékének meghatározását jelenti.

### Gyakorló feladatok

1. Keresse meg az

$$f: (x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 5 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

$f$  parciális deriváltjai:

$$f'_x = 4x - 2y + 4,$$

$$f'_y = 2y - 2x - 2.$$

Szélsőérték abban a pontban lehet, amelyben mindkét parciális derivált értéke nulla, azaz

$$4x - 2y + 4 = 0,$$

$$2y - 2x - 2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_0 = -1; \quad y_0 = 0,$$

a másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(-1; 0) = 4; \quad f''_{yy}(-1; 0) = 2; \quad f''_{xy}(-1; 0) = -2,$$

a determináns tehát:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

A  $(-1; 0)$  pontban van szélsőérték, és ez minimumhely, mivel itt  $f''_{xx} > 0$ .

2. Határozza meg, mely pontban van az

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 - 6x)(y^2 - 4y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvénynek lokális szélsőértéke!

Az elsőrendű parciálisok:

$$f'_x = (2x - 6)(y^2 - 4y),$$

$$f'_y = (x^2 - 6x)(2y - 4).$$

Szélsőérték csak azokban a pontokban lehet, amelyekre:

$$(2x - 6)y(y - 4) = 0$$

és

$$x(x - 6)(2y - 4) = 0.$$

Az első egyenletből  $x = 3$  vagy  $y = 0$ , ill.  $y = 4$ ; hasonlóan a másodikból  $y = 2$  vagy  $x = 0$ , ill.  $x = 6$ . Ennek megfelelően a lehetséges szélsőértékhelyek:

$$P_1(3; 2); P_2(0; 0); P_3(0; 4); P_4(6; 0); P_5(6; 4).$$

A második deriváltak:

$$f''_{xx} = 2(y^2 - 4y), \quad f''_{yy} = 2(x^2 - 6x), \quad f''_{xy} = (2x - 6)(2y - 4).$$

A  $P_1$  pontban a determináns:

$$\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} > 0,$$

tehát van szélsőérték, s mivel  $f''_{xx}(P_1) < 0$ , így ez maximum.

A többi pontban a determináns értéke negatív, így e pontokban szélsőérték nincs.

Megjegyzés: Az

$$f(x, y) = x(x - 6)y(y - 4)$$

alakból azonnal látszik, hogy  $x = 0; 6$ , ill.  $y = 0; 4$  esetben  $f$ -nek nem lehet szélsőértéke, hiszen  $f$  e helyek környezetében pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesz.

3. Mérési eredmények kiértékelésekor gyakran találkozunk az alábbi feladattal.

A mérés eredményeként a  $P_1(x_1; y_1) \dots P_n(x_n; y_n)$  pontokat kapjuk.

Határozza meg azt az  $y = Ax + B$  egyenletű egyenest, amely a legjobban közelíti az adott mérési pontokat!

A legjobb közelítés azt jelenti, hogy  $A, B$  értékét úgy kell meghatározni, hogy az

$$f: (A, B) \mapsto \sum_{i=1}^n (Ax_i + B - y_i)^2 \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

függvénynek minimuma legyen.



Az elsőrendű parciálisok:

$$f'_A(A, B) = \sum_{i=1}^n 2x_i(Ax_i + B - y_i),$$

$$f'_B(A, B) = \sum_{i=1}^n 2(Ax_i + B - y_i);$$

a szükséges feltételek:

$$1. A \sum_{i=1}^n x_i^2 + B \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0,$$

$$2. A \sum_{i=1}^n x_i + nB - \sum_{i=1}^n y_i = 0.$$

Jelöljük az  $x_i$  értékek számtani közepét  $\bar{x}$ -sa

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

hasonlóan:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

akkor 2. a következőképpen írható:

$$B = -A\bar{x} + \bar{y}.$$

Ezt 1.-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$A = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}$$

(A nevező az úgynevezett *empirikus szórásnégyzet*, amelyet  $\sigma_n^2$ -tel jelölnek,  $\sigma_n^2 > 0$ .)

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B^2} = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial B} = 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2n\bar{x}.$$

A determináns értéke tehát:

$$\begin{vmatrix} 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 & 2n\bar{x} \\ 2n\bar{x} & 2n \end{vmatrix} = 4n^2 \sigma_n^2 > 0,$$

így van szélsőérték, és az minimum, mert az  $A$  szerinti második parciális derivált is pozitív.

*Megjegyzés:* Ha a mérési pontok közelítőleg az  $y = be^{Ax}$  egyenletű görbére illeszkednek,  $A$  és  $b$  meghatározása az előző feladatra visszavezethető. Ugyanis:

$$\ln y = \ln b + Ax$$

(feltéve, hogy  $b > 0$ , és  $y_i > 0$ ), ekkor  $\ln y = Y$  és  $\ln b = B$  helyettesítéssel  $Y = Ax + B$  adódik. Hasonlóan vezethető vissza az alapfeladatra az  $y = bx^A$  kapcsolat is.

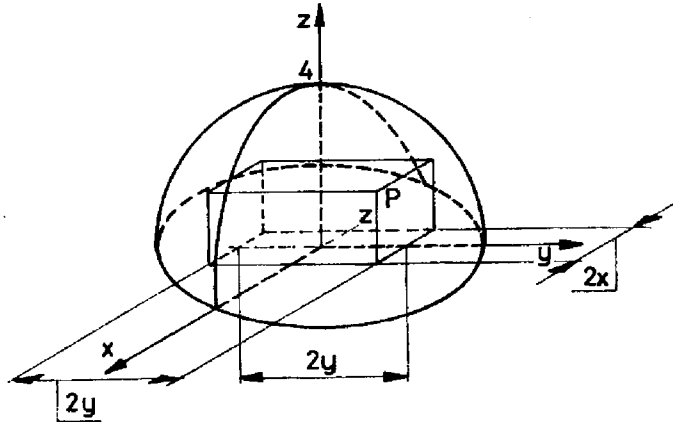
4. Határozza meg a

$$z = 4 - x^2 - 2y^2 \quad (x, y) \in R^2$$

egyenletű felület  $z \geq 0$  része és az  $xy$  sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátságokkal párhuzamosak!

a) Az ábrából láthatóan

$$V = 4xyz,$$



33. ábra

ahol, mivel a  $P$  pont a felületen van

$$z = 4 - x^2 - 2y^2.$$

Tehát a

$$V = 4xy(4 - x^2 - 2y^2) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3,$$

$$D_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x^2 + 2y^2 \leq 4\}$$

kétváltozós függvény abszolút szélsőértékét keressük. Mivel a függvény értéke a határokon mindenütt nulla, belül pozitív, ezért a maximumhely csak lokális szélsőérték hely lehet.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$V'_x = 16y - 12x^2y - 8y^3 = 4y(4 - 3x^2 - 2y^2),$$

$$V'_y = 16x - 4x^3 - 24xy^2 = 4x(4 - x^2 - 6y^2).$$

Mivel  $x=0$ , ill.  $y=0$  esetén a térfogat nem lehet maximális, így a lehetséges szélsőérték helyeket az alábbi egyenletrendszer szolgáltatja:

$$3x^2 + 2y^2 = 4,$$

$$x^2 + 6y^2 = 4,$$

amelynek megoldása (csak a pozitív értékek figyelembevételével):  $x=1$ ;

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ tehát } z=2. \text{ Így a téglatest oldalai: } 2; \frac{\sqrt{2}}{2}; 2.$$

Mivel egy korlátos, zárt tartományon folytonos függvény itt felveszi legnagyobb értékét, s a tartomány határain  $f(x, y)=0$ , biztos, hogy e pont valóban maximumhely. Azt, hogy tényleg a maximális térfogatú téglatest adatait határoztuk meg, az elégséges feltétel vizsgálatával is beláthatjuk:

$$V''_{xx} \left( 1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -12\sqrt{2} < 0,$$

$$V''_{yy} \left( 1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -24\sqrt{2},$$

$$V''_{xy} \left( 1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -8.$$

A determináns

$$\begin{vmatrix} -12\sqrt{2} & -8 \\ -8 & -24\sqrt{2} \end{vmatrix} = 512 > 0,$$

tehát van szélsőérték, és az maximum, mert  $V''_{xx}$  e helyen negatív.

b) Oldjuk meg a feladatot feltételes szélsőértékfeladatként!

Keressük a

$$V = 4xyz \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$$

függvény maximumát azzal a feltétellel, hogy a  $P(x, y, z)$  pont az  $x^2 + 2y^2 + z - 4 = 0$  felületen van. Keressük tehát az

$$f = 4xyz - \lambda(x^2 + 2y^2 + z - 4) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}, \lambda \in \mathbb{R}$$

függvény maximumát.

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az összes változó szerinti parciális derivált nulla legyen:

$$F'_x(x, y, z, \lambda) = 4yz - 2\lambda x = 0,$$

$$F'_y(x, y, z, \lambda) = 4xz - 4\lambda y = 0,$$

$$F'_z(x, y, z, \lambda) = 4xy - \lambda = 0,$$

$$F'(x, y, z, \lambda) = -x^2 + 2y^2 + z - 4 = 0.$$

Az első egyenletet  $x$ -szel, a másodikat  $y$ -nal, a harmadikat  $z$ -vel szorozzuk:

$$4xyz = 2\lambda x^2 = 4\lambda y^2 = \lambda z;$$

mivel a maximumhelyen  $xyz \neq 0$ , tehát:

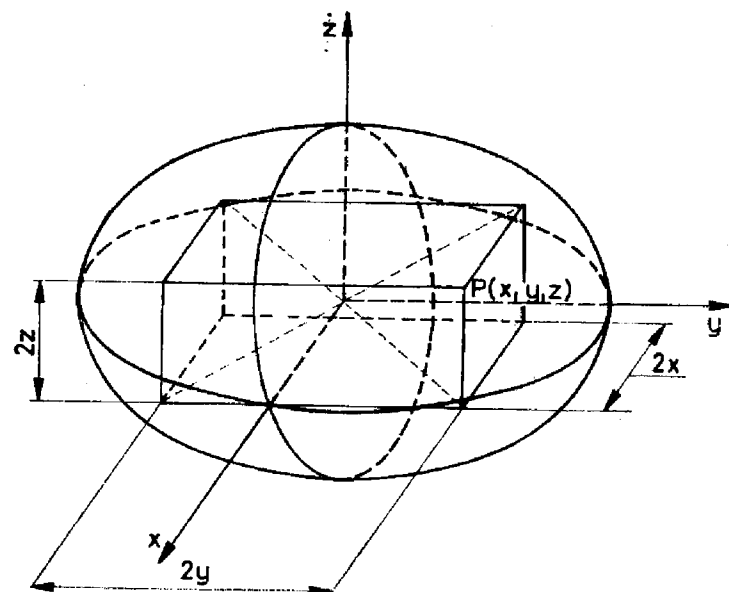
$$z = 2x^2 = 4y^2.$$

Ezt az utolsó egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy  $z=2$ , tehát  $x=1$  és  $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ami megfelel előző eredményünknek.

5. Határozza meg a

$$2x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$$

egyenletű ellipszoidba írt maximális térfogatú hasáb adatait! (A hasáb lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.)



34. ábra

a) A 34. ábrából leolvasható, hogy  $V=8xyz$ .

A téglatest csúcsa a felületen van, ezért

$$y = \sqrt{1 - 2x^2 - 4z^2}.$$

Keressük tehát a

$$V = xz\sqrt{1 - 2x^2 - 4z^2}, \quad D_V = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{+2} \mid 1 - 2x^2 - 4z^2 \geq 0\}$$

függvény maximumát.

A tartomány határain  $V(x, z)=0$ , belsejében pedig értéke pozitív, így a keresett szélsőérték helyi lokális maximumhely.

$V \geq 0$ , így ugyanott van maximuma, ahol az

$$u = \frac{V^2}{64}$$

függvénynek, tehát az

$$u = x^2z^2 - 2x^4z^2 - 4x^2z^4 \quad (x, z) \in D_0$$

maximumát kell keresnünk.

$u$  elsőrendű parciálisai:

$$u'_x = 2xz^2 - 8x^3z^2 - 8xz^4 = 2xz^2(1 - 4x^2 - 4z^2),$$

$$u'_z = 2x^2z - 4x^4z - 16x^2z^3 = 2xz^2(1 - 2x^2 - 8z^2)$$

Tudjuk, hogy  $x=0$ , ill.  $z=0$  esetén nincs maximum, így a lehetséges maximumhelyet az

$$1 - 4x^2 - 4z^2 = 0,$$

$$1 - 2x^2 - 8z^2 = 0$$

egyenletrendszer megoldása adja, amely

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6}; \quad z = \frac{\sqrt{12}}{12}; \quad \text{így} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Az, hogy itt valóban maximumhely van, az előző feladat meggondolásából következik.

b) Oldjuk meg a feladatot feltételes szélsőérték feladatként! Keressük a  $V=8xyz$  ( $x, y, z \in \mathbb{R}^{+3}$ ) függvény maximumát, azzal a feltétellel, hogy

a  $P(x, y, z)$  pont az ellipszoidon van. Keressük tehát az

$$F = 8xyz + \lambda(2x^2 + y^2 + 4z^2 - 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény feltétel nélküli szélsőértékét.

$F$  elsőrendű parciálisai:

$$F'_x = 8yz + 2\lambda x,$$

$$F'_y = 8xz + \lambda y,$$

$$F'_z = 8xy + 4\lambda z,$$

$$F'_\lambda = 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 1,$$

ebből az előző feladatban látotthoz hasonló átalakításokkal

$$-8xyz = \lambda 4x^2 = \lambda 2y^2 = \lambda 8z^2 \neq 0, \quad y^2 = 2x^2 = 4z^2$$

adódik, amit az utolsó egyenletbe behelyettesítve:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

adódik, ami az előző eredménnyel megegyező.

6. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény minimumát, ha

$$x + y + z = 12.$$

Meg kell keresni az

$$F = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} + \lambda(x + y + z - 12) \quad \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in D$$

függvény feltétel nélküli szélsőértékét.

A parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, z, \lambda) = -\frac{1}{x^2} + \lambda = 0,$$

$$F'_y(x, y, z, \lambda) = -\frac{4}{y^2} + \lambda = 0,$$

$$F'_z(x, y, z, \lambda) = -\frac{9}{z^2} + \lambda = 0,$$

$$F'_\lambda(x, y, z, \lambda) = x + y + z - 12 = 0$$

Az első három egyenletből  $\frac{1}{\lambda}$ -t kifejezve (mivel  $\lambda \neq 0$ ):

$$\frac{1}{\lambda} = x^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9},$$

de mert  $x, y, z$  egyaránt pozitív,

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Ezt a feltételbe helyettesítve:  $x = 2$ ;  $y = 4$ ;  $z = 6$  a megoldás.

7. Határozza meg a

$\sin x \sin y \sin z$  szorzat maximumát, ha  $x, y, z$  egy háromszög szögei, azaz:

$$x + y + z = \pi \quad \text{és} \quad x, y, z > 0.$$

a) A feltételből

$$z = \pi - x - y,$$

tehát

$$\sin z = \sin(x + y).$$

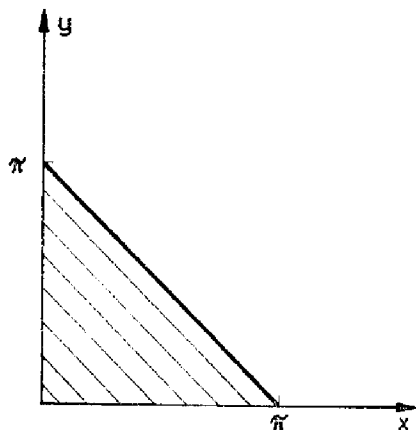
Keresnünk kell a

$$g: (x, y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x + y) \quad D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq \pi\}$$

függvény maximumát. Az értelmezési tartományt bővítettük az  $x = 0$ ,  $y = 0$  határpontokkal. E pontokban  $g(x, y) = 0$ , tehát a keresett maximumhely lokális szélsőérték hely lesz. ( $g$  értelmezési tartományát a 35. ábra mutatja.)

$g$  elsőrendű parciálisai:

$$g'_x = \cos y \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y),$$



35. ábra

$$g'_y = \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y)$$

Mivel maximumhelyet keresünk, így  $\sin x \sin y \neq 0$ , a szélsőérték hely koordinátái tehát a következő egyenletrendszerből adódnak:

$$\begin{aligned}\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y) &= 0, \\ \cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y) &= 0.\end{aligned}$$

Az első egyenlet:

$$\sin((x+y)+x) = 0,$$

azaz

$$2x+y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mivel háromszög szögeiről van szó, így csak  $k=1$ -nek van értelme, tehát:

$$2x+y = \pi,$$

hasonlóan a második egyenletből:

$$x+2y = \pi.$$

A két egyenletből:

$$x=y=z=\frac{\pi}{3},$$

azaz a szorzat szabályos háromszög esetén maximális. Mivel korlátos, zárt

tartományban kerestük  $g$  maximumát ( $g$  folytonos), s e tartomány határain a függvényérték nulla, a belső pontokban  $g > 0$ , így a maximumhely a tartomány belsejében levő egyetlen lehetséges szélsőérték hely.

b) A feladatot feltételes szélsőérték-feladatként is megoldhatjuk:

Keressük az

$$F = \sin x \sin y \sin z + \lambda(x+y+z-\pi) \quad \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in [0; \pi]^3$$

függvény maximumát.

A lehetséges szélsőérték helyet szolgáltatató egyenletrendszer:

$$F'_x(x, y, z, \lambda) = \cos x \sin y \sin z + \lambda = 0,$$

$$F'_y(x, y, z, \lambda) = \sin x \cos y \sin z + \lambda = 0,$$

$$F'_z(x, y, z, \lambda) = \sin x \sin y \cos z + \lambda = 0,$$

$$F'_\lambda(x, y, z, \lambda) = x+y+z-\pi = 0.$$

Az első három egyenletből:

$$-\lambda = \cos x \sin y \sin z,$$

$$-\lambda = \sin x \cos y \sin z,$$

$$-\lambda = \sin x \sin y \cos z,$$

mivel a maximumhelyen  $\sin x \sin y \sin z \neq 0$ , így ezekből átrendezéssel:

$$\text{ctg } x = \text{ctg } y,$$

ill.

$$\text{ctg } y = \text{ctg } z,$$

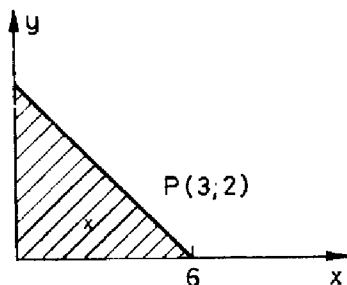
és mert egy háromszög szögeiről van szó:

$$x=y=z=\frac{\pi}{3}.$$

8. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 - 6x)(y^2 - 4y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény legkisebb és legnagyobb értékét az  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=6$  egyenesekkel határolt zárt tartományban!



36. ábra

Korlátos, zárt tartományról van szó, ezért  $f$  itt biztosan felveszi legkisebb és legnagyobb értékeit. A 2. feladatban láttuk, hogy a függvénynek csak a  $P(3; 2)$  pontban van lokális maximuma. E pont a tartomány belsejében van, és itt

$$f(3; 2) = 36.$$

Vizsgáljuk meg  $f$  viselkedését a tartomány határain!

Ha  $x=0$ , vagy  $y=0$ , akkor  $f=0$ .

Ha  $x+y=6$ , azaz  $x=6-y$ ,

akkor a függvény

$$y \mapsto (y^2 - 6y)(y^2 - 4y) \quad y \in [0; 6].$$

Keressük ezen egyváltozós függvény szélsőérték helyeit. ( $y=0$ , ill.  $6$  esetén a függvényérték zérus, így csak belső pontban lehet szélsőérték.) A függvény deriváltja:

$$y \mapsto (2y-6)(y^2-4y) + (y^2-6y)(2y-4).$$

A derivált zérushelyei:

$$y_1=0; \quad y_2=\frac{3}{4}(5+\sqrt{3}); \quad y_3=\frac{3}{4}(-\sqrt{3}).$$

Mivel  $x=6-y$ , így

$$x_1=6; \quad x_2=\frac{3}{4}(3-\sqrt{3}); \quad x_3=\frac{3}{4}(3+\sqrt{3}).$$

$f$  helyettesítési értékei e pontokban:

$$f(P_1)=0,$$

$$f(P_2) \approx -25,43,$$

$$f(P_3) \approx 33,08.$$

A függvény tehát adott tartománybeli legnagyobb értékét a tartomány belsejében, a  $P(3; 2)$  pontban; legkisebb értékét a tartomány határán a

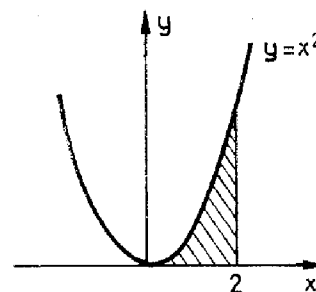
$$P_2\left(\frac{3}{4}(5+\sqrt{3}); \frac{3}{4}(3-\sqrt{3})\right)$$

pontban veszi fel.

10. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto y(2x-3) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény legnagyobb és legkisebb értékét a 37. ábrán látható zárt tartományon!



37. ábra

Mivel a tartomány korlátos és zárt, így  $f$  valóban felveszi legkisebb és legnagyobb értékeit.

$f$  elsőrendű parciálisai:

$$f'_x = 2y$$

és

$$f'_y = 2x-3,$$

így lokális szélsőérték hely csak a  $P(1,5; 0)$  pontban lehet (e pont a tartomány határán van), itt pedig a függvényérték nulla.

Vizsgáljuk meg  $f$  viselkedését a tartomány határain!

Ha  $y=0$ , akkor  $f(x; 0)=0$ .

Ha  $x=2$ , akkor  $f(2; y)=y$   $y \in [0; 4]$ , itt  $0 \leq f(2; y) \leq 4$ .

Ha  $y=x^2$ , akkor a függvény:

$$x \mapsto x^2(2x-3) \quad x \in [0; 2].$$

Ezen egyváltozós függvény lokális szélsőértékei az  $x_1=0$  és az  $x_2=1$  pontban lehetnek. Mivel  $y=x^2$ , tehát  $y_1=0$  és  $y_2=1$ .

A függvényértékek:

$$f(P_1)=0; \quad f(P_2)=-1.$$

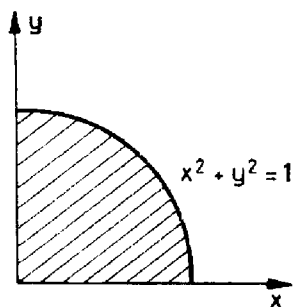
(Az  $x=0$ , ill.  $x=2$  esetet már előzőleg figyelembe vettük.)

A függvény tehát legkisebb értékét az  $(1; 1)$  pontban, legnagyobb értékét a  $(2; 4)$  pontban veszi fel.

11. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 - y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvénynek a 38. ábrán látható zárt tartományon felvett legkisebb, ill. legnagyobb értékét!



38. ábra

Mivel  $f$ -nek, mint azt már láttuk, lokális szélsőértékhelye nincs, így az abszolút szélsőértékhelyeket a tartomány határán kell keresnünk.

A tengelyeken:

$$x=0 \text{ esetén} \quad -1 \leq f(0; y) \leq 0,$$

$$y=0 \text{ esetén} \quad 0 \leq f(x; 0) \leq 1.$$

A körív esetében célszerű polárkoordinátára áttérnünk;  $r=1$ , ezért a körív mentén a függvény

$$\varphi \mapsto \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$\cos 2\varphi$  a  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumban szigorúan monoton csökkenő, így maximumát a  $\varphi=0$  helyen, tehát a  $P_1(1; 0)$  pontban, minimumát a  $\varphi=\frac{\pi}{2}$  helyen, a  $P_2(0; 1)$  pontban veszi fel. Tehát  $f$  legnagyobb értéke 1, legkisebb  $-1$  e tartományban.

#### IV. VEKTORVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÉS DERIVÁLÁSUK

##### 1. Egyparaméteres vektor-skalár függvény. Térgörbék

Tekintsünk egy térben mozgó pontszerű testet! E test tartózkodási helyét a mozgás időtartama alatt minden egyes időpillanatban egy-egy helyvektorral adhatjuk meg, azaz minden  $t$  (skalár) értékhez a tér egy-egy vektorát rendeljük hozzá.

A pálya tehát az

$$\mathbf{r} : t \mapsto \mathbf{r}(t) \quad t \in D \subset \mathbb{R}$$

függvénnyel, egyparaméteres vektor-skalár függvénnyel jellemezhető. (Természetesen nem minden vektor-skalár függvény tekinthető egy mozgó test pályájának.)

Ha a térben rögzítjük a koordináta-rendszert, akkor:

$$\mathbf{r} : t \mapsto \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t \in D \subset \mathbb{R}.$$

azaz e függvény mindhárom koordinátájában  $t$ -től függő egyváltozós függvény.

Az

$$L = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \mid t \in D\}$$

halmaz pontjai általában egy térgörbét alkotnak.

*Egyszerű ívnek* nevezzük az egyenes szakasz *topologikus*, azaz kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos leképezéssel nyert képét. A leképezést akkor nevezzük *kölcsönösen folytonosnak*, ha a leképezést szolgáltató függvénnyel együtt annak inverze is folytonos. Ha véges sok egyszerű ívet úgy csatlakoztatunk, hogy csak ezek végpontjai legyenek közös pontok, görbét kapunk.

Ha az

$$L = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \mid t \in [a, b]\}$$

térgörbe, és  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ , akkor *zárt görbéről* beszélünk. E függ-

vény határértékét, folytonosságát külön nem definiáljuk, ezt az Olvasó a többváltozós függvények körében megismert definíciók analógiájaként könnyen elvégezheti. Csak annyit jegyzünk meg, hogy a határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele a koordináták határértékének létezése az adott helyen.

A

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) \quad t \in D$$

függvényt *differenciálhatónak* nevezzük a  $t_0 \in D$  helyen, ha a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$$

határérték létezik és véges. A  $t_0$  pontbeli differenciáhányados jelölése:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t_0}$$

Rögzített koordináta-rendszer esetén:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{x}(t_0)\mathbf{i} + \dot{y}(t_0)\mathbf{j} + \dot{z}(t_0)\mathbf{k}.$$

Ha a térgörbe  $t_0$  pontjában létezik a deriváltvektor, és  $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$ , akkor  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  a görbe érintőjének irányvektora. Ha a görbe egy pontmozgás pályájának tekinthető, akkor a deriváltvektor a mozgó pont pillanatnyi sebességvektora a  $t_0$  helyen. (Amennyiben  $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$  is létezik, ennek fizikai jelentése: a pillanatnyi gyorsulás vektora a  $t_0$  helyen.)

Legyen a térgörbe kezdőpontja  $\mathbf{r}(a) = A$ , végpontja  $\mathbf{r}(b) = B$ , s írjunk e térgörbére töröttvonalat úgy, hogy csúcspontjai a görbén helyezkedjenek el, kezdő-, ill. végpontja  $A$ , ill.  $B$  legyen, s a csúcspontok a haladási iránynak megfelelően kövessék egymást! Ha a beírt töröttvonalak hosszából álló számhalmaznak létezik felső határa, ezt a görbe ívhosszának nevezzük.

Ha  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  folytonos  $[a, b]$ -ben, akkor a görbének van ívhossza és:

$$S = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$



(Szemléletesen: pontmozgás esetén a sebesség nagyságának idő szerinti integrálja egyenlő a megtett úttal.)

Ha létezik a görbének olyan paraméterezése, amelyben az ívhossz a paraméterértékek különbségével egyenlő, akkor a görbe természetes paraméterezéséről beszélünk:

$$\mathbf{r}: s \mapsto \mathbf{r}(s) \quad s \in D \subset \mathbb{R}.$$

A természetes paraméter szerinti deriváltak szokásos jelölése:  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}''$ .

Igazolható, hogy  $|\mathbf{r}'| = 1$ .

Az  $\mathbf{r}'$  egységvektort a továbbiakban  $\mathbf{t}$ -vel is jelöljük. Könnyen belátható az is, hogy

$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 1$ ,  $t \in D$  teljesülése esetén  $t$  természetes paraméter.

Jelölje  $\Delta\alpha$  a térgörbe  $P_0$ , ill.  $P$  pontjában levő érintőinek hajlásszögét, és  $\Delta s$  a  $P_0P$  ív hosszát!

Ekkor a görbe  $P_0$  pontbeli görbülete:

$$\kappa = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s},$$

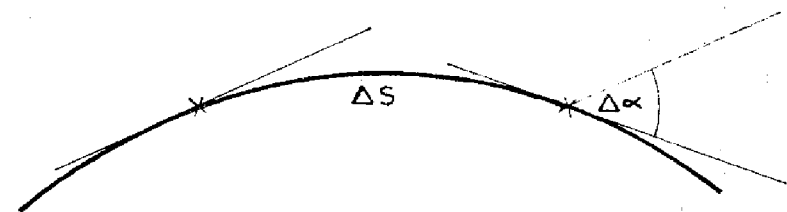
ha a határérték létezik és véges (39. ábra). (Igazolható, hogy a görbület csak egyenes esetén egyenlő azonosan zérussal.)

Ha az

$$\mathbf{r}: t \mapsto \mathbf{r}(t) \quad t \in D$$

függvény a  $t_0$  helyen kétszer differenciálható, és  $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$ , akkor a görbület:

$$\kappa = |\mathbf{r}''| = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$



39. ábra

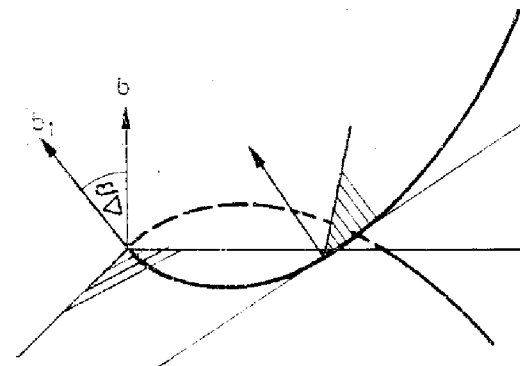
Ha  $\ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$ , akkor egységvektorát *főnormális egységvektornak* nevezzük:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{\kappa} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{r}}|}.$$

Az  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{t}$  által kifeszített sík a görbe  $t_0$  pontbeli *simulósíkja*. A simulósík egy normálvektora:

$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  a binormális egységvektor.

A  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  egységvektorok alkotta vektorhármast a térgörbe *kísérő triéderének* nevezzük.



40. ábra

Síkgörbe esetén a binormális egységvektor iránya állandó, így célszerű a görbe torzióját  $\tau$  változásával definiálni:

Legyen a térgörbe  $P_0$ , ill.  $P$  pontjaiban vett simulósíkok hajlásszöge  $\Delta\beta$ , a  $P_0P$  ív hossza  $\Delta s$ , ekkor a görbe  $P_0$  pontbeli torziója (40. ábra):

$$|\tau| = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}.$$

( $\tau$  pozitív, ha a  $P_0$ -beli érintővektor  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  irányából nézve  $P_0$ -hoz közeledő pontokban vett simulósíkok pozitív forgást végeznek.)

Ha  $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$  létezik és folytonos,  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  és  $\kappa(t_0)$  nem zérus, akkor:

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{br'''}{\kappa}.$$

### Gyakorló feladatok

1. Adja meg az  $A(1; 2; 5)B(4; 7; 9)$  pontokat összekötő egyenesszakasz vektoregyenletét!

Az egyenes irányvektora:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

így az  $AB$  szakasz egyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{v}t = (1 + 3t)\mathbf{i} + (2 + 5t)\mathbf{j} + (5 + 4t)\mathbf{k} \quad t \in [0; 1].$$

Ha irányvektorként egységvektort választunk, akkor természetes paraméterezéssel is megadható a görbe.

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3}{\sqrt{50}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{50}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{50}}\mathbf{k},$$

tehát:  $\mathbf{r} : s \mapsto \mathbf{r}_A + \mathbf{e}_v s =$

$$= \left(1 + \frac{3}{\sqrt{50}}s\right)\mathbf{i} + \left(2 + \frac{5}{\sqrt{50}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \frac{4}{\sqrt{50}}s\right)\mathbf{k} \quad s \in [0; \sqrt{50}].$$

Ez esetben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{e}_v, & \text{tehát} & \quad |\mathbf{r}'| = 1, \\ \mathbf{r}'' &= 0, & \text{így} & \quad \kappa = 0. \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* Természetesen más paraméterválasztás is lehetséges. Például az

$$\mathbf{r} : t \mapsto (1 + 3t^2)\mathbf{i} + (2 + 5t^2)\mathbf{j} + (5 + 4t^2)\mathbf{k} \quad t \in [0; 1]$$

függvény szintén az  $AB$  szakasz egy lehetséges megadási módja. (Az anyagi pont ekkor gyorsulva futja be az  $AB$  szakaszt.)

Ekkor

$$\ddot{\mathbf{r}} : t \mapsto 6t\mathbf{i} + 10t\mathbf{j} + 8t\mathbf{k} \quad t \in [0; 1]$$

és

$$\ddot{\mathbf{r}} : t \mapsto 6t\mathbf{i} + 10t\mathbf{j} + 8t\mathbf{k} \quad t \in [0; 1].$$

Mivel minden egyes  $t_0$  időpillanatban  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  és  $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$  párhuzamos, így vektoriális szorzatuk zérus, tehát a görbület most is zérussal egyenlő.

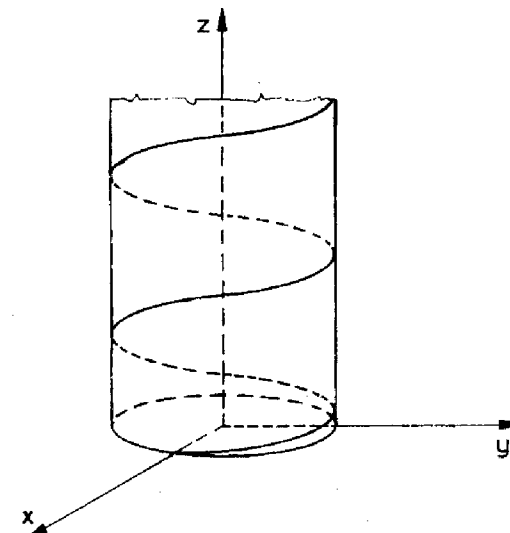
2. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r} : t \mapsto \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

függvénnyel adott térgörbe illeszkedik az

$$x^2 + y^2 = 1$$

(henger)felületre!



41. ábra

Mivel

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t, \\ y(t) &= \sin t, \\ z(t) &= t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

látható, hogy minden  $t$  esetén

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

azaz a görbe valóban illeszkedik a hengerfelületre.

*Megjegyzés:* A feladatban szereplő görbe egy hengerfelületre írt csavarvonal (41. ábra), amelynek az  $xy$  síkra eső vetülete kör; az  $xz$  síkra való vetülete:

$$x = \cos z, \quad z \in R,$$

hiszen a  $P(\cos t_0, \sin t_0, t_0)$  vetülete az  $xz$  síkra a  $P'(\cos t_0, 0, t_0)$  pont.

3. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r} : t \mapsto e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}, \quad t \in R$$

függvénnyel adott térgörbe illeszkedik a

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in R^{+2}$$

kúpfelületre!

A görbe minden pontjában

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t \cos t, \\ y(t) &= e^t \sin t, \\ z(t) &= e^t > 0, \quad t \in R. \end{aligned}$$

Tehát minden pontban:

$$x^2 + y^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2t} = z^2,$$

azaz a görbe valóban illeszkedik a felületre (kúpfelületre csavart csavarvonal).

4. Határozza meg a 2. feladatban szereplő térgörbe ívhosszát a  $t \in [0; 2\pi]$  intervallumban!

Mivel  $\mathbf{r}$  minden koordinátájában folytonosan differenciálható függvény, így  $\dot{\mathbf{r}}$  létezik és korlátos:

$$\dot{\mathbf{r}} : t \mapsto -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t \in R,$$

ahonnan

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{2}.$$

Így az ívhossz:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

*Megjegyzés:* A megoldásból látszik, hogy az  $s = t\sqrt{2}$  paramétertranszformációval a görbe természetes paraméterezését kapjuk.

5. Igazolja, hogy a 2. feladatban szereplő csavarvonal görbülete és torziója állandó!

Az előző feladat eredményét felhasználva:

$$\mathbf{r} : s \mapsto \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{k}, \quad s \in R,$$

ahol  $s$  a természetes paraméter.

$$\mathbf{r}' : s \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right), \quad s \in R,$$

$$\mathbf{r}'' : s \mapsto \frac{1}{2} \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \right), \quad s \in R.$$

Tehát a görbület:

$$\kappa = |\mathbf{r}''| = \frac{1}{2} = \text{állandó}.$$

A torzió meghatározásához szükségesek az  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{\kappa} = - \left( \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \right),$$

azaz  $\mathbf{n}$  minden esetben párhuzamos az  $xy$  síkkal. A binormális egységvektor:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right),$$

$$\mathbf{r}'' : s \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \right),$$

így a torzió:

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}'''}{\kappa} = \frac{1}{2} = \text{állandó}.$$

Tehát csavarvonal esetén  $\tau$  és  $\kappa$  valóban állandó.

*Megjegyzés:* Igazolható, hogy az egyetlen olyan nem síkbeli görbe, amelynek görbülete és torziója állandó, a csavarvonal.

Ha a csavarvonalat az

$$\mathbf{r} : t \mapsto R_0 \cos t \mathbf{i} + R_0 \sin t \mathbf{j} + m t \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

függvény jellemzi, akkor

$$\tau = \frac{m}{R_0^2 + m^2}; \quad \kappa = \frac{R_0}{R_0^2 + m^2},$$

így  $\tau$  és  $\kappa$  értéke a csavarvonal jellemző paramétereit egyértelműen meghatározza.

6. Határozza meg a 3. feladatban szereplő térgörbe ívhosszát a  $[0; 1]$  intervallumban!

$$\dot{\mathbf{r}} : t \mapsto (e^t \cos t - e^t \sin t) \mathbf{i} + (e^t \cos t + e^t \sin t) \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tehát:

$$|\dot{\mathbf{r}}| = e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1} = \sqrt{3} e^t.$$

Így az ívhossz:

$$S = \int_0^1 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} (e - 1).$$

*Megjegyzés:* A feladat megoldásából látható, hogy a  $[0, t_0]$  intervallum esetén az ívhossz:

$$S = \sqrt{3} (e^{t_0} - 1).$$

Ha elvégezzük a

$$t = \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + c \right), \quad \text{ahol } c \geq 0 \text{ állandó}$$

helyettesítést, akkor  $s$  természetes paraméter, ugyanis:

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{3} e^t},$$

azaz  $|\mathbf{r}'| = 1$ , így valóban természetes paraméter.

7. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r} : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{3}} \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{3}} \sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \mathbf{j} + \frac{t}{\sqrt{3}} \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

függvény esetén  $t$  természetes paraméter, és határozza meg a görbületet a  $t_0 = 1$  helyen!

Azt kell belátnunk, hogy  $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$  minden  $t \in \mathbb{R}^+$  helyen; ebből már következik, hogy  $t$  természetes paraméter;

$$\dot{\mathbf{r}} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left( \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{i} + \left( \sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} + \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{j} + \mathbf{k} \right].$$

Ebből

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{3} \left[ \left( \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} + \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right] = 1,$$

tehát  $t$  valóban természetes paraméter, azaz

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'.$$

Az adott pontbeli görbület meghatározásához  $\mathbf{r}''$  szükséges:

$$\mathbf{r}'' : t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{3}} \left[ \left( -\sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} - \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{i} + \left( \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{j} \right].$$

Tehát:

$$\mathbf{r}''(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j}.$$

Így a görbület:

$$\kappa(1) = \mathbf{r}''(1) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

*Megjegyzés:* A térgörbe a 3. feladatban szereplő kúpfelületre írt csavarvonal, csak más a paraméterezése.

8. Határozza meg az

$$\mathbf{r} : t \mapsto t\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

függvénnyel adott térgörbe  $t_0=0$  pontjában a kísérő triédert!

Határozza meg e térgörbének a kísérő triéder síkjaira eső vetületét!

Mivel

$$\dot{\mathbf{r}} : t \mapsto \mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k},$$

így

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{i} = \mathbf{t},$$

hiszen

$$|\dot{\mathbf{r}}(0)| = 1.$$

A főnormális egységvektor irányát az

$$(\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0)) \times \dot{\mathbf{r}}(0)$$

vektor adja meg.

$$\ddot{\mathbf{r}} : t \mapsto \mathbf{j} + 6t\mathbf{k},$$

tehát

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{j},$$

így  $\mathbf{n}$  iránya:

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

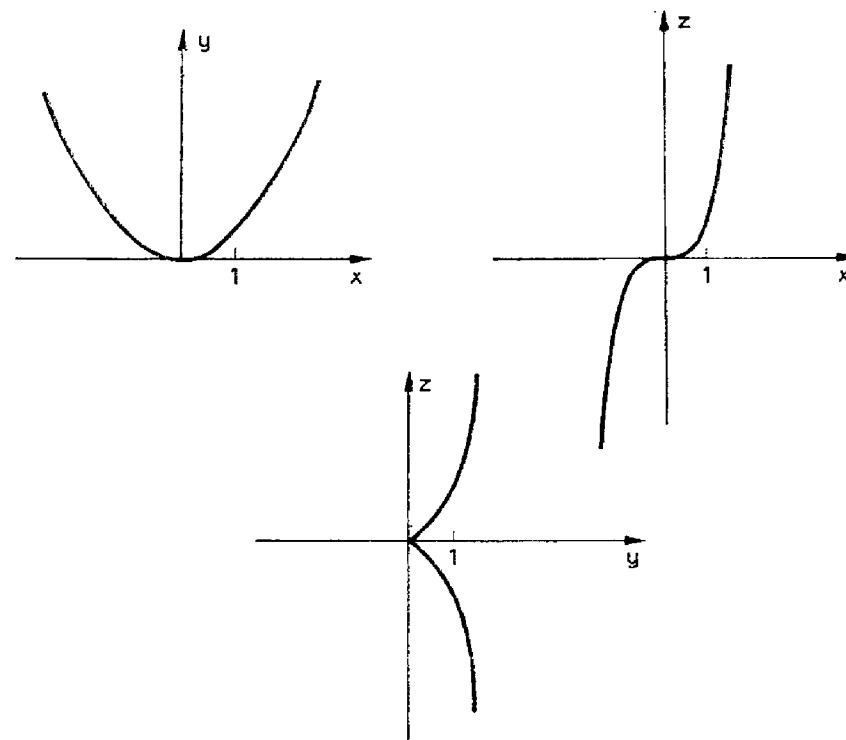
Mivel egységvektort kaptunk, így ez egyben a főnormális egységvektor:

$$\mathbf{n} = \mathbf{j}.$$

A görbe  $t_0=0$ -hoz tartozó simulósíkja az  $xy$  sík, amelynek normálvektora:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{k}.$$

Az origóhoz tartozó kísérőtriéder egységvektorai tehát megegyeznek a tengelyirányú egységvektorokkal, így a vetületek meghatározása a koordináta-tengelyek síkjára való vetítést jelenti.



42. ábra

Mivel a  $P(x, y, z)$  pont vetülete az  $xy$  síkra a  $P_1(x, y, 0)$  pont; így az  $xy$  síkra eső vetületgörbe egyenlete:

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hasonlóan a  $zx$  síkra eső vetület:

$$z = x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

és a  $zy$  síkra eső vetület:

$$z^2 = 8y^3, \quad y \in \mathbb{R}^+ \text{ (42. ábra).}$$

**Megjegyzés:** Igazolható, hogy ha a térgörbét előállító  $\mathbf{r}$  függvény valamely pontban háromszor folytonosan differenciálható, e pontban a görbület és a torzió nem zérus, akkor e pont kis környezetében a térgörbe vetületei a kísérőtriéder síkjaira hasonlóak a 42. ábrán látható vetületekhez.

9. Határozza meg, mely pontokban párhuzamos, ill. merőleges a térgörbe érintője a

$$3x + 5y + 6z = 20$$

síkkal, ha a térgörbét a következő függvény állítja elő:

$$\mathbf{r} : t \mapsto (t^2 + 2)\mathbf{i} + (6t - 4)\mathbf{j} + (2t^2 + 5t)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A sík normálvektora:

$$\mathbf{n}(3; 5; 6).$$

Az érintő egyenese akkor párhuzamos a síkkal, ha az érintő irányvektora és a sík normálvektora egymásra merőleges, azaz, ha skalárszorzatuk zérus.

$$\dot{\mathbf{r}} : t \mapsto 2t\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + (4t + 5)\mathbf{k},$$

így a skalárszorzat:

$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{n} = 6t + 30 + 24t + 30.$$

$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{n} \text{ akkor zérus, ha } t = -2.$$

$$\dot{\mathbf{r}}(-2) = 6\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

tehát az érintő a  $P(6, -16, -2)$  pontban párhuzamos a síkkal. E pontban

az érintő irányvektora:

$$\mathbf{v}(-4; 6; -3),$$

tehát az érintő egyenletrendszere:

$$x - 6 = -4u,$$

$$y + 16 = 6u,$$

$$z + 2 = -3t.$$

Az érintő akkor merőleges a síkra, ha irányvektora párhuzamos a sík normálvektorával; azaz, ha van olyan  $t_0$  pont, amelyre

$$\mathbf{r}(t_0) = \lambda \mathbf{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mivel

$$\mathbf{n}(3; 5; 6)$$

és

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = 2t_0\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + (4t_0 + 5)\mathbf{k},$$

így az egyenlőség a második koordináták egyenlősége miatt csak  $\lambda = 1, 2$  esetén teljesülhetne, ekkor azonban a

$$3, 6 = 2t_0,$$

$$7, 2 = 4t_0 + 5.$$

egyenleteknek kellene egyszerre teljesülniük. Ez lehetetlen, tehát nincs olyan pont, amelyhez tartozó érintő a síkra merőleges lenne.

10. Gravitációs térben a  $P_0(4; 20; 60)$  pontból  $\mathbf{y}_0(5; 20; 40)$  kezdősebességgel elhajítunk egy pontszerű testet. Írja fel a pálya egyenletét! Milyen magasra emelkedik a test; hol éri el az  $xy$  síkot? (Feltételezzük, hogy a test gyorsulása  $-\mathbf{g}\mathbf{k}$ .)

A test  $x$  és  $y$  irányban egyenletesen mozog, így a pálya egyenlete:

$$\mathbf{r} = (4 + 5t)\mathbf{i} + (20 + 20t)\mathbf{j} + \left(60 + 40t - \frac{g}{2}t^2\right)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

A test sebességét  $\dot{\mathbf{r}}$  adja:

$$\dot{\mathbf{r}} : t \mapsto 5\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + (40 - gt)\mathbf{k},$$

azaz a sebesség első két koordinátája állandó. A pálya tetőpontján a sebesség  $z$  irányú komponense zérus. (Itt  $z(t)$ -nek maximuma van, tehát  $\dot{z}(t_0) = 0$ .)

$$40 - gt_0 = 0, \\ t_0 \approx 4,$$

Igy a tetőpont koordinátái:  $T(24; 100; 140)$ .

Az  $xy$  sík egyenlete  $x=0$ .

Tehát a metszéspont időpontját a

$$60 + 40t - \frac{g}{2}t^2 = 0$$

egyenlet pozitív megoldása adja. Ez  $t_1 \approx 9,29$ .

E pont koordinátái:  $B(50,45; 205,8; 0)$ .

*Megjegyzés:* A mozgás pályája síkgörbe. Könnyen belátható ugyanis, hogy a pálya minden pontja a

$$4x - y = -4$$

egyenletű síkban van. Belátható az is, hogy a pálya parabola.

11. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r} : t \mapsto R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

( $R, \omega$  állandó) függvénnyel jellemzett pontmozgás (egyenletes körmozgás) esetén

$$|\dot{\mathbf{r}}| \quad \text{és} \quad |\ddot{\mathbf{r}}|$$

állandó, és teljesül az

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

differentiálegyenlet!

A periodikus mozgást végző pontszerű test sebességét minden  $t_0$  időpillanatban  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ , gyorsulását  $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$  adja. Tehát:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} : t \mapsto -R\omega \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \mathbf{j}, \\ \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} : t \mapsto -R\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - R\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}.$$

Látható, hogy:

$$|\mathbf{v}| = |\dot{\mathbf{r}}| = R\omega = \text{állandó},$$

és

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \text{tehát} \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{r},$$

valamint

$$|\mathbf{a}| = |\ddot{\mathbf{r}}| = R\omega^2.$$

Látszik továbbá, hogy

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r},$$

azaz  $\mathbf{r}$  valóban kielégíti a differentiálegyenletet.

*Megjegyzés:* Ha  $|\dot{\mathbf{r}}| = c > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (állandó sebességű mozgás), akkor  $\dot{\mathbf{r}}$  és  $\ddot{\mathbf{r}}$  minden időpillanatban merőlegesek egymásra. Ugyanis:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = |\dot{\mathbf{r}}|^2 = c^2$$

állandó, így

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}^2 = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{dc^2}{dt} = 0.$$

12. Határozza meg az

$$\mathbf{r} : t \mapsto R \cos \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{i} + R \sin \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

( $R, \omega, \alpha$  állandók) függvénnyel leírt pontmozgás gyorsulását, és bontsa fel  $\mathbf{t}$  és  $\mathbf{n}$  irányú összetevőkre! (Gyorsuló körmozgás.)

A pontmozgás sebessége:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} : t \mapsto R(\omega + \alpha t) \left[ -\sin \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{i} + \cos \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{j} \right],$$

a gyorsulás:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} : t \mapsto -R\alpha \left[ \sin \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{i} - \cos \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{j} \right] - \\ - R(\omega + \alpha t)^2 \left[ \cos \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{i} + \sin \left( \omega t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \mathbf{j} \right].$$

$\mathbf{r}$  és  $\dot{\mathbf{r}}$  alakját figyelembe véve írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{a} = -(\omega + \alpha t)^2 \mathbf{r} + \frac{\alpha}{\omega + \alpha t} \dot{\mathbf{r}}.$$

Tudjuk, hogy

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{1}{R(\omega + \alpha t)},$$

s mivel síkmozgásról van szó, azaz a simulósík az  $xy$  sík, így  $\mathbf{n}$  a kör középpontja felé mutat, azaz:

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\mathbf{r}}{R}.$$

Ezt figyelembe véve a gyorsulás felbontása:

$$\mathbf{a} = R(\omega + \alpha t)^2 \mathbf{n} + \alpha R t \mathbf{t} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R} \mathbf{n} + \alpha R t \mathbf{t},$$

azaz a mozgás során az érintőirányú gyorsulás állandó, a normális irányába eső gyorsulás a sebesség négyzetével arányosan változik.

*Megjegyzés:* Egy tetszőleges mozgás gyorsulásvektora mindig felbontható  $\mathbf{t}$  és  $\mathbf{n}$  irányú összetevőkre, és pedig:

$$\mathbf{a} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \mathbf{t} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{R} \mathbf{n},$$

ahol  $R$  a görbe görbületi sugara.

13. Igazolja, hogy centrális erőterben végzett mozgás esetén (azaz a mozgás során az erő egy rögzített pont felé irányul) az

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$$

összefüggéssel definiált területi sebességvektor állandó!

Vegyük fel a koordináta-rendszer kezdőpontját az erőcentrumban!

Ekkor

$$\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{r}, \quad (\lambda > 0 \text{ állandó}).$$

Newton II. törvénye szerint:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

$\mathbf{F}$  két alakját összehasonlítva látjuk, hogy  $\mathbf{r}$  és  $\ddot{\mathbf{r}}$  párhuzamos vektorok, azaz vektoriális szorzatuk zérus:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

Határozzuk meg  $\mathbf{s}$  deriváltját!

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = 0,$$

hiszen az első tagban a két vektor azonos, így ez a vektoriális szorzat definíciója miatt zérus, a második tagról pedig az előzőekben láttuk be ugyanezt. Mivel  $\mathbf{s}$  deriváltja zérus, így  $\mathbf{s}$  állandó. Ebből az is következik, hogy  $e$  mozgás síkmozgás.

*Megjegyzés:* A feladatban Kepler II. törvényét igazoltuk.

14. Bontsuk fel síkmozgás esetén az  $\dot{\mathbf{r}}$  és  $\ddot{\mathbf{r}}$  vektorokat  $\mathbf{r}$  irányú és  $\mathbf{r}$ -re merőleges összetevőkre!

A feladat megoldásakor célszerű síkbeli polárkoordinátákat alkalmazni.

Ekkor

$$|\mathbf{r}| = r,$$

azaz

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r,$$

ahol  $\mathbf{e}_r$  az  $\mathbf{r}$  irányú egységvektor. Jelentsen  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_r$ -re merőleges egységvektort, amelyet növekvő  $\varphi$  irányban való  $90^\circ$ -os forgatással kapunk  $\mathbf{e}_r$ -ből. A 11. feladat megjegyzése szerint egységvektor derivált vektora  $\mathbf{e}$  vektorra merőleges vektor, így:

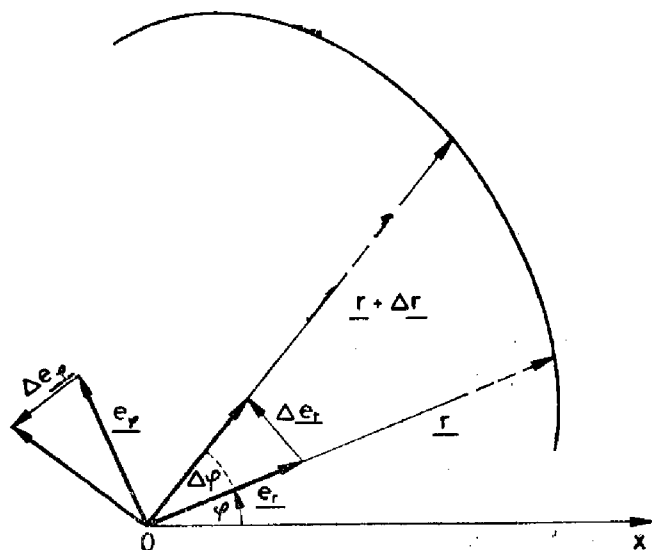
$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi; \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r,$$

ahol  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  (43. ábra).

Ezt alkalmazva:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi,$$





43. ábra

amely éppen  $\dot{\mathbf{r}}$  keresett felbontása. Ezt ismét differenciálva :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{e}_\varphi(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) + r\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Figyelembe véve  $\dot{\mathbf{e}}_r$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$  alakját :

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi,$$

amely a gyorsulásvektor felbontása.

*Megjegyzés :* A területi sebességvektor állandóságának (13. feladat) és  $\ddot{\mathbf{r}}$  felbontásának alkalmazásával határozható meg egy centrális erőterben mozgó test pályája. (Kepler I. törvénye)

## 2. Kétparaméteres vektor-skalár függvény. Felületek

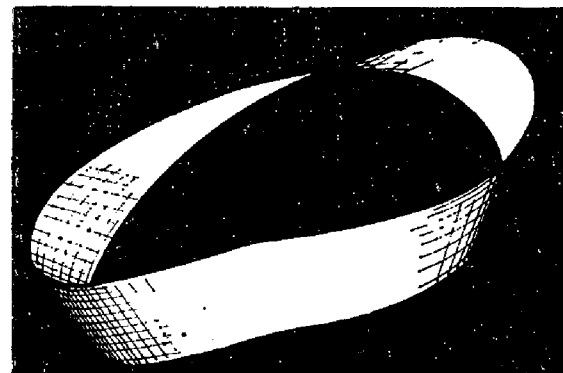
Felületekkel már a kétváltozós függvények szemléltetésekor is foglalkoztunk, de ott nem definiáltuk a felület fogalmát.

*Elemi felületnek* nevezzük, a körlemez topologikus (azaz kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos leképezéssel nyert) képét. A körlemez határpontjainak képe adja az elemi

felület határát. Elemi felületeket határaik mentén összeilleszthetünk. Az összeillesztést úgy végezzük, hogy csak véges sok határoló görbe mentén csatlakozzanak az elemi felületek, s a csatlakozó görbék belső pontjai a felületnek is belső pontjai legyenek. Véges sok elemi felületet így összeillesztve *felületet* kapunk. A felületek néhány lényeges tulajdonságát definiáljuk.

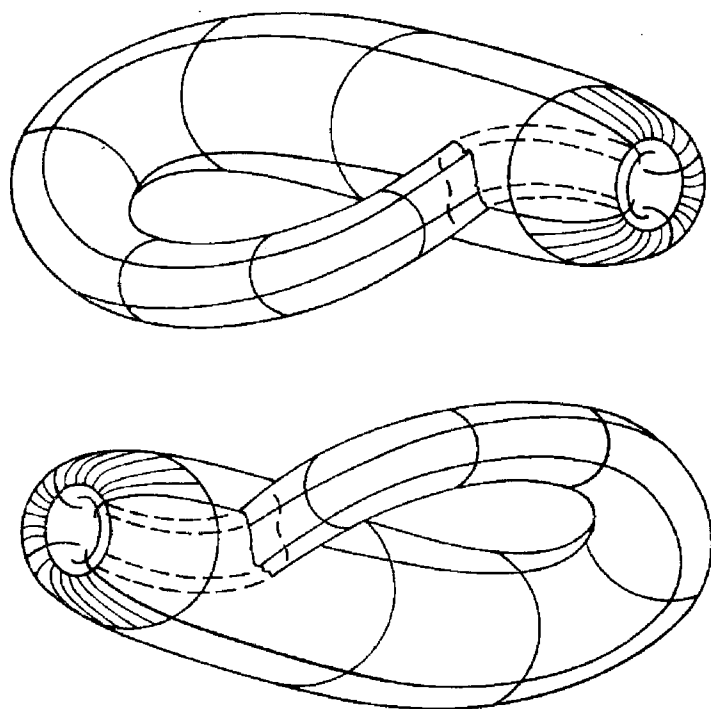
A felület *zárt*, ha korlátos és nincs határa. A felület *összefüggő*, ha bármely két felületi pont összeköthető a felületen haladó görbével; *egyszeresen összefüggő*, ha bármely felületre illeszkedő zárt görbe kettévágja.

Ha a felület egy rögzített  $P$  pontján áthaladó, a felületre illeszkedő, érintővel rendelkező görbék érintői egy síkban helyezkednek el, akkor ezt a síkot a felület  $P$  pontbeli *érintősíkjának*, a sík normálvektorát a felület  $P$  pontbeli *normálisának* nevezzük.



44. ábra

Tegyük fel, hogy a felület minden pontjában létezik az így értelmezett normálvektor. Mozgassuk el a normálvektort a felületre illeszkedő, a felület határpontjait nem tartalmazó zárt görbe mentén addig, míg kezdőpontja az eredeti helyzetbe kerül! Ha a kezdő- és végállapotban kapott vektor minden ilyen görbe esetén megegyezik, a felületet *irányíthatónak* (kétoldalú felületnek) nevezzük. A 44. ábrán látható Möbius-szalag egyoldaltú felület. Hasonlóan egyoldaltú, de zárt felület a Klein-féle palack (45. ábra).



45. ábra

Ha a felületbe írt, a felületre támaszkodó, háromszöglapokból álló, bizonyos szöghatárolásoknak eleget tevő poliéderek felszínének határértéke, finomodó poliéder sorozat esetén létezik, akkor a felületet *mérhetőnek* nevezzük, s e határérték a felület felszínét adja.

II.2.-ben láttuk, hogy bizonyos felületek megadhatók kétváltozós függvényekkel, ebben a részben kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel való leírásukkal foglalkozunk.

Az

$$\mathbf{r} : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

függvényt, amely az  $\mathbb{R}^2$  (paramétersík) egy részhalmazához a háromdimenziós tér vektorait rendeli hozzá, *kétparaméteres vektor-skalár függvénynek* nevezzük.

Ha a térben rögzítjük a koordináta-rendszert, akkor:

$$\mathbf{r} : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D,$$

azaz e függvény mindhárom koordinátája az  $u, v$  változók kétváltozós függvénye.

Az

$$F = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$

halmaz pontjai általában egy felületet alkotnak. E függvény határértékét, folytonosságát külön nem definiáljuk, ezt az Olvasóra bízunk.

Ha létezik és véges a

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

határérték, akkor ezt az  $\mathbf{r}$  függvény  $P_0(u_0, v_0)$  pontbeli  $u$  szerinti parciális deriváltjának nevezzük:

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0).$$

Hasonlóan értelmezhető  $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$  is.

(Szemléletesen: a zérustól különböző  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$  vektor az

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0), \quad (u, v_0) \in D$$

függvénnyel definiált, a felületre illeszkedő térgörbe érintőjének irányvektorát adja.) Az így értelmezett parciálisok koordinátái megegyeznek a megfelelő koordináták parciálisával.

Ha  $\mathbf{r}$  a  $D$  tartományban folytonosan differenciálható, azaz parciálisai léteznek és folytonosak, és itt

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0},$$

akkor az  $\mathbf{r}$  függvény által adott felület minden pontjában van érintősík, amelynek normálvektora a  $P_0 \in D$  pontban:

$$\mathbf{r}'_u(P_0) \times \mathbf{r}'_v(P_0).$$

Ha a  $D$  tartomány mérhető területű és  $\mathbf{r}$  folytonosan differenciálható  $D$ -n, akkor a felület felszíne:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv.$$

(A felszín kiszámításával a későbbiekben foglalkozunk.)

### Gyakorló feladatok

1. Adja meg az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontokat tartalmazó sík, és az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  háromszög vektoregyenletét, ha

$$A(1; 1; 3); \quad B(4; 2; 7) \quad \text{és} \quad C(5; 4; 9)!$$

A sík egyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + u\vec{AB} + v\vec{AC}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

ugyanis a sík valamennyi vektora előállítható az  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  vektorok lineáris kombinációjaként, ha az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok nem esnek egy egyenesbe.

Esetünkben:

$$\vec{AB}(3; 1; 4),$$

$$\vec{AC}(4; 3; 6),$$

tehát a sík egyenlete:

$$\mathbf{r} = (1 + 3u + 4v)\mathbf{i} + (1 + u + 3v)\mathbf{j} + (3 + 4u + 6v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Ha csak a háromszög szükséges, akkor az  $u$ ,  $v$  számpárra megszorítást kell tennünk.

Mivel a  $BC$  szakasz tetszőleges  $P$  pontjára:

$$\vec{AP} = \vec{AB} + \lambda \vec{BC} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

és

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB},$$

így

$$\vec{AP} = (1 - \lambda)\vec{AB} + \lambda\vec{AC}.$$

A háromszög (belső- és határ-) pontjait kapjuk tehát, ha az előző függ-

vény értelmezési tartományát leszűkítjük:

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0, u + v \leq 1\}.$$

Megjegyzés:

A sík esetében:

$$\mathbf{r}'_u = \vec{AB},$$

$$\mathbf{r}'_v = \vec{AC},$$

tehát:  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \vec{AB} \times \vec{AC}$ , ami a síkra merőleges vektort ad.

2. Adja meg az  $R$  sugarú origó középpontú gömb vektoregyenletét!

Az első fejezetben megismert gömbi koordinátákat alkalmazva ( $r = R = \text{állandó}$ ), a gömb egyenlete:

$$\mathbf{r} = R \sin u \cos v \mathbf{i} + R \sin u \sin v \mathbf{j} + R \cos u \mathbf{k} \quad u \in [0; \pi], \quad v \in [0; 2\pi].$$

(A leképezés nem kölcsönösen egyértelmű, mivel  $u=0$  esetén  $v$ -től függetlenül a  $P(0; 0; R)$  pontot kapjuk.)

3. Írja fel az

$$(x-3)^2 + z^2 = 4$$

egyenletű körvonal  $z$  tengely körüli forgatásakor keletkező felület (tórusz) vektoregyenletét!

Az  $xz$  sík egy tetszőleges  $P(x_0, z_0)$  pontját a  $z$  tengely körül  $\varphi$  szöggel elforgatva a keletkező pont koordinátái:

$$x_1 = x_0 \cos \varphi,$$

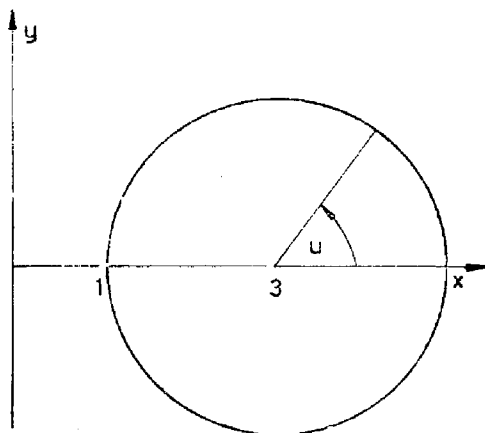
$$y_1 = x_0 \sin \varphi,$$

$$z_1 = z_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

A körvonal paraméteres előállítása (46. ábra):

$$x = 3 + 2 \cos u,$$

$$z = 2 \sin u, \quad u \in [0; 2\pi].$$



46. ábra

A felületet e pontoknak  $z$  tengely körüli forgatásával kapjuk, így az előző felhasználásával a felület egyenlete:

$$\mathbf{r} = (3 + 2 \cos u) \cos \varphi \mathbf{i} + (3 + 2 \cos u) \sin \varphi \mathbf{j} + 2 \sin u \mathbf{k},$$

$$(u; \varphi) \in [0; 2\pi].$$

A keletkező felület zárt, összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő.

*Megjegyzés:* Hasonlóan írható fel az  $xz$  síkban levő

$$x = x(t),$$

$$z = z(t), \quad t \in D \subset \mathbb{R}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe  $z$  tengely körüli forgatásakor keletkező felület egyenlete is:

$$\mathbf{r} = x(t) \cos \varphi \mathbf{i} + x(t) \sin \varphi \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k} \quad t \in D, \varphi \in [0; 2\pi].$$

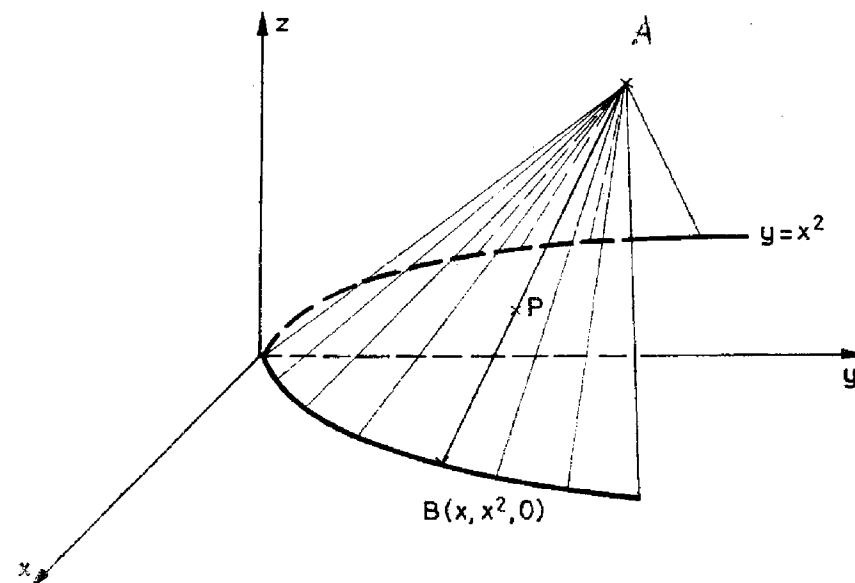
4. Írja fel annak a kúpfelületnek az egyenletét, amelynek csúcsa az  $A(5; 4; 7)$  pont, vezérgörbéje pedig az

$$y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

parabola!

Jelölje  $B$  a parabola egy tetszőleges pontját! Ekkor az  $AB$  szakaszon levő  $P$  pont helyvektora (47. ábra):

$$\mathbf{r}_P = t \vec{AB} + \mathbf{r}_A = t(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) + \mathbf{r}_A = (1-t)\mathbf{r}_A + t\mathbf{r}_B, \quad t \in [0; 1],$$



47. ábra

így a felület egyenlete:

$$\mathbf{r} = (5 - 5t + tx)\mathbf{i} + (4 - 4t + tx^2)\mathbf{j} + (7 - 7t)\mathbf{k} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Hasonló módon kaphatjuk meg tetszőleges csúcspontú és vezérgörbéjű kúpfelület egyenletét is.

5. Írja fel annak a hengerfelületnek az egyenletét, amelynek vezérgörbéje az

$$x^2 - y^2 = 1$$

egyenletű hiperbola  $x > 0$  ága, alkotója pedig párhuzamos az  $\mathbf{a}(2; 4; 5)$  vektorral!

A hiperbola paraméteres előállítás:

$$x = \operatorname{ch} t,$$

$$y = \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

hiszen

és  $\text{ch } t > 0$ ,  
 $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ .

A felület tetszőleges  $P$  pontját megkaphatjuk, ha a hiperbola valamely pontjából az a vektorral párhuzamosan haladunk. A  $P$  pont helyvektora tehát:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_B + u\mathbf{a}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

ahol a  $B$  a hiperbola valamely pontja. Így a felület egyenlete:

$$\mathbf{r} = (\text{ch } t + 2u)\mathbf{i} + (\text{sh } t + 4u)\mathbf{j} + 5u\mathbf{k}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^2.$$

Hasonló módon adható meg tetszőleges hengerfelület egyenlete is.

## 6. Mozgassunk egy egyenest az

$$\mathbf{r}: t \mapsto \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

csavarvonalon úgy, hogy az minden pontban a csavarvonal érintője irányába mutasson!

Írja fel az így keletkező felület egyenletét!

A felület tetszőleges pontjába eljuthatunk, ha a csavarvonal valamely  $P_0$  pontjából a  $P_0$  pontbeli érintő irányában mozdulunk el. (Könnyen látható az is, hogy így csak a felület pontjait kapjuk.)

Az érintő irányvektora a  $P_0$  pontban:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = -\sin t_0 \mathbf{i} + \cos t_0 \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

így a felület egyenlete:

$$\mathbf{s} = (\cos t - u \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + u \cos t)\mathbf{j} + (t + u)\mathbf{k}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad u \in \mathbb{R}.$$

Igazolható, hogy az így keletkező felület — lefejthető vonalfelület — síkba kiteríthető.

## 7. Határozza meg az

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

felület  $P_0(4; 3; 25)$  pontbeli érintősíkjának egyenletét!

A feladatot a kétváltozós függvények tárgyalása során már megoldottuk. Most más úton keressük a megoldást. A felület  $P_0$  pontbeli normálvektorát az

$$\mathbf{r}'_x(x_0, y_0) \times \mathbf{r}'_y(x_0, y_0)$$

vektor szolgáltatja.

Esetünkben:

$$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + 2x\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_y = \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}.$$

A  $P_0$  pontban:

$$\mathbf{r}'_x(4; 3) = \mathbf{i} + 8\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_y(4; 3) = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Tehát az érintősík normálvektora (a  $P_0$  pontbeli felületi normális):

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Így a  $P_0$  pontbeli érintősík egyenlete:

$$8(x-4) + 6(y-3) - (z-25) = 0,$$

ami, természetesen az előző megoldás eredményével egyező.

*Megjegyzés:* A feladatban szereplő felület az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény grafikonja. Kétváltozós függvénnyel adott felület kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel való megadása tehát történhet az  $x, y$  paraméterek választásával:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

## 8. Határozza meg az

$$\mathbf{r} = 2 \sin u \cos v \mathbf{i} + 4 \sin u \sin v \mathbf{j} + 3 \cos u \mathbf{k},$$

$$u \in [0; \pi], v \in [0, 2\pi]$$

felület  $u_0 = \frac{\pi}{4}; v_0 = \frac{\pi}{4}$  paraméterű pontbeli érintősíkját!

A felület ellipszoid, ugyanis teljesül az  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$  egyenlőség, amelyet egy ellipszoid pontjai elégítenek ki; hiszen a felület síkmetszetei ellipszisek. E felület  $P_0 \left(1; 2; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$  pontbeli érintősíkját keressük.

A felületi normális meghatározásához szükségesek a paraméterek szerinti parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u = 2 \cos u \cos v \mathbf{i} + 4 \cos u \sin v \mathbf{j} - 3 \sin u \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = -2 \sin u \sin v \mathbf{i} + 4 \sin u \cos v \mathbf{j}.$$

A  $P_0$  pontban:

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

A  $P_0$  pontbeli érintősík normálvektora:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = 3\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Így a keresett érintősík egyenlete:

$$3\sqrt{2}(x-1) + \frac{3\sqrt{2}}{2}(y-2) + 4\left(z - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

9. Határozza meg az origó középpontú 3 egység sugarú gömb  $P_0(2; 2; 1)$  pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Az érintősík egyenletét többféleképpen is megkaphatjuk. A megoldás során felhasználhatjuk a 2. feladat megoldásakor látott gömbi koordinátákkal történő paraméterezést, majd az előző feladathoz hasonlóan ebből meghatározhatjuk a  $P_0$  pontbeli felületi normálist.

Célszerűbb azonban felhasználnunk a gömbnek azt a tulajdonságát, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintősíkra, így az érintősík normálvektora az  $\vec{OP}_0$  vektor lehet.

Tehát

$$\mathbf{n} = \vec{OP}_0 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

így az érintősík egyenlete:

$$2(x-2) + 2(y-2) + (z-1) = 0.$$

10. Állítsunk az előző feladatbeli érintősíkra merőleges síkot (ún. normálsíkot), amely a  $P_0$  pontot és a  $z$  tengelyt tartalmazza.

Határozza meg a metszésvonal egyenletét és  $P_0$  pontbeli görbületét! Hogyan változik a görbület, ha a metsző síkot az érintősík és normálsík metszésvonala körül forgatjuk?

A normálsík normálvektora merőleges az érintősík normálvektorára és a  $z$  tengelyre, így:

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{k} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \mathbf{k} = -2\mathbf{j} + 2\mathbf{i}.$$

Mivel a sík tartalmazza az origót is, így egyenlete:

$$x = y.$$

E sík a gömböt egy 3 egység sugarú körben metszi, amelynek egy lehetséges paraméteres megadása:

$$\mathbf{s} : t \mapsto \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \mathbf{j} + 3 \cos t \mathbf{k}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

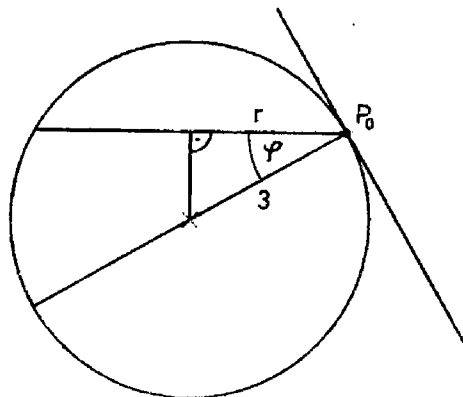
Mivel a metszatkör sugara 3, így görbülete a  $P_0$  pontban és a metszatkör bármely pontjában:

$$\kappa = \frac{1}{3}.$$

Ha a metszősíkot az érintősík és a normálsík metszésvonala körül forgatjuk, akkor a metszatkör sugara csökken. (A 48. ábrán, a  $P_0$  ponton áthaladó, a fixen tartott egyenesre merőleges síkmetszetet ábrázoltuk.)

Az ábrából láthatóan:

$$r = 3 \cos \varphi,$$



48. ábra

így a görbület:

$$\kappa_1 = \frac{1}{3 \cos \varphi} = \frac{\kappa}{\cos \varphi}, \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

*Megjegyzés:* A normálmetszet és a ferdemetszet görbülete közötti összefüggés, amelyet a feladatban gömb esetén igazoltunk, általánosan is érvényes (Meusnier tétele).

11. Határozza meg a 7. feladatban szereplő felület esetében azon  $P_0$  pontbeli normálmetszet egyenletét és  $P_0$  pontbeli görbületét, amely a  $z$  tengelyt tartalmazza!

A keresett sík normálvektora merőleges az érintősík normálvektorára és a  $z$  tengelyre, tehát a sík normálvektorának választható ezek vektoriális szorzata:

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{k} = 8\mathbf{j} - 6\mathbf{i}.$$

Így a normálsík egyenlete:

$$6x - 8y = 0.$$

A metszetgörbe egyenletét keresve válasszuk  $x$ -et paraméterként:

$$x = t!$$

Ekkor a sík egyenletéből:

$$y = \frac{3t}{4}.$$

Mivel  $z = x^2 + y^2$ , így

$$z = \frac{25}{16} t^2.$$

A metszetgörbe tehát:

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{3}{4}t\mathbf{j} + \frac{25}{16}t^2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

vagyis parabola.

A  $P_0$  pontbeli görbület meghatározásához szükségünk van az  $\dot{\mathbf{r}}(4)$  és  $\ddot{\mathbf{r}}(4)$  vektorokra.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{25}{8}t\mathbf{k},$$

azaz:

$$\dot{\mathbf{r}}(4) = \mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} + 16\mathbf{k},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}(4) = \frac{50}{9}\mathbf{k}.$$

A  $P_0$  pontbeli görbület:

$$\kappa(4) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(4) \times \ddot{\mathbf{r}}(4)|}{|\dot{\mathbf{r}}(4)|^3}.$$

A számításokat elvégezve kapjuk, hogy:

$$\kappa(4) = \frac{2}{101\sqrt{101}}.$$

12. Határozza meg, hogy a 8. feladatban szereplő felület érintősíkja mely pontban párhuzamos a

$$2x + y = 0$$

síkkal!

A feladat megoldása során meghatároztuk a paraméterek szerinti parciálisokat. Ezt felhasználva, a felületi normális:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 \cos u \cos v & 4 \cos u \sin v & -3 \sin u \\ -2 \sin u \sin v & 4 \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + 6 \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + 16 \sin u \cos u \mathbf{k}.$$

Az érintősík akkor párhuzamos a

$$2x + y = 0$$

síkkal, ha az  $\mathbf{n}$  vektor párhuzamos az  $\mathbf{n}_1(2; 1; 0)$  vektorral, azaz van olyan  $\lambda \neq 0$ , hogy

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_1.$$

Mivel  $\mathbf{n}_1$  harmadik koordinátája zérus, így:

$$16 \sin u \cos u = 0.$$

Tekintve, hogy

$$\sin u = 0$$

esetében  $\mathbf{n}$  mindhárom koordinátája zérus, csak

$$\cos u = 0 \text{ lehetséges.}$$

Ekkor

$$u = \frac{\pi}{2}, \quad \text{azaz} \quad \sin u = 1.$$

$\mathbf{n}$  első két koordinátája  $e$  pontokban:

$$n_x = 12 \cos v = \lambda \cdot 2,$$

$$n_y = 6 \sin v = \lambda \cdot 1.$$

E két egyenletből:

$$\operatorname{tg} v = 1,$$

azaz

$$v_1 = \frac{\pi}{4}; \quad v_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

A két pont tehát, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal:

$$P_1(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 0),$$

$$P_2(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0),$$

$e$  pontok tehát az  $xy$  síkban vannak.

*Megjegyzés:* Ha  $u=0$ , akkor  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \mathbf{0}$ , azaz nem határoz meg érintősíkot. Az  $u=0$  paraméterű pont —  $v$ -től függetlenül — az  $A(0; 0; 3)$  pont.

Szemléletesen látszik, hogy  $e$  pontban van érintősík, és ez a

$$z=3 \text{ sík.}$$

A problémát a felület paraméterezése (2. feladat megjegyzése) okozza.

13. Határozza meg az

$$\mathbf{r} = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + 4uv\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

felület origóbeli érintősíkját!

Mi a felület és az érintősík metszészvonala?

A felület nyeregfelület, ugyanis:

$$x = u + v,$$

$$y = u - v,$$

tehát:

$$2u = x + y \quad \text{és} \quad 2v = x - y,$$

így

$$z = 4uv = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

A paraméterek szerinti parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 4v\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4u\mathbf{k}.$$

Az origóban  $u_0 = v_0 = 0$ , tehát

$$\mathbf{r}'_u(0; 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{és} \quad \mathbf{r}'_v(0; 0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}.$$



A felületi normális tehát:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = -2\mathbf{k};$$

ebből következően az origóbeli érintősík az  $xy$  sík:

$$z = 0.$$

Láttuk (2.2-ben), hogy az  $xy$  sík a nyeregfelületet két egyenesben metszi. Ezek:

$$x = y, \quad \text{ill.} \quad x = -y.$$

*Megjegyzés:* Vizsgáljuk e felület esetén az origón átmenő normálmetszeteket! Ha a normálmetszet illeszkedik az  $y$  tengelyre ( $z = -y^2$ ), akkor az origóból a görbületi középpontba mutató vektor a felületi normálissal azonos értelmű, az  $x$  tengelyre illeszkedő normálmetszet ( $z = x^2$ ) esetén viszont ellentétes értelmű e két vektor. Az előbbi esetben a felületi görbe görbületét *pozitívnak*, az utóbbiban *negatívnak* nevezzük. A felületnek azon pontjait, amelyekhez tartozó normálmetszetek esetén a görbület pozitív és negatív is lehet *hiperbolikus pontoknak* nevezzük. Hiperbolikus pontok esetén a pontbeli érintősík tetszőleges kis környezetében, az érintősík által meghatározott mindkét féltérben van a felületnek pontja.

A nyeregfelület minden pontja hiperbolikus pont. Ha a  $P$  pontnak van olyan környezete, amelyben a felület a pontbeli érintősík által meghatározott féltérben van, a pontot *elliptikus pontnak* nevezzük. Ekkor a  $P$  ponton átmenő összes normálmetszet görbülete azonos előjelű. Ha valamennyi  $P$  pontbeli normálmetszet görbülete nemnegatív (ill. nempozitív) de van olyan metszet is, amelynél a görbület zérus, a  $P$  pont *parabolikus pont*.

#### 14. Határozza meg az

$$\mathbf{r} = \text{sh } u \mathbf{i} + \text{ch } u \text{ sh } v \mathbf{j} + \text{ch } u \text{ ch } v \mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

felület  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = \text{arsh } 1$  paraméterű pontbeli érintősíkjának egyenletét!

A felület a 2.2-ben tárgyalt kétköpenyű hiperboloid, ugyanis  $\mathbf{r}$  koordinátáira teljesül a

$$z^2 = x^2 + y^2 + 1$$

egyenlőség.

Mivel

$$\text{sh}(\text{arsh } t) = t, \quad \text{és} \quad \text{ch}(\text{arsh } t) = \sqrt{1 + t^2},$$

így a  $P_0(0; 1; \sqrt{2})$  pontbeli érintősíkot keressük.

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u = \text{ch } u \mathbf{i} + \text{sh } u \text{ sh } v \mathbf{j} + \text{sh } u \text{ ch } v \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = \text{ch } u \text{ eh } v \mathbf{j} + \text{ch } u \text{ sh } v \mathbf{k}.$$

A  $P_0$  pontban:

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \mathbf{i},$$

$$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \sqrt{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

A  $P_0$  pontbeli felületi normális tehát:

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \times (\sqrt{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (\sqrt{2} \mathbf{k} - \mathbf{j}).$$

Az érintősík egyenlete tehát:

$$-(y-1) + \sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0,$$

azaz az érintősík párhuzamos az  $x$  tengellyel.

#### 15. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r} = \cos 2u(1 - v \sin u) \mathbf{i} + (\sin 2u + v \sin u \cos 2u) \mathbf{j} + v \cos u \mathbf{k}, \quad u \in [0; \pi]; \quad v \in [0; 1]$$

felület esetén a  $P_0(1; 0; 0)$  pontban a felületi normális  $v=0$ ,  $u=0$  és  $v=0$ ,  $u=\pi$  esetén ellentétes értelmű, azaz a felület nem irányítható.

A  $v=0$  paramétervonal pontjai az

$$\mathbf{r}(u, 0) = \cos 2u \mathbf{i} + \sin 2u \mathbf{j}, \quad u \in [0; \pi]$$

görbén, egy  $xy$  síkbeli egységsugarú körön helyezkednek el. Ha e körön körbe mozgatjuk a felületi normálist, és a kezdő- és véghelyzet különböző, akkor a felület nem irányítható.

A paraméterek szerinti parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u = (-2 \sin 2u - v \cos u \cos 2u + 2v \sin 2u \sin u)\mathbf{i} + (2 \cos 2u + v \cos u \cos 2u - 2v \sin u \sin 2u)\mathbf{j} - v \sin u \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = -\sin u \cos 2u \mathbf{i} + \sin u \cos 2u \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}.$$

A parciálisok értéke a  $P_0$  pontban:

$$\mathbf{r}'_u(0; 0) = \mathbf{r}'_u(\pi; 0) = 2\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}'_v(0; 0) = -\mathbf{r}'_v(\pi; 0) = \mathbf{k},$$

így az  $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  felületi vektora:

$$\mathbf{n}(0; 0) = -\mathbf{n}(\pi; 0),$$

tehát  $\mathbf{n}$  a kezdő-, ill. véghelyzetben ellentétes értelmű, azaz a felület nem irányítható.

### 3. Skálár-vektor függvények

Ha a háromdimenziós tér vektorainak egy  $D$  részhalmazát leképezzük a valós számok részhalmazára, akkor skálár-vektor függvényt értelmezünk:

$$u: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset E^3.$$

$u$  értelmezési tartománya tehát  $E^3$  részhalmaza, értékészletét a valós számok alkotják:

$$u: \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D.$$

(Skálár-vektor függvény helyett szokásos a skalártér elnevezés is.)

Ha a térben rögzítjük az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  egységvektorokat, és ezzel együtt egy Descartes-féle koordináta-rendszert, akkor  $E^3$  (a tér vektorai) és  $\mathbb{R}^3$  (a rendezett számhármassok halmaza) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozunk létre. (A továbbiakban nem teszünk különbséget  $E^3$  és  $\mathbb{R}^3$  között.) Ekkor, mivel:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

a skálár-vektor függvény egy háromváltozós függvénnyel írható le:

$$\mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D_f \subset \mathbb{R}^3.$$

(Természetesen egy skálár-vektor függvényt reprezentáló háromváltozós függvény függ a koordináta-rendszer megválasztásától, azaz más-más koordináta-rendszerben különböző függvénnyel adható meg.)

A skálár-vektor függvény adott pontbeli határértéke, folytonossága a többváltozós függvényekhez hasonlóan definiálható, így azzal itt nem foglalkozunk, csak a differenciálhatóságot vizsgáljuk részletesebben.

Az

$$u: \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D$$

függvényt a  $D$  tartomány  $\mathbf{r}_0 \in D$  torlódási pontjában *differenciálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan  $\mathbf{d}$  vektor, amelyre:

$$\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|u(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_0) - \mathbf{d} \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = \lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|\Delta u - \mathbf{d} \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = 0.$$

A  $\mathbf{d}$  vektort a skalártér  $\mathbf{r}_0$  helyen vett *derivált*- vagy *gradiensvektorának* nevezzük.

Jelölése:

$$\mathbf{d} = \left. \frac{du}{d\mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}_0} = \text{grad } u(\mathbf{r}_0).$$

(A definíció a kétváltozós függvények differenciálhatóságának megfelelője.)

Ha a skálár-vektor függvény a  $T \subset D$  tartomány minden pontjában differenciálható, akkor  $T$ -n differenciálhatónak nevezzük, és deriváltja az

$$\mathbf{r} \mapsto \frac{du}{d\mathbf{r}} = \text{grad } u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T$$

(vektor-vektor) függvény.

Igazolható, hogy rögzített koordináta-rendszer esetén az

$$u: \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}) = u(x, y, z) \quad \mathbf{r} \in D$$

függvény deriváltja:

$$\mathbf{r} \mapsto \text{grad } u(\mathbf{r}) = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in T.$$

Tehát a gradiensvektor koordinátáit a megfelelő koordináták szerinti parciális deriváltak adják.

A kétváltozós függvények differenciálhatóságához hasonlóan  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  létezésének szükséges feltétele  $u$  parciálisainak létezése az  $\mathbf{r}_0$  helyen, elégséges feltétele a parciálisok folytonossága  $\mathbf{r}_0$ -ban.

III.3-hoz hasonlóan a skalár-vektor függvények esetében is értelmezhető az iránymenti derivált fogalma.

Legyen

$$u: \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D$$

és

$$\mathbf{r}: t \mapsto \mathbf{r}_0 + e t, \quad t \in R (|e| = 1),$$

ha létezik az

$$f = u \circ \mathbf{r} \quad t \in R$$

egyváltozós függvény deriváltja a  $t_0 = 0$  helyen, akkor ezt az  $u$ -nak az  $\mathbf{r}_0$  helyhez tartozó  $e$  irányban vett *iránymenti deriváltjának* nevezzük; jelölése:

$$\left. \frac{du}{de} \right|_{\mathbf{r}_0}.$$

Ha  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  létezik, akkor:

$$\left. \frac{du}{de} \right|_{\mathbf{r}_0} = e \cdot \text{grad } u(\mathbf{r}_0).$$

(Az iránymenti derivált létezésének nem szükséges feltétele az adott pontbeli differenciálhatóság.)

Mivel

$$e \cdot \text{grad } u(\mathbf{r}_0) = |e| \cdot |\text{grad } u(\mathbf{r}_0)| \cdot \cos \alpha,$$

ahol  $\alpha$  az  $e$  és a  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  vektorok szöge, így az iránymenti derivált  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  irányában maximális.

A skalár-vektor függvények szemléltetése a háromváltozós függvények II.2-ben megismert szemléltetési módjával azonos.

Az

$$F = \{\mathbf{r} \mid u(\mathbf{r}) = c, \quad \mathbf{r} \in D\}$$

halmaz pontjai általában felületet alkotnak. E felületekkel, a skalár-vektor függvény  $c \in R$  értékhez tartozó szintfelületeivel, szemléltethető a függvény.

Ha  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  létezik és zérustól különböző, akkor az  $\mathbf{r}_0$  ponton áthaladó szintfelületnek az  $\mathbf{r}_0$  pontban van érintősíkjá, és ennek normálvektora:

$$\mathbf{n} = \text{grad } u(\mathbf{r}_0).$$

*Megjegyzés:* Mivel a gradiens a skalár-vektor függvény deriváltja, így a grad operátort a differenciálási szabályoknak megfelelően kell alkalmazni.

## Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$u: \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}^2, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

függvény szintfelületeit és a gradiensfüggvényt!

A  $c \in R^+$ -hoz tartozó szintfelület egyenlete:

$$\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 = c,$$

amelynek megoldásai egy origó középpontú  $c$  sugarú gömb pontjai. A szintfelületek tehát origó középpontú koncentrikus gömbök.

Határozzuk meg a gradiensfüggvényt!

Mivel

$$\Delta u = (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})^2 - \mathbf{r}^2 = 2\mathbf{r}(\Delta \mathbf{r}) + (\Delta \mathbf{r})^2,$$

tehát

$$\text{grad } u = 2\mathbf{r},$$

hiszen ekkor

$$\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|\Delta u - \text{grad } u \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = \lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})^2}{|\Delta \mathbf{r}|} = 0.$$

Rögzített koordináta-rendszer esetén

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ebből számolva a gradiensfüggvényt:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 2\mathbf{r},$$

ami természetesen az előzővel megegyező.

*Megjegyzés:*

a) Minden  $\mathbf{r}_0$  pontban  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  párhuzamos az  $\mathbf{r}_0$  vektorral, így  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  merőleges a szintfelületre, hiszen a gömb sugara a gömbfelületet merőlegesen metszi.

b) Könnyen látható, hogy az

$$u: \mathbf{r} \mapsto |\mathbf{r}|^n, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

függvény esetén is az előzőhöz hasonló gömbök a szintfelületek.

A feladat eredményét és az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva határozzuk meg a függvények deriváltját:

$n=1$  esetén

$$\text{grad } |\mathbf{r}| = \text{grad } \sqrt{|\mathbf{r}|^2} = \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{r}|^2}} 2\mathbf{r},$$

azaz

$$\text{grad } |\mathbf{r}| = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0},$$

ennek felhasználásával:

$$\text{grad } |\mathbf{r}|^n = n|\mathbf{r}|^{n-1} \cdot \text{grad } |\mathbf{r}| = n|\mathbf{r}|^{n-1} \cdot \mathbf{e}_r.$$

2. Határozza meg az

$$u: \mathbf{r} \mapsto n\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

( $n$  állandó vektor) függvény szintfelületeit, és a gradiensfüggvényt!

Mivel tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  esetén van olyan  $\mathbf{r}_0$  vektor, amelyre

$$c = n\mathbf{r}_0,$$

így a szintfelületek egyenlete:

$$n\mathbf{r} = c = n\mathbf{r}_0,$$

azaz

$$n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0},$$

tehát a szintfelületek az  $n$  vektorra merőleges síkok.

Határozzuk meg a gradiensfüggvényt! Mivel

$$\Delta u = n(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - n\mathbf{r} = n \cdot \Delta \mathbf{r},$$

így:

$$\text{grad } u = n,$$

azaz a szintfelületekre merőleges vektor.

Természetesen rögzített koordináta-rendszer esetén ugyanez az eredmény adódik.

3. Határozza meg az

$$u: \mathbf{r} \mapsto |\mathbf{i} \times \mathbf{r}|, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

függvény szintfelületeit, és a függvény gradiensét!

Mivel

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{r}| \sin(\mathbf{i}, \mathbf{r}) = |\mathbf{r}| \cdot \sin(\mathbf{i}, \mathbf{r}),$$

amely érték az  $\mathbf{r}$  vektor  $\mathbf{i}$ -re merőleges vetületének hossza, így minden  $c \in \mathbb{R}^+$  esetén a szintfelület egy olyan  $c$  sugarú hengerfelület, amelynek tengelye az  $x$  tengely, hiszen a felület minden pontja  $c$  távolságra van az  $x$  tengelytől.

A gradiens meghatározásához szükségünk van  $u$  koordinátás alakjára:

$$\mathbf{i} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = y\mathbf{k} - z\mathbf{j},$$

tehát

$$u: \mathbf{r} \mapsto \sqrt{y^2 + z^2},$$

ebből:

$$\text{grad } u = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

grad  $u$  tehát az  $x$  tengely pontjai kivételével minden pontban létezik, és iránya merőleges az  $x$  tengelyre, hiszen

$$\mathbf{i} \cdot \text{grad } u = 0.$$

4. Határozza meg az

$$u : (x, y, z) \mapsto x^2 y^4 z^3 + 3x^2 y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény  $u=4$  szintfelületének

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

pontbeli érintősíkját!

A szintfelület normálvektora :

$$\mathbf{n} = \text{grad } u(\mathbf{r}_0),$$

ha

$$\text{grad } u(\mathbf{r}_0) \neq 0.$$

Mivel

$$\text{grad } u = (2xy^4z^3 + 6xy)\mathbf{i} + (4x^2y^3z^3 + 3x^2)\mathbf{j} + 3x^2y^4z^2\mathbf{k},$$

így

$$\mathbf{n} = 8\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

azaz a sík egyenlete :

$$8(x-1) + 7(y-1) + 3(z-1) = 0.$$

5. Mely pontokban lesz az

$$u : (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 5z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény  $u=10$ -hez tartozó szintfelületének érintősíkja párhuzamos a

$$40x + 10y + 50z = 21$$

síkkal?

Adjon meg egy olyan pontot a szintfelületen, amelyben az érintősík merőleges az adott síkra !

A szintfelület a

$$4x^2 + y^2 + 5z^2 = 10$$

egyenletű ellipszoid.

Az adott sík akkor párhuzamos az érintősíkkal, ha normálvektora párhuzamos a grad  $u(\mathbf{r}_0)$  vektorral. Ez azt jelenti, hogy van olyan  $\lambda \neq 0$  szám, amelyre :

$$\text{grad } u(\mathbf{r}_0) = \lambda \mathbf{n}.$$

Mivel

$$\text{grad } u = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k},$$

így az előzőek szerint a

$$8x_0 = 40\lambda,$$

$$2y_0 = 10\lambda,$$

$$10z_0 = 50\lambda$$

egyenletrendszernek kell teljesülnie.

A fenti egyenlőségekből

$$x_0 = 5\lambda, \quad y_0 = 5\lambda, \quad z_0 = 5\lambda.$$

Ezt a szintfelület egyenletébe helyettesítve :

$$4(5\lambda)^2 + (5\lambda)^2 + 5(5\lambda)^2 = 10,$$

ahonnan  $\lambda_1 = \frac{1}{5}$  és  $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$  adódik.

Tehát két olyan pont van a szintfelületen, amelyekben az érintősík az adott síkkal párhuzamos. Ezek :

$$P_1(1; 1; 1) \quad \text{és} \quad P_2(-1; -1; -1).$$

Hasonlóan kereshetünk a szintfelületen olyan pontot, amelyhez tartozó érintősík az adott síkra merőleges. Ez abban a pontban teljesül, amelyben grad  $u(\mathbf{r}_0)$  merőleges az  $\mathbf{n}$  vektorra, azaz

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } u(\mathbf{r}_0) = 0,$$

tehát :

$$40 \cdot 8x_0 + 10 \cdot 2y_0 + 50 \cdot 10z_0 = 0.$$

Mivel

$$u(r_0) = 10,$$

így a

$$4x_0^2 + y_0^2 + 5z_0^2 = 10$$

egyenlőség is teljesül. Ezen egyenletrendszer egy megoldását megkaphatjuk a  $z_0 = 0$  választással. (Ekkor az  $xy$  síkban keressük a pontot.)  $z = 0$  választás esetén az egyenletrendszer egy megoldása:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{26}}; -\frac{16}{\sqrt{26}}; 0\right).$$

*Megjegyzés:* Végtelen sok olyan pont van, amelyben ez utóbbi feltétel teljesül. Ezen pontok az ellipszoid és a

$$16x + y + 25z = 0$$

sík metszésvonalának, egy ellipszisnek a pontjai. (A metszésvonal előállítására történhet például az  $y = t$  paraméterválasztással.)

6. Igazolja, hogy az

$$u : (x, y, z) \mapsto \frac{z^2}{xy}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény  $u = 1$  szintfelületének érintősíkjai illeszkednek az origóra!

Ha a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pont rajta van az  $u = 1$  szintfelületen, akkor

$$\frac{z_0^2}{x_0 y_0} = 1.$$

Az érintő sík normálisát  $\text{grad } u(r_0)$  adja:

$$\text{grad } u(r_0) = -\frac{z_0^2}{x_0^2 y_0} \mathbf{i} - \frac{z_0^2}{x_0 y_0^2} \mathbf{j} + \frac{2z_0}{x_0 y_0} \mathbf{k},$$

így az érintő sík egyenlete:

$$-\frac{z_0^2}{x_0^2 y_0} (x - x_0) - \frac{z_0^2}{x_0 y_0^2} (y - y_0) + \frac{2z_0}{x_0 y_0} (z - z_0) = 0.$$

Rendezve:

$$-\frac{z_0^2}{x_0^2 y_0} x - \frac{z_0^2}{x_0 y_0^2} y + \frac{2z_0}{x_0 y_0} z = 0,$$

azaz a sík valóban áthalad az origón.

*Megjegyzés:* A megoldásból látszik, hogy nemcsak az  $u = 1$  szintfelület érintősíkjai, hanem bármely szintfelület érintősíkjai az origón áthaladó síkok. A szintfelületek kúpfelületek, amelyek csúcsa az origó.

Ugyanis (I. a II.2. nyeregfelülete!), ha bevezetjük az

$$u = (x + y) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

és

$$v = (x - y) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

új változókat, amely mint láttuk a  $\bar{z}$  tengely körüli forgatással egyenértékű transzformáció, akkor:

$$z^2 = xy = 2(u^2 - v^2)$$

adódik, amely valóban egy kúpfelület egyenlete.

7. Határozza meg az

$$u : (x, y, z) \mapsto x^3 y + y^2 z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény iránymenti deriváltját az

$$r_0(2; 1; 3)$$

pontban, az

$$a(1; 2; -2)$$

vektor irányában!

E szakasz bevezetőjében láttuk, hogy

$$\left. \frac{du}{de_a} \right|_{r_0} = \text{grad } u(r_0) \cdot e_a.$$

Az  $\mathbf{a}$  irányú egységvektor:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Mivel

$$\text{grad } u = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + 2yz)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k},$$

így az  $\mathbf{r}_0$  helyen:

$$\text{grad } u(\mathbf{r}_0) = 12\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Tehát az  $\mathbf{a}$  irányban vett iránymenti derivált:

$$\left. \frac{du}{d\mathbf{e}_a} \right|_{\mathbf{r}_0} = \text{grad } u(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e}_a = \frac{38}{3}.$$

8. Határozza meg az

$$u: (x, y, z) \mapsto x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény iránymenti deriváltjának maximumát az  $\mathbf{r}_0(1; 4; 3)$  pontban, és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!

Láttuk, hogy

$$\left. \frac{du}{d\mathbf{e}} \right|_{\mathbf{r}_0} = \text{grad } u(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e},$$

ahonnan a skalárszorzat definíciója alapján:

$$\left. \frac{du}{d\mathbf{e}} \right|_{\mathbf{r}_0} = |\text{grad } u(\mathbf{r}_0)| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos \alpha,$$

ahol  $\alpha$  jelöli a  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  és  $\mathbf{e}$  vektorok szögét. Mivel

$$|\mathbf{e}| = 1$$

és

$$|\cos \alpha| \leq 1,$$

így

$$\left| \left. \frac{du}{d\mathbf{e}} \right|_{\mathbf{r}_0} \right| \leq |\text{grad } u(\mathbf{r}_0)|.$$

Tehát az iránymenti derivált maximuma az  $\mathbf{r}_0$  pontban:

$$|\text{grad } u(\mathbf{r}_0)| = \sqrt{(2x_0)^2 + y_0^2 + (2z_0)^2} = \sqrt{56}.$$

Ez a maximális érték akkor adódik, ha  $\alpha = 0$ , azaz az  $\mathbf{e}$  vektor párhuzamos az

$$\mathbf{a} = \text{grad } u(\mathbf{r}_0) \text{ vektorral.}$$

Az  $\mathbf{a}$  vektor:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$$

így az iránymenti derivált az

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{\sqrt{56}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{56}}\mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{56}}\mathbf{k}$$

egységvektor irányában maximális.

9. Határozza meg, mely irányban maximális az

$$u: (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény iránymenti deriváltja az

$$\mathbf{r}_0(1; 3)$$

pontban!

Adjon meg egy olyan irányt, amelyre az  $\mathbf{r}_0$  ponthoz tartozó iránymenti derivált zérus!

Láttuk, hogy az iránymenti derivált a  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$  vektor irányában maximális; a maximum iránya tehát:

$$\text{grad } u(\mathbf{r}_0) = 2x_0\mathbf{i} + 2y_0\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

Ez a maximális érték:

$$|\text{grad } u(\mathbf{r}_0)| = \sqrt{40}.$$

Az iránymenti derivált bármely  $\text{grad } u(\mathbf{r}_0)$ -ra merőleges vektor irányában zérus. Ilyen vektor például a  $\mathbf{b}(-6; 2)$  vektor. Ekkor ugyanis:

$$\left. \frac{du}{d\mathbf{e}_b} \right|_{\mathbf{r}_0} = \text{grad } u(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e}_b = 0.$$

10. Határozza meg az

$$u : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény  $r_0(1; 1; \sqrt{2})$  pontbeli iránymenti deriváltját az

$$r : t \mapsto 2 \cos^2 t i + 2 \cos t \sin t j + 2 \sin t k, \quad t \in \mathbb{R}$$

térgörbe  $t_0 = \frac{\pi}{4}$  helyhez tartozó érintővektora irányában!

Az

$$r : t \mapsto r(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

függvénnyel adott térgörbe rajta van az

$$u = u(r_0)$$

szintfelületen. Ugyanis:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \cos^4 t + 4 \cos^2 t \sin^2 t + 4 \sin^2 t = \\ &= 4 \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) + 4 \sin^2 t = 4 = u(r_0). \end{aligned}$$

Mivel a görbe illeszkedik a szintfelületre, így ennek érintővektorára a grad  $u(r_0)$  vektor merőleges, tehát a keresett iránymenti derivált zérus.

(Könnyen látható, hogy  $i\left(\frac{\pi}{4}\right)$  és grad  $u(r_0)$  létezik.)

*Megjegyzés:* Az  $u=4$  szintfelület egy két egység sugarú origó középpontú gömbfelület. A térgörbe e felület és az

$$x^2 + y^2 - 2z = 0$$

egyenletű hengerfelület metszésvonala. (Ún. Viviani-görbe, l. 65. ábra.)

11. Igazolja, hogy az

$$r \mapsto u(r) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{ha } r \neq 0 \\ 0, & \text{ha } r = 0 \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}^3$$

függvény nem differenciálható az origóban!

Határozza meg, mely irányokban létezik e függvény origóbeli iránymenti deriváltja!

Az origóbeli parciális deriváltak:

$$u'_x(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x; 0; 0) - u(0)}{\Delta x} = 0,$$

mivel a számláló azonosan zérus.

Hasonlóan látható be, hogy

$$u'_y(0) = u'_z(0) = 0.$$

Így, ha  $u$  az origóban deriválható, origóbeli deriváltvektora csak a nullvektor lehet, azaz a deriválhatósághoz a

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{|u(\Delta r) - u(0) - d\Delta r|}{|\Delta r|} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(\Delta r)}{|\Delta r|} = 0$$

egyenlőségnek kellene teljesülnie.

Gömbi koordinátákra áttérve:

$$u(\Delta r) = |\Delta r| \cdot \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi,$$

tehát

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(\Delta r)}{|\Delta r|} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi,$$

amely határérték nem létezik, így  $u$  valóban nem deriválható az origóban.

Vizsgáljuk meg, mely irányokra létezik az origóbeli iránymenti derivált!

Láttuk, hogy ennek létezése

$$t \mapsto u(0 + et), \quad t \in \mathbb{R}$$

függvény  $t=0$  helyen való differenciálhatóságát jelenti.

Legyen az  $e$  egységvektor:

$$e = \cos \varphi \sin \vartheta i + \sin \varphi \sin \vartheta j + \cos \vartheta k.$$

Ekkor:

$$u(et) = t \cos \varphi \sin \vartheta \sin^2 \vartheta \cos \vartheta,$$

azaz a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(et)}{t}$$

határérték bármely rögzített  $\varphi, \vartheta$  pár esetén, azaz bármely irány mentén létezik, noha  $u$  nem differenciálható.



#### 4. Vektor-vektor függvények

Ha a háromdimenziós tér vektorainak egy  $D$  részhalmazát leképezzük e tér  $D$ -tól nem feltétlenül különböző részhalmazára, akkor *vektor-vektor függvényt* (azaz *vektorteret*) értelmezünk.

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D$$

Ilyen függvény például a IV.3-ban szereplő skalártér deriváltja az

$$\mathbf{r} \mapsto \text{grad } u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T$$

függvény.

Ha térben rögzítjük az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  egységvektorokat, és ezzel együtt egy Descartes-féle koordináta-rendszert, akkor e koordináta-rendszerben  $\mathbf{v}$  mindhárom koordinátája egy-egy háromváltozós függvénnyel jellemezhető:

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in D.$$

E függvény határértéke, folytonossága az előzőekhez hasonlóan értelmezhető, így azzal nem foglalkozunk.

A

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D$$

függvényt a  $D$  tartomány  $\mathbf{r}_0 \in D$  torlódási pontjában differenciálhatónak nevezzük, ha van olyan  $A$  tenzor, amelyre:

$$\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) - A \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = \lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v} - A \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = 0.$$

Az  $A$  tenzort a vektortér  $\mathbf{r}_0$  pontbeli deriválttenzorának nevezzük:

$$A = \left. \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}_0}.$$

A tenzor lineáris vektor-vektor függvény, azaz bármely  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektor és  $\lambda$ ,  $\mu \in R$  esetén

$$A(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda(A\mathbf{a}) + \mu(A\mathbf{b}).$$

Speciálisan, ha minden vektor képe önmaga, *egységtenzor*ról beszélünk:

$$E\mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3.$$

Rögzített koordináta-rendszer esetén a deriválttenzor létezésének szükséges és elégséges feltétele  $\mathbf{v}$  koordinátáinak differenciálhatósága. Ekkor a deriválttenzor mátrixa:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

A vektorteret olyan görbék segítségével szemléltetjük, amelyeknek érintője minden  $\mathbf{r}_0$  pontban  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ -al párhuzamos, sűrűségük a vektortér nagyságával arányos. (E vonalakat az Olvasó fizikai tanulmányaiból áramvonal, erővonal néven ismeri.)

Lényeges fizikai tartalma van a deriválttenzor bizonyos invariánsainak.

Legyen a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D$$

függvény differenciálható az  $\mathbf{r}_0 \in D$  helyen. Az  $\mathbf{r}_0$  pontbeli deriválttenzor sajátértékeinek összegét (mely érték a koordináta-rendszer megválasztásától független) a vektortér  $\mathbf{r}_0$  pontbeli *divergenciájának*, a deriválttenzor vektorinvariánsát a vektortér  $\mathbf{r}_0$  pontbeli rotációjának nevezzük (1. a 2. és 3. feladatot!).

Rögzített koordináta-rendszer esetén a divergencia:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

A definícióból következően a divergencia *skalár* mennyiség. ( $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$  a vektortér  $\mathbf{r}_0$  pontbeli forrassűrűségére jellemző. Ha  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  a korlátos zárt  $T \subset D$  tartomány minden pontjában, akkor a vektorteret e tartományon *forrásmentesnek* nevezzük. E fogalmak fizikai tartalmát a felületi integrál, ill. Gauss-tétel tárgyalása során világítjuk meg bővebben.)

Rögzített koordináta-rendszer esetén a rotáció:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

A rotáció *vektormennyiség*;  $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$  a vektortér  $\mathbf{r}_0$  pontbeli örvénysűrűségére jellemző. Ha a  $T$  tartomány pontjaiban  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , akkor a vektorteret  $T$ -ben *örvénymentesnek* nevezzük. (L. Stokes-tétel.)

Ha bevezetjük a nabla-operátort:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

akkor ennek felhasználásával:

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \nabla \cdot u \text{ (skalárral való szorzás),} \\ \text{div } \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \text{ (skalárszorzat),} \end{aligned}$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

*Megjegyzés:* Úgy kezelhető a nabla-operátor, mint differenciáloperátor, így például:

$$\nabla(u \cdot \mathbf{v}) = (\nabla u) \cdot \mathbf{v} + u(\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

a szorzat deriválási szabályához hasonlóan.

## Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

függvény deriválttenzorát! Írja fel e tenzor mátrixát!

A függvény deriválttenzora az egységtenzor, ugyanis:

$$E \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r},$$

és

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{r}$$

miatt

$$\frac{|\Delta \mathbf{v} - E \Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = 0,$$

hiszen a számláló azonosan zérus.

Az egységtenzor mátrixa az egységmátrix, azaz:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Megjegyzés:* E vektortér divergenciája állandó

$$\text{div } \mathbf{v} = 3,$$

rotációja a tér minden pontjában zérus.

2. Írja fel annak a  $T$  tenzornak a mátrixát, amely minden  $\mathbf{r}$  vektorhoz  $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$ -et rendel, ahol a rögzített vektor:

$$T\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3.$$

Legyenek az a vektor koordinátái  $a_1, a_2, a_3$ . Határozzuk meg az egységvektorok képét!

$$T\mathbf{i} = \mathbf{a} \times \mathbf{i} = a_3 \mathbf{j} - a_2 \mathbf{k},$$

$$T\mathbf{j} = \mathbf{a} \times \mathbf{j} = a_1 \mathbf{k} - a_3 \mathbf{i},$$

$$T\mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{k} = a_2 \mathbf{i} - a_1 \mathbf{j}.$$

Egy tetszőleges

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

vektor képe:

$$T\mathbf{r} = x(T\mathbf{i}) + y(T\mathbf{j}) + z(T\mathbf{k}),$$

azaz a  $T$  tenzor mátrixának oszlopvektorait az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vektorok képe adja.  $T$  tehát az alábbi mátrixszal adható meg:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor ugyanis

$$T\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ = (-a_3y + a_2z)\mathbf{i} + (a_3x - a_1z)\mathbf{j} + (-a_2x + a_1y)\mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}.$$

( $T$  mátrixának és az  $\mathbf{r}$  vektornak szorzásakor a sor-oszlop szorzást alkalmaztuk.)

*Megjegyzés:* E tenzor a teret az  $\mathbf{a}$  vektorra merőleges síkra képezi le. Szokásos a  $T = \mathbf{a} \times$  ( $a$  kereszti) elnevezés.

3. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

( $\mathbf{a}$  állandó) vektor-vektor függvény deriválttenzorát!

Mivel

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = (a_2z - a_3y)\mathbf{i} - (a_1z - a_3x)\mathbf{j} + (a_1y - a_2x)\mathbf{k},$$

így a deriválttenzor mátrixa:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A deriválttenzor tehát az előző feladatban szereplő  $\mathbf{a} \times$  tenzor.

E vektortér rotációja:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2z - a_3y & a_3x - a_1z & a_1y - a_2x \end{vmatrix} = 2\mathbf{a},$$

divergenciája pedig azonosan zérus.

*Megjegyzés:*

a) Minden mátrix (tehát minden tenzor is) egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus részre. Minden antiszimmetrikus mátrix  $\mathbf{a} \times$  alakú, azaz egyértelműen meghatároz egy  $\mathbf{a}$  vektort. (Az egész teret  $\mathbf{a}$ -ra merőleges síkra képezi le.) Igazolható, hogy e vektor független a koordináta-rendszer választásától. E vektor a tenzor vektorvariánsa.

b) A  $\mathbf{v}$  vektorteret az  $\mathbf{a}$  tengely körül  $|\mathbf{a}|$  nagyságú szögsebességgel forgó merev test sebességvektorának tekinthetjük.

Látjuk, hogy ez esetben a vektortér rotációja a szögsebesség irányát adja meg. Azaz a rotáció iránya a forgástengely irányába mutat, nagysága a szögsebesség nagyságával megegyező.

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  állandó vektorok) deriválttenzorát!

Legyen a választott koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}!$$

Ekkor:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}) = (b_1x + b_2y + b_3z)(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}).$$

Tehát a deriválttenzor mátrixa:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

E vektortér divergenciája — a mátrix főátlóbeli elemeinek összege —:

$$\text{div } \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \mathbf{a}\mathbf{b}.$$

A vektortér rotációja (l. a 3. feladat megjegyzését!):

$$\text{rot } \mathbf{v} = (a_3b_2 - a_2b_3)\mathbf{i} + (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_2b_1 - a_1b_2)\mathbf{k},$$

azaz

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

tehát  $\text{div } \mathbf{v}$  és  $\text{rot } \mathbf{v}$  is csak az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektoroktól függ.

*Megjegyzés:* A deriváltmátrix az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok *diadikus* (tenzorális) szorzata:  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ .

(Az  $\mathbf{a}$  oszlopvektort szorozzuk a  $\mathbf{b}$  sorvektorral, sor-oszlop szorzással!)

Könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

azaz

$$\frac{d}{d\mathbf{r}} (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{r} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}.$$

5. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : (x, y, z) \mapsto x^2 y \mathbf{i} + y^2 z \mathbf{j} + z^2 x \mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

vektortér divergenciáját és rotációját!

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 2xy + 2yz + 2xz,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & y^2 z & z^2 x \end{vmatrix} = -y^2 \mathbf{i} - z^2 \mathbf{j} - x^2 \mathbf{k}.$$

6. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : (x, y, z) \mapsto y \mathbf{i} - x \mathbf{j}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

vektortér rotációját! Értelmezze az eredményt!

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k}.$$

A vektortér  $z$ -től független, hengerszimmetrikus tér. A  $z$  tengelyű,  $R$  sugarú hengerfelület minden pontjában:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

Könnyen látható az is, hogy a hengerfelületre merőleges  $\mathbf{a}(x_0; y_0; 0)$  vektor  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ -ra is merőleges, hiszen skalárszorzatuk zérus. Tehát e vektortér trajektóriái, erővonalai a hengerfelület palástjára illeszkedő körök. Így  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  iránya a henger tengelyével megegyező, azaz az erővonalak csavardási tengelyének irányába mutat.

7. Legyen

$$u : \mathbf{r} \mapsto \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad D_u = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

és

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u.$$

Igazolja, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Mivel

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

azt kell igazolnunk, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Azt, hogy a fenti  $u$  függvény eleget tesz e differenciálegyenletnek a kétváltozós függvények tárgyalása során már igazoltuk.

*Megjegyzés:* Szokásos a

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

operátor (Laplace-féle  $\Delta$ ) bevezetése is. Ennek felhasználásával:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u.$$

8. Igazolja, hogy ha a

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u, \quad \mathbf{r} \in D$$

vektortér folytonosan differenciálható egy korlátos zárt  $T$  tartományban, akkor itt  $\mathbf{v}$  örvénymentes, azaz

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in T.$$

Láttuk, hogy

$$\mathbf{v} = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

tehát

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right). \end{aligned}$$

Mivel  $\mathbf{v}$  folytonosan differenciálható, így a szereplő másodrendű parciálisok egyenlők, azaz  $\text{rot } \mathbf{v}$  mindhárom koordinátája zérus, amivel az állítást igazoltuk.

*Megjegyzés:* A  $\nabla$  operátor segítségével formálisan könnyen belátható a feladat állítása:

$$\text{rot grad } u = \nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla) u = 0,$$

hiszen két azonos vektor vektoriális szorzata zérus.

9. Igazolja, hogy a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{e}, \quad D_v = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

vektortér rotációja zérus!

A 3. szakasz 1. feladatában láttuk, hogy

$$\text{grad } |\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad D = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\},$$

tehát a vektortér egy skálár-vektor függvény gradienseként írható fel.

Mivel e vektortér az értelmezési tartománya minden pontjában folytonosan differenciálható, így az előző feladat szerint rotációja zérus.

10. Igazolja, hogy ha a

$$\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \in D$$

vektortér folytonosan differenciálható valamely  $T$  tartományban, akkor e tartomány minden pontjában

$$\text{div } \mathbf{w} = 0.$$

Mivel

$$\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

így e vektortér divergenciája:

$$\text{div } \mathbf{w} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y}.$$

A folytonos deriválhatóságból következően a másodrendű vegyes parciális deriváltak egyenlők, így

$$\text{div rot } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in T,$$

azaz a  $\text{rot } \mathbf{v}$  vektortér  $T$ -ben forrásmentes.

*Megjegyzés:* A  $\nabla$  operátor alkalmazásával most is könnyen igazolható az állítás:

$$\text{div rot } \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0,$$

mivel a vegyesszorzat zérus, ha a vektorok egysíkúak.

11. Igazolja, hogy ha a  $\text{rot } \mathbf{v}$  vektortér egy  $T$  tartományban folytonosan differenciálható, akkor

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \in T,$$

ahol

$$\Delta = \nabla^2 \text{ a Laplace-féle operátor!}$$

A folytonos differenciálhatóságból következően a bal és jobb oldalon álló függvények egyaránt léteznek  $T$ -ben, csak ezek egyenlőségét kell igazolnunk. Dolgozzunk a  $\nabla$  operátorral!

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Vektorok körében ismert az ún. kifejtési tétel, mely szerint:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Ezt alkalmazva :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \nabla) \mathbf{v} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v},$$

amit igazolnunk kellett.

12. Legyenek az

$$u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D_1$$

és a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D_2$$

függvények differenciálhatók egy  $T$  tartományban!

Határozza meg a

$$\mathbf{w} : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D_1 \cap D_2$$

vektortér divergenciáját és rotációját!

Alkalmazzuk a  $\nabla$  operátort!

Tudjuk, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \nabla \mathbf{w},$$

másrészt, mivel  $\nabla$  differenciáloperátor, így szorzatra alkalmazva :

$$\nabla(u \cdot \mathbf{v}) = (\nabla u) \cdot \mathbf{v} + u(\nabla \mathbf{v}).$$

Tehát:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \nabla(u \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\nabla u) + u(\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \in T.$$

$u$  és  $\mathbf{v}$  differenciálhatóságából következően  $\operatorname{grad} u$  és  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  létezik  $T$ -ben, így ugyanitt  $\operatorname{div} \mathbf{w}$  is létezik. Hasonlóképpen határozható meg  $\mathbf{w}$  rotációja is:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{w} &= \nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times (u\mathbf{v}) = \nabla u \times \mathbf{v} + u(\nabla \times \mathbf{v}) = \\ &= (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{v} + u \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \in T. \end{aligned}$$

Mivel  $\operatorname{grad} u$  és  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  létezik  $T$ -n, így  $\operatorname{rot} \mathbf{w}$  is létezik.

13. Legyen

$$u : \mathbf{r} \mapsto r^2, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

és

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto r^2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3.$$

Határozza meg — amennyiben értelmezett —

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \\ &\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{grad} u, \\ &\operatorname{div} \operatorname{div} \operatorname{grad} u, \\ &\operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned}$$

értékét az  $\mathbf{r}_0(1; 1; 1)$  helyen!

a) Láttuk, hogy (l. a 10. feladatot)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in R^3,$$

így  $\mathbf{e}$  skalártér gradiense is zérus.

b) A 8. feladatban igazoltuk, hogy

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad \mathbf{r} \in R^3,$$

így ennek rotációja is zérus.

c) Láttuk, hogy (l. a 7. feladatot)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = \text{skalár},$$

skalárnak viszont nincs divergenciája, tehát a felírt kifejezés nem értelmezhető!

d) Mivel  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  skalár, ennek van gradiense, és ez vektor, ennek viszont létezik a rotációja, így a felírt kifejezés értelmezhető.

Mivel tudjuk, hogy

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0,$$

így

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in R^3.$$

14. Határozza meg a

$$\mathbf{w} : \mathbf{r} \mapsto r^2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

függvény divergenciáját és rotációját!

Legyen

$$u : \mathbf{r} \mapsto r^2, \quad \mathbf{r} \in R^3,$$

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3.$$

Ekkor:

$$\mathbf{w} = u \cdot \mathbf{v}.$$

A 12. feladat eredményét alkalmazva:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} (u\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot 2\mathbf{r} + r^2 \cdot 3 = 5r^2.$$

(Láttuk ugyanis, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} r^2 &= 2\mathbf{r}, \\ \operatorname{div} \mathbf{r} &= 3.) \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \operatorname{rot} (u\mathbf{v}) = (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{v} + u \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{r} \times \mathbf{r} + r^2 \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Természetesen  $\mathbf{w}$  koordinátás alakjából ugyanez az eredmény adódik.

15. Legyen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} : \mathbf{r} &\mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} &\in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{w} : \mathbf{r} &\mapsto \mathbf{w}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} &\in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

és

$$u = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Határozza meg a skalártér gradiensét, feltéve, hogy  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  differenciálhatóak!

Látszólag könnyen célt érhetünk a nabla operátor alkalmazásával:

$$\nabla u = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{w}) = (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{w} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w}.$$

Könnyen beláthatjuk azt, hogy nem a helyes eredményt kaptuk.

Legyen például

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \mathbf{r}, \\ \mathbf{w}(\mathbf{r}) &= \mathbf{r}, \end{aligned}$$

akkor

$$u : \mathbf{r} \mapsto r^2, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

tehát

$$\operatorname{grad} u = 2\mathbf{r}.$$

A fenti összefüggés alkalmazásával azonban:

$$\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{r} = 6\mathbf{r},$$

hiszen

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 3 \quad (\text{l. az 1. feladatot}),$$

a nabla operátor mechanikus alkalmazásával tehát nem érünk célt.

Induljunk el más úton!

$\mathbf{v}$  differenciálhatóságából következik, hogy

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \Delta \mathbf{r} + \varepsilon(\Delta \mathbf{r}),$$

ahol

$$\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\varepsilon(\Delta \mathbf{r})}{|\Delta \mathbf{r}|} = 0.$$

Ezt alkalmazva:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) &= \mathbf{v}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \\ &= \left[ \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \Delta \mathbf{r} + \varepsilon_1(\Delta \mathbf{r}) \right] \cdot \left[ \mathbf{w}(\mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}} \Delta \mathbf{r} + \varepsilon_2(\Delta \mathbf{r}) \right] - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Rendezve kapjuk, hogy:

$$\Delta u = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}} \Delta \mathbf{r} + \mathbf{w} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \Delta \mathbf{r} + \varepsilon.$$

Tetszőleges  $\mathbf{A}$  tenzorra és  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorokra:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}\mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{A}^*\mathbf{a}),$$

ahol  $\mathbf{A}^*$  az  $\mathbf{A}$  tenzor adjungáltja. (Az adjungált tenzor mátrixát az eredeti mátrix elemeinek a főátlóra való tükrözésével kapjuk, ez a mátrix transzponáltja.)

Ennek alkalmazásával:

$$\Delta u = \Delta \mathbf{r} \cdot \left( \left( \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}} \right)^* \mathbf{v} + \left( \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \right)^* \mathbf{w} \right),$$

azaz:

$$\operatorname{grad} u = \left( \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}} \right)^* \mathbf{v} + \left( \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \right)^* \mathbf{w}.$$

A 4. feladat megjegyzésében szereplő diadikus szorzat alkalmazásával:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \mathbf{v} \circ \nabla.$$

(Ezt az állítást az Olvasó könnyen beláthatja, ha a 4. feladatban szereplő  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok helyébe a  $\mathbf{v}$ , ill.  $\nabla$  vektor koordinátáit helyettesíti.)

Látható az is, hogy a két tényező cseréje éppen a mátrix transzponáltját szolgáltatja:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)^* = \nabla \circ \mathbf{v}.$$

Tehát végeredményben:

$$\text{grad}(\mathbf{v}\mathbf{w}) = (\nabla \circ \mathbf{v})\mathbf{w} + (\nabla \circ \mathbf{w})\mathbf{v}.$$

E feladattal arra szeretnénk felhívni az Olvasó figyelmét, hogy a  $\nabla$ -operátor mechanikus, gondolkodás nélküli alkalmazása néha tévútra vezethet.

*Megjegyzés:* Bizonyítás nélkül közlünk néhány fontosabb deriválási formulát. Legyenek az  $u$  skalár-vektor,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  vektor-vektor függvények differenciálhatóak egy  $T$  tartományban.

Ekkor:

$$\frac{d}{dr}(uv) = u \frac{dv}{dr} + v \circ \text{grad } u,$$

$$\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{w} + \mathbf{w} \text{ rot } \mathbf{v},$$

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{v}}{dr} \mathbf{w} - \frac{d\mathbf{w}}{dr} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{w} - \mathbf{w} \text{ div } \mathbf{v}.$$

16. Az előző feladat megjegyzései alkalmazásával határozza meg az

$$\mathbf{r} \mapsto (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

vektortér divergenciáját és rotációját! ( $\mathbf{a}$  állandó vektor.)

Legyen

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{w} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r},$$

akkor

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

A 3. feladatban láttuk, hogy

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a},$$

valamint az 1. feladat szerint:

$$\text{rot } \mathbf{r} = 0,$$

így az előző feladat eredményeit alkalmazva:

$$\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{w} + \mathbf{w} \text{ rot } \mathbf{v} = 2\mathbf{a}.$$

Hasonlóan:

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{v}}{dr} \mathbf{w} - \frac{d\mathbf{w}}{dr} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{w} - \mathbf{w} \text{ div } \mathbf{v}.$$

Az előzőleg említett feladatok eredménye szerint:

$$\frac{d}{dr}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a},$$

$$\frac{d}{dr} \mathbf{r} = \mathbf{E}.$$

Ezek alkalmazásával:

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{a} \times \mathbf{w} - \mathbf{E}\mathbf{v} + 3(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) - 0 = 3(\mathbf{a} \times \mathbf{r}).$$

Természetesen a koordinátás alak alkalmazásával ugyanez az eredmény adódik.



## V. KETTŐS INTEGRÁL

### 1. Kettős integrál négyszögtartomány esetén

Legyen  $T \subset R^2$  korlátos, összefüggő ponthalmaz.  $T$ -t *mérhetőnek* nevezzük, ha a  $T$ -t tartalmazó ( $T$  köré írt) sokszögek területének alsó határa megegyezik a  $T$  által tartalmazott ( $T$ -be írt) sokszögek területének felső határával. Ezt a közös határt  $T$  területének (*mértékének*) nevezzük, és  $\mu(T)$ -vel jelöljük.

A továbbiakban feltesszük, hogy  $T$  mérhető.

$T$  felosztását adja az

$$A = \{T_i \subset T \mid i = 1, \dots, n\}$$

halmazrendszer, ha a  $T_i$  halmazok valamennyien mérhetőek, egyesítésük  $T$ -t adja, és a  $T_i, T_j (i \neq j)$  halmazoknak nincs közös belső pontjuk.

Azt mondjuk, hogy a felosztás minden határon túl finomodik, ha a  $T_i$  halmazok mindegyikének átmérője zérushoz tart.

Legyen az  $f: T \rightarrow R$  kétváltozós függvény korlátos az előző  $T$  tartományon, s jelölje  $m_i(M_i)$   $f$  értékeinek alsó (felső) határát a  $T_i \subset T$  halmazon!

Az  $f$  függvényt a  $T$  tartományon *integrálhatónak* nevezzük, ha a

$$\sum_{i=1}^n m_i \mu(T_i) \quad \text{és a} \quad \sum_{i=1}^n M_i \mu(T_i)$$

összegek határértéke bármely minden határon túl finomodó felosztássorozat esetén létezik és egyenlő. E közös határértéket nevezzük  $f$   $T$ -re vett *kettős integráljának*:

$$\iint_T f = \iint_T f(x, y) dx dy.$$

Ha  $f$  integrálható  $T$ -n, és

$$T = T_1 \cup T_2,$$

ahol  $T_1, T_2$  mérhető tartományok, amelyeknek nincs közös belső pontjuk, akkor a definícióból következően:

$$\iint_T f = \iint_{T_1} f + \iint_{T_2} f.$$

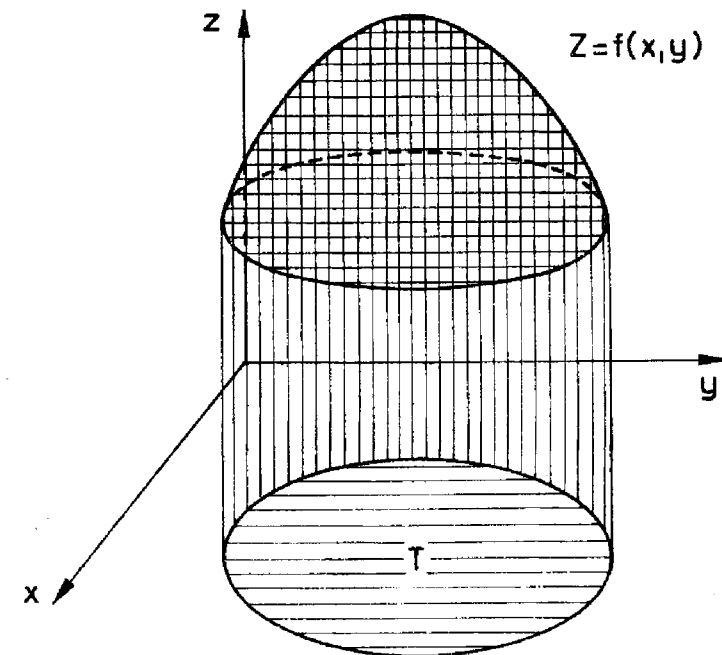
Ha  $f$  folytonos a mérhető területű, korlátos, zárt  $T$  tartományon,

akkor  $\iint_T f$  biztosan létezik,  $f$  folytonossága azonban nem

szükséges feltétele az integrálhatóságnak. Ha  $f$  integrálható  $T$ -n,

és  $f(x, y) \geq 0$  minden  $(x, y) \in T$  pontban, akkor  $\iint_T f$  a  $T$  tarto-

mány feletti  $z = f(x, y)$  felülettel határolt hengerszerű térrész térfogatát adja (49. ábra).



49. ábra

E pontban csak négyszögtartományokra vizsgáljuk a kettős integrál kiszámítását.

Négyszögtartományról beszélünk, ha

$$T = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Ekkor, ha  $f$  integrálható  $T$ -n és létezik az

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c; d]$$

függvény, akkor

$$\int_T f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Négyszögtartomány esetén tehát az integrálás sorrendje felcserélhető.

Speciálisan, ha

$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad \text{minden} \quad (x, y) \in T\text{-re,}$$

akkor

$$\int_T f = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \left( \int_c^d h(y) dy \right),$$

feltéve, hogy a jobb oldal két tényezője létezik.

Kettős integrál esetén is értelmezhető az *improprius integrál*. Ennek konvergenciája az egyváltozós függvények körében megismertekhez hasonlóan történik. E témával általánosan nem foglalkozunk, csak néhány gyakorló feladat megoldása során utalunk rá.

## Gyakorló feladatok

① Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + 4y, \quad (x, y) \in R^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

egységnégyzetre!

$f$  folytonos  $R^2$ -en, így integrálható. Négyszögtartományról van szó, ezért az integrálás sorrendje tetszőleges. Integráljunk először  $x$  szerint!  $x$  szerinti integrálásnál  $4y$  állandó, azaz integrálja  $4xy$ , így:

$$\int_0^1 (x^2 + 4y) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 4xy \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 4y.$$

(Természetesen a határokat az  $x$  változó helyébe helyettesítettük!) Tehát:

$$\begin{aligned} \int_T f &= \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + 4y \right) dy = \\ &= \left[ \frac{y}{3} + 2y^2 \right]_0^1 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Az Olvasóra bízunk annak ellenőrzését, hogy fordított sorrendben végezve az integrálást ugyanez az eredmény adódik.

2. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto e^{3x+4y}, \quad (x, y) \in R^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \ln 2, 0 \leq y \leq \ln 3\}$$

tartományra!

Mivel a tartomány négyszögtartomány, és

$$e^{3x+4y} = e^{3x}e^{4y},$$

így e rész bevezetője szerint:

$$\iint_T f = \left( \int_0^{\ln 2} e^{3x} dx \right) \left( \int_0^{\ln 3} e^{4y} dy \right) = \left[ \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^{\ln 2} \left[ \frac{e^{4y}}{4} \right]_0^{\ln 3}.$$

A határok helyettesítésekor vegyük figyelembe, hogy

$$e^{3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 8,$$

tehát:

$$\iint_T f = \frac{8-1}{3} \cdot \frac{81-1}{4} = \frac{140}{3}.$$

Ugyanez az eredmény adódik akkor is, ha a kettős integrált nem bontjuk szét két egyszeres integrál szorzatára:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^{\ln 2} \left( \int_0^{\ln 3} e^{3x+4y} dy \right) dx = \int_0^{\ln 2} \left[ \frac{e^{3x+4y}}{4} \right]_0^{\ln 3} dx = \\ &= \int_0^{\ln 2} 20e^{3x} dx = \frac{20}{3} [e^{3x}]_0^{\ln 2} = \frac{140}{3}. \end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto e^{-x-y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\} \quad (a > 0)$$

tartományra! Mi az eredmény határértéke, ha  $a$  minden határon túl növekszik?

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el.

Mivel

$$e^{-x-y} = e^{-x}e^{-y},$$

és a tartomány négyszögtartomány, így

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \left( \int_0^a e^{-x} dx \right) \left( \int_0^a e^{-y} dy \right) = \left( \int_0^a e^{-x} dx \right)^2 = \\ &= ([-e^{-x}]_0^a)^2 = (1 - e^{-a})^2, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} (1 - e^{-a})^2 &= 1, \end{aligned}$$

azaz  $f$ -nek az első síknegyedre vonatkozó improprius integrálja létezik, és értéke 1.

4. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \sin(x+y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját a

$$T = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

tartományra!

Integráljunk először  $x$  szerint! Mivel ekkor a  $y$  állandó, így:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dx &= \left[ -\cos(x+y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos y - \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \cos y + \sin y. \end{aligned}$$

Ennek felhasználásával:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \sin y) dy = \left[ \sin y - \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left( \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) - (\sin 0 - \cos 0) = 2. \end{aligned}$$

5. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto xye^{x^2+y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvénynek az egységnégyzetre vett integrálját!

$f$  szorzatalakban írható fel:

$$\mathbb{R} \quad xye^{x^2+y^2} = (xe^{x^2})(ye^{y^2}),$$

tehát:

$$\begin{aligned} \int_T \int f &= \left( \int_0^1 xe^{x^2} dx \right) \left( \int_0^1 ye^{y^2} dy \right) = \left( \int_0^1 xe^{x^2} dx \right)^2 = \\ &= \left( \left[ \frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 \right)^2 = \frac{(e-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

(Természetesen más úton számolva ugyanerre az eredményre jutunk.)

6. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}; \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$$

függvényt a

$$T = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq 1\}$$

tartományra!

A  $T$  tartományban  $f$  folytonos, tehát integrálható. Mivel  $T$ -ben  $x \neq 0$ , így az integrandust a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Integráljunk először  $y$  szerint! Ekkor  $x$  állandó, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} dy = \left[ \arctg \frac{y}{x} \right]_0^1 = \arctg \frac{1}{x} = \arctg x.$$

(Az integrálás során felhasználtuk, hogy  $\frac{1}{x}$  a belső függvény  $y$  szerinti deriváltja.)

$$\int_T \int f = \int_1^{\sqrt{3}} 1 \cdot \arctg x dx.$$

Parciálisan integrálunk:

$$u' := 1,$$

$$v := \arctg x$$

választással kapjuk, hogy

$$\int_T \int f = \left[ x \arctg x \right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx.$$

A második tagot átalakítjuk:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ \ln(1+x^2) \right]_1^{\sqrt{3}}.$$

A határokat behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int_T \int f &= \sqrt{3} \arctg \sqrt{3} - \arctg 1 + \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = \\ &= \sqrt{3} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

7. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}; \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$$

függvény egységnégyzetre vett integrálját!

$f$  az origóban nincs értelmezve, sőt, mint azt II.3-ban láttuk, itt határértéke sincs.

Könnyen belátható azonban, hogy  $f$  korlátos. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = |xy|,$$

azaz

$$|f(x, y)| \leq 1.$$

Mivel  $f$  korlátos, és az origó kivételével minden pontban folytonos, így integrálható.

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{2xy}{x^2+y^2} dx \right) dy = \int_0^1 [y \ln(x^2+y^2)]_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 y \ln(1+y^2) dy - \int_0^1 2y \ln y dy. \end{aligned}$$

Mindkét tagban parciálisan integrálva ( $u' := y$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^1 y \ln(1+y^2) dy &= \left[ \frac{y^2}{2} \ln(1+y^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^3}{1+y^2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \left( y - \frac{y}{1+y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \ln 2 - \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+y^2) \right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan a második tag:

$$\int_0^1 2y \ln y dy = [y^2 \ln y]_0^1 - \int_0^1 y dy = -\frac{1}{2}.$$

(Ugyanis:  $\lim_{y \rightarrow 0} y^2 \ln y = 0$ .) Így:

$$\iint_T f = \ln 2 \approx 0,699.$$

*Megjegyzés:* Láttuk, hogy  $|f(x, y)| \leq 1$  az egységnégyzeten, így teljesülnie kell a

$$\left| \iint_T f \right| \leq \mu(T) \cdot 1 = 1$$

egyenlőtlenségnek.

8. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}, \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y^2 > 0\}$$

függvénynek az egységnégyzetre vett integrálját!

Az előző feladatokkal ellentétben  $f$  nem korlátos  $T$ -n, tehát egy improprius integrál értékét kell meghatároznunk.  $f$  biztosan integrálható  $T$ -n, ha van olyan  $f$ -et majoráló függvény, amelynek  $T$ -re vett integrálja létezik.

Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{x+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

és az

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{improprius integrál konvergens,}$$

így  $f$  integrálható a  $T$  tartományon.

Először  $x$  szerint integrálva:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+y^2}} = 2[\sqrt{x+y^2}]_0^1 = 2\sqrt{1+y^2} - 2y$$

( $y \geq 0$  miatt  $|y| = y$ ).

Tehát

$$\iint_T f = \int_0^1 2\sqrt{1+y^2} dy - \int_0^1 2y dy.$$

Az első tag esetén helyettesítéssel integrálunk eredményre.  
Legyen

$$y := \operatorname{sh} t.$$

Ekkor

$$\sqrt{1+y^2} = \operatorname{ch} t,$$

és

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{ch} t.$$

(A helyettesítéskor az integrálási határok is megváltoznak.)

$$\begin{aligned} \int_0^1 2\sqrt{1+y^2} dy &= \int_0^{\operatorname{arsh} 1} 2 \operatorname{ch}^2 t dt = \int_0^{\operatorname{arsh} 1} (\operatorname{ch} 2t + 1) dt = \\ &= \left[ \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t + t \right]_0^{\operatorname{arsh} 1}. \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} 1) = 1,$$

és

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{sh} t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t},$$

kapjuk, hogy

$$\int_T \int f = \sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1 - 1.$$

Végezzük el az integrálást fordított sorrendben is!

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x+y^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2}} = \left( \operatorname{arsh} \frac{y}{\sqrt{x}} \right)_0^1 = \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

tehát:

$$\int_T \int f = \int_0^1 1 \cdot \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Parciálisan integrálunk:

$$u' := 1, \quad u = x$$

akkor

$$v := \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x}};$$

ebből következően:

$$\begin{aligned} \int_T \int f &= \left[ x \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \operatorname{arsh} 1 + \left[ \sqrt{x+1} \right]_0^1 = \\ &= \operatorname{arsh} 1 + \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

(Felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

amit az Olvasó pl. a L'Hospital-szabály alkalmazásával igazolhat.)

Látjuk tehát, hogy a feladat esetén is teljesül az

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

egyenlőség.

9. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{x+y^2}; \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y^2 \neq 0\}$$

függvényt az egységnyizetre!

A függvénynek nincs határértéke az origóban, nem korlátos  $T$ -n, sőt az

$$x \mapsto f(x, 0) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

és

$$y \mapsto f(0; y) = \frac{1}{y^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

függvények  $[0; 1]$  intervallumra vett improprius integrálja nem létezik.

Határozzuk meg először  $f$  integrálját a

$$T_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq 1\} \quad (a > 0 \text{ állandó})$$

tartományra, majd vegyük ennek határértékét, ha  $a$  zérushoz tart! ( $f$   $T_1$ -en folytonos, így integrálható.)

$$\begin{aligned} \int_a^1 \int_0^1 \frac{1}{x+y^2} dx dy &= \int_a^1 [\ln(x+y^2)]_0^1 dy = \\ &= \int_a^1 1 \ln(1+y^2) dy - \int_a^1 2 \ln y dy. \end{aligned}$$

Mindkét tagban parciálisan integrálva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \int_{T_1} f &= [y \ln(1+y^2)]_a^1 - 2 \int_a^1 \frac{y^2+1-1}{y^2+1} dy - [2(y \ln y - y)]_a^1 = \\ &= [y \ln(1+y^2) - 2y \ln y + 2 \operatorname{arctg} y]_a^1 = \\ &= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - [a \ln(1+a^2) - 2a \ln a + 2 \operatorname{arctg} a]. \end{aligned}$$

A zárójelben levő tagok határértéke zérus, ha  $a$  tart a zérushoz, így  $f$  integrálható  $T$ -n, és:

$$\int_T f = \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Végezzük el az integrálást fordított sorrendben is!

$$\int_0^1 \frac{1}{x+y^2} dy = \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x + \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2} dy = \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Így

$$\int_T f = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Parciálisan integrálva:

$$u' = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ekkor

$$u = 2\sqrt{x},$$

és

$$v' = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

így

$$v' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}},$$

azt kapjuk, hogy

$$\int_T f = \left[ 2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{2} + \ln 2,$$

ami az előző eredménnyel megegyező.

(Felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

hiszen a szorzat egyik tényezője 0-hoz, a másik  $\frac{\pi}{2}$ -hez tart.)

10. Határozza meg  $c$  értékét úgy, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto c(x^2 + 3y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény egységnyizetre vett integrálja 1 legyen!

Integráljunk először  $x$  szerint!

$$c \int_0^1 (x^2 + 3y^2) dx = c \left[ \frac{x^3}{3} + 3xy^2 \right]_0^1 = c \left( \frac{1}{3} + 3y^2 \right),$$

így

$$\int_T f = c \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + 3y^2 \right) dy = c \left[ \frac{1}{3}y + y^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}c.$$

Mivel az

$$\int_T f = 1$$

egyenlőségnek teljesülnie kell, így

$$c = \frac{3}{4}.$$

11. Legyen az  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos a

$$T = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

tartományban. Határozza meg  $f$   $T$ -re vett kettős integrálját, ha teljesül az

$$F''_{xy}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in T$$

egyenlőség!

Mivel  $f$  folytonos  $T$ -n, így integrálható is.  $f$  folytonossága miatt

$$F''_{xy} = F''_{yx}$$

így az integrálás sorrendje tetszőleges. Integráljunk először  $x$  szerint!

$$\int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b F''_{yx}(x, y) dx = [F'_y(x, y)]_a^b = F'_y(b, y) - F'_y(a, y).$$

Ezt  $y$  szerint integrálva:

$$\begin{aligned} \int_c^d [F'_y(b, y) - F'_y(a, y)] dy &= [F(b, y) - F(a, y)]_c^d = \\ &= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c). \end{aligned}$$

A kettős integrál értéke tehát az  $F$  függvénynek a téglalap csúcspontjaiban felvett értékeiből meghatározható. (A feladatot a Newton—Leibniz-formula általánosításának is tekinthetjük.)

## 2. Kettős integrál normáltartomány esetén

Legyenek az

$$g_1: x \mapsto g_1(x)$$

és  $x \in [a; b]$

$$g_2: x \mapsto g_2(x)$$

függvények folytonosak az  $[a; b]$  intervallumon, és legyen minden  $x \in [a; b]$  esetén:

$$g_1(x) \leq g_2(x)!$$

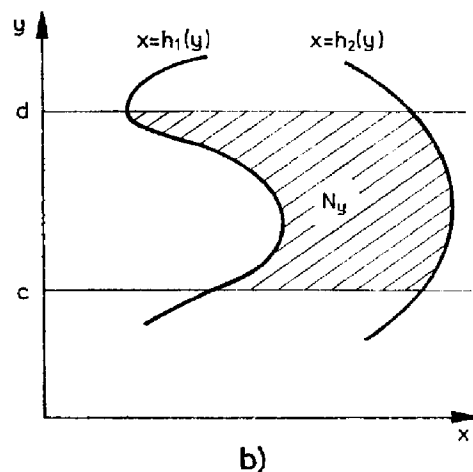
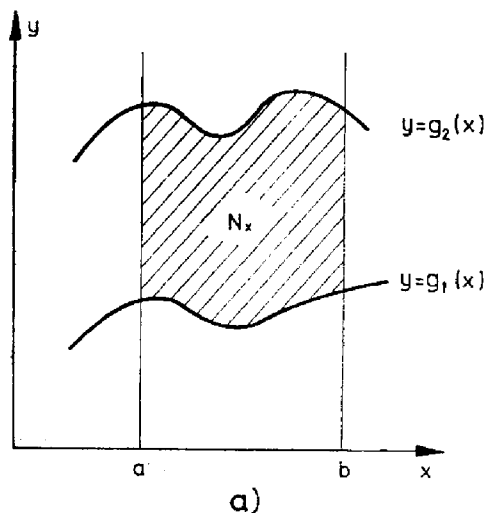
Ekkor a

$$T = N_x = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

tartományt az  $x$  tengelyre normáltartománynak nevezzük (50. ábra). Mivel  $g_1$  és  $g_2$  folytonos  $[a; b]$ -n, így itt integrálható is. Eből következően  $N_x$  mérhető:

$$\mu(N_x) = \int_a^b g_2 - \int_a^b g_1.$$





50. ábra

Hasonlóan értelmezhető az  $y$  tengelyre normáltartomány is:

$$T = N_y = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Ha  $f$  folytonos  $T$ -n, akkor:

$$\iint_{N_x} f = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

ill.

$$\iint_{N_y} f = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Normáltartományok esetén tehát az integrálás sorrendje meghatározott. A sorrend felcserélése csak akkor lehetséges, ha  $T$  mindkét tengelyre normáltartomány, de a csere ekkor is a határok átalakításával jár.

Ha  $T$  nem normáltartomány, akkor a tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel normáltartományokra bontjuk fel.  $f$   $T$ -re vett integrálja e résztartományokra számított integráljainak összege.

### Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x+y \text{ irracionális} \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } x+y = \frac{k}{n} \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x+y = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálható az  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$  csúcspontú háromszögre!

Annak igazolásához, hogy az adott tartományon  $f$  integrálható, azt kell megmutatnunk, hogy az alsó és felső közelítőösszegek határértéke azonos. Mivel  $f$  alsó korlátja zérus, így az alsó közelítő összeg is zérus. Azt kell tehát belátnunk, hogy a felső összeg tetszőlegesen kicsiny lehet.

Legyen  $\varepsilon$  egy egynél kisebb pozitív szám. Vizsgáljuk meg, mely pontokban nagyobb a függvényérték  $\varepsilon$ -nál! Ez csak olyan pontokban lehetséges, amelyekre:

$$x+y = \frac{k}{n}, \quad \text{és} \quad 0 < n < \frac{1}{\varepsilon}.$$

E pontok az

$x+y=1$  egyenessel párhuzamos egyeneseken helyezkednek el.

Mivel láttuk, hogy

$$0 < n < \frac{1}{\varepsilon},$$

és

$$0 \leq x + y \leq 1 \text{ -ből következően}$$

$$0 < k \leq n,$$

így csak véges sok ilyen egyenes van.

Jelöljük ezek számát  $m$ -mel!

Bontsuk a  $T$  tartományt az  $x + y = 1$  egyenessel párhuzamos egyenesekkel

$\frac{\varepsilon}{2m}$  szélességű sávokra. E sávok közül  $m$ -ben a függvényérték  $\varepsilon$ -nál nagyobb lesz. Ezek járuléka a felső közelítő összeghez:

$$S_1 = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{2m} M_i l_i$$

(ahol  $l_i$  a sáv „hosszát” jelenti).

Mivel  $M_i \leq 1$  (hiszen  $f(x, y) \leq 1$ , ha  $(x, y) \in T$ , és  $l_i \leq \sqrt{2}$ ), így

$$S_1 \leq \frac{\varepsilon}{2m} \sqrt{2m} = \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{2}.$$

A többi sávban a függvényérték maximuma  $\varepsilon$ -nál kisebb, így ezek járuléka:

$$S_2 < \varepsilon \mu(T) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

E felbontás esetén a felső közelítő összeg:

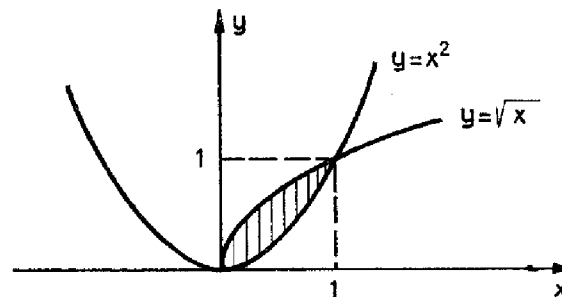
$$S = S_1 + S_2 < \frac{\varepsilon}{2} (1 + \sqrt{2}),$$

amely érték tetszőlegesen kicsiny lehet. Mivel találtunk egy olyan felosztást, amelynél  $S$  tetszőlegesen kicsinnyé tehető, és belátható, hogy ez minden finomodó felosztássorozatra teljesül, azaz  $S$  alsó határa zérus, így megmutattuk, hogy  $f$  integrálható a  $T$  tartományon.

2. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto 2xy, \quad (x, y) \in R^2$$

függvény integrálját az 51. ábrán látható tartományra!



51. ábra

A tartomány az  $x$  és  $y$  tengelyre is normáltartománynak tekinthető.

Tehát

$$T = N_x = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

vagy

$$T = N_y = \{(x; y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

(Vigyázzon, a

$$T_1 = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

tartomány az egységnégyzet!)

A  $T = N_x$  esetben először  $y$  szerint;

a  $T = N_y$  esetben először  $x$  szerint kell integrálnunk.

Tehát

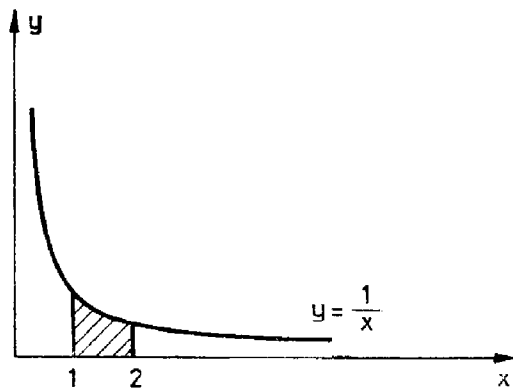
$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[ xy^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Természetesen a  $T = N_y$  esetben is azonos eredményt kapunk.

③ Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{2y}{x+1}, \quad D_f = \{(x, y) \in R^2 \mid x+1 \neq 0\}$$

függvény integrálját az 52. ábrán látható tartományra!



52. ábra

A tartomány:

$$N_x = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\},$$

tehát először  $y$  szerint kell integrálnunk:

$$\iint_{N_x} f = \int_1^2 \left( \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{2y}{x+1} dy \right) dx = \int_1^2 \left[ \frac{y^2}{x+1} \right]_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$$

Az integrandust rész törtre kell bontanunk:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$1 = x^2(A+C) + x(A+B) + B,$$

ahonnan — az együtthatók összehasonlításával —

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1 \quad \text{adódik.}$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \iint_{N_x} f &= \int_1^2 \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[ -\ln x - \frac{1}{x} + \ln(x+1) \right]_1^2 = \\ &= -\frac{1}{2} + \ln 3 - 2 \ln 2 = -\frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

#### 4. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$$

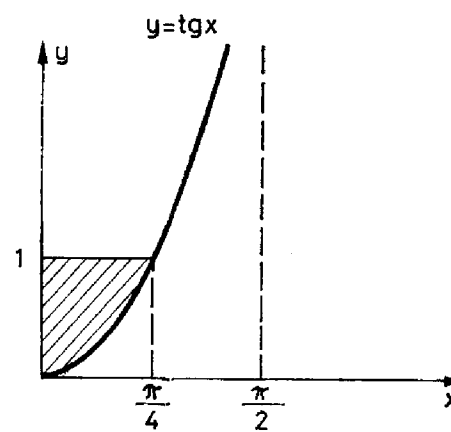
függvényt a

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tartományra!

Láttuk, hogy  $f$  az origó kivételével folytonos  $T$ -n, és korlátos, így integrálható.

A tartomány egy origó középpontú egysugarú kör. Mivel  $f$  mindkét változójában páratlan, és  $T$  szimmetrikus mindkét tengelyre, így  $f$ -nek az adott tartományra vett integrálja zérus.



53. ábra

#### 5. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto 2y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját az 53. ábrán látható tartományra!

$T$  mindkét tengelyre normáltartomány. Az integrálást mindkét módon elvégezzük.

$$a) T = N_x = \left\{ (x, y) \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \operatorname{tg} x \leq y \leq 1 \right\}.$$

Ez esetben először  $y$  szerint kell integrálnunk:

$$\iint_T f = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_{\operatorname{tg} x}^1 2y \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [y^2]_{\operatorname{tg} x}^1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg}^2 x) dx.$$

Az integrandust

$$1 - \operatorname{tg}^2 x = 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

alakra hozva kapjuk, hogy:

$$\iint_T f = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( 2 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \left[ 2x - \operatorname{tg} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$b) T = N_y = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \operatorname{arctg} y\}.$$

Most először  $x$  szerint kell integrálnunk:

$$\iint_T f = \int_0^1 \left( \int_0^{\operatorname{arctg} y} 2y \, dx \right) dy = \int_0^1 [2xy]_0^{\operatorname{arctg} y} dy = \int_0^1 2y \operatorname{arctg} y \, dy.$$

Parciálisan integrálva:  $u' := 2y$ ,

$$v := \operatorname{arctg} y,$$

$$\begin{aligned} \iint_T f &= [y^2 \operatorname{arctg} y]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{y^2+1-1}{1+y^2} dy = \\ &= \frac{\pi}{4} - [y - \operatorname{arctg} y]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1, \end{aligned}$$

ami az előzővel megegyező.

**Megjegyzés:** Láttuk, hogy normáltartományok esetén az integrálás sorrendjének felcserélése során a határok is megváltoznak, sőt legtöbb esetben a sorrend felcserélése el sem végezhető.

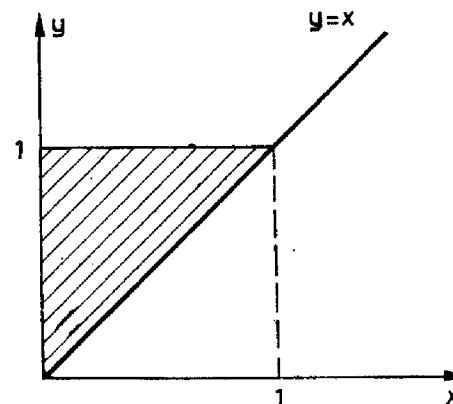
6. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{\sin y}{y}, \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$$

függvényt a

$$T = N_x = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

tartományra!



54. ábra

Az integrálási tartományt az 54. ábra mutatja.  $f$  korlátos, és  $T$ -ben az origó kivételével folytonos, így integrálható.

$T$  mindkét tengelyre normáltartomány; így az integrálást kétféleképpen is elvégezhetjük.

$$a) T = N_y = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}.$$

Először  $x$  szerint integrálunk:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^1 \left( \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{\sin y}{y} x \right]_0^y dy = \\ &= \int_0^1 \sin y \, dy = [-\cos y]_0^1 = 1 - \cos 1 \approx 0,454. \end{aligned}$$

b) Fordított sorrendben végezve az integrálást először  $y$  szerint kell integrálnunk. Ezt csak közelítően, sorfejtéssel végezhetjük el.

Mivel

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots,$$

így

$$\frac{\sin y}{y} = 1 - \frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{120} - \dots$$

Ezt alkalmazva:

$$\int_x^1 \frac{\sin y}{y} dy \approx \int_x^1 \left(1 - \frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{120}\right) dy = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right).$$

A kapott eredményt  $x$  szerint integrálva:

$$\iint_T f \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - x + \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{600}\right) dx \approx 0,457,$$

ami az előzővel elég jól megegyezik. (Nagyobb pontosság eléréséhez  $\sin y$  sorából több tagot kell figyelembe vennünk.)

7. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \cos(x-y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvényt az  $A(0; 0); B(1; 1); C(3; 1); D(4; 0)$  csúspontú trapézra!

A tartományt az

$$y=0; y=1,$$

ill.

$$y=x; y=4-x$$

egyenesek határolják,

így

$$T = N_y = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 4-y\}.$$

Először tehát  $x$  szerint kell integrálnunk:

$$\int_y^{4-y} \cos(x-y) dx = [\sin(x-y)]_y^{4-y} = \sin(4-2y),$$

amit  $y$  szerint integrálva:

$$\int_0^1 [-\sin(2y-4)] dy = \left[ \frac{\cos(2y-4)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(\cos 2 - \cos 4).$$

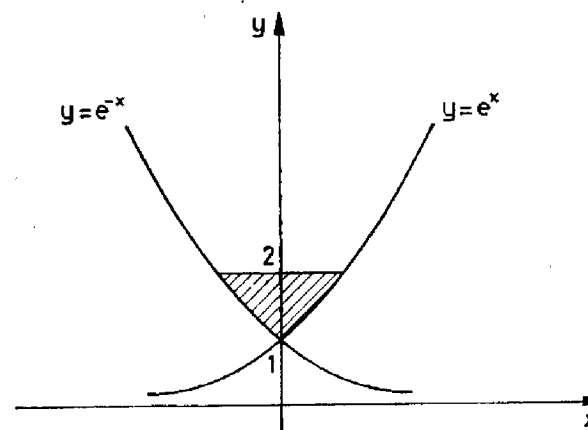
8. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$$

és

$$g: (x, y) \mapsto 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvényeket az 55. ábrán látható tartományra!



55. ábra

A tartomány az  $y$  tengelyre normáltartomány:

$$T = N_y = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, -\ln y \leq x \leq \ln y\}.$$

a)  $f$  folytonos  $T$ -n, így integrálható.

Mivel  $T$  szimmetrikus az  $y$  tengelyre, és  $f$   $x$ -ben páratlan függvény, ezért:

$$\iint_T f = 0.$$

b)  $g$   $x$ -ben páros függvény, így  $T$  szimmetriája miatt:

$$\iint_T g = 2 \int_1^2 \left( \int_0^{\ln y} 2y \, dx \right) dy = 2 \int_1^2 2y \ln y \, dy.$$

Parciálisan integrálva ( $u' := 2y$ ):

$$\iint_T g = [2y^2 \ln y - y^2]_1^2 = 8 \ln 2 - 3.$$

9. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvényt a

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tartományra!

Mivel  $f$  mindkét változójában páros függvény, és a tartomány mindkét tengelyre szimmetrikus, így elengedő az integrálást a

$$T_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

negyedkörre elvégeznünk, hiszen

$$\iint_T f = 4 \iint_{T_1} f.$$

Először  $y$  szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy = \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3}.$$

A két tagot külön-külön integráljuk.

Mindkét esetben az  $x := \sin t$  helyettesítést alkalmazzuk.

Ekkor

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t,$$

és

$$\frac{dx}{dt} = \cos t.$$

Mivel  $x=1$  esetén  $t = \frac{\pi}{2}$ , és  $x=0$  esetén  $t=0$ , így

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{1}{8} \left[ t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1+\cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2 \cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{12} \left[ \frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{\sin 4t}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

tehát:

$$\iint_T f = 4(I_1 + I_2) = \frac{\pi}{2}.$$

**Megjegyzés:** Polártranszformációval a feladat megoldása jóval egyszerűbb. Ezzel a következő szakaszban foglalkozunk.

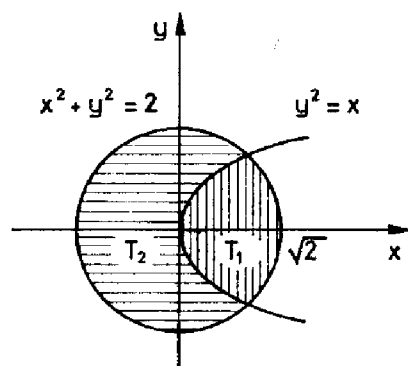
10. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto -\operatorname{sg}(x^2 - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvényt a

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

tartományra!



56. ábra

Mivel

$$t \mapsto \operatorname{sg} t = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha } t = 0 \\ -1, & \text{ha } t < 0, \end{cases}$$

így

$$\operatorname{sg}(x^2 - y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x^2 > y \\ 0, & \text{ha } x^2 = y \\ -1, & \text{ha } x^2 < y. \end{cases}$$

Az  $x^2 = y$  görbe a  $T$  tartományt két részre bontja (56. ábra). Ennek  $T_1$  részében  $x^2 > y$ , így itt a függvényérték  $(-1)$ ,  $T_2$ -ben  $x^2 < y$ , itt tehát a függvényérték  $1$ . Ebből következően:

$$\iint_T f = \mu(T_2) - \mu(T_1).$$

Meg kell határoznunk tehát  $T_1$  területét. Mivel a kör és a parabola metszéspontja az  $(1; 1)$  pont, így:

$$\begin{aligned} \mu(T_1) &= 2 \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \, dx = \\ &= 2 \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + 2\sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \, dx. \end{aligned}$$

A második tag integrálásakor az  $\frac{x}{\sqrt{2}} := \sin t$  helyettesítést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \, dx &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt = \\ &= \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

végeleményben tehát:

$$\mu(T_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

Mivel

$$T = T_1 \cup T_2,$$

azaz

$$\mu(T) = \mu(T_1) + \mu(T_2),$$

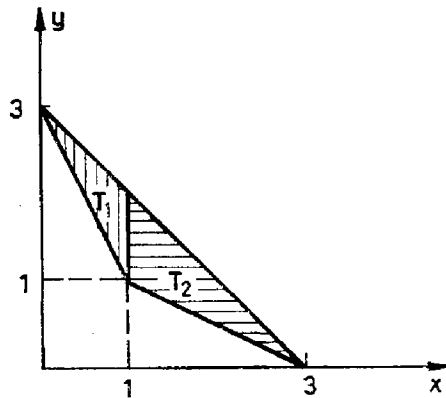
ebből következően:

$$\iint_T f = (\mu(T) - \mu(T_1)) - \mu(T_1) = 2\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right) = \pi - \frac{2}{3}.$$

11. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját az  $A(1; 1)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(3; 0)$  csúcpontú háromszögre!



57. ábra

A tartomány (57. ábra) nem normáltartomány, de az  $x=1$  egyenes a tartományt két normáltartományra bontja. Ezek:

$$T_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; 3 - 2x \leq y \leq 3 - x\},$$

$$T_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3; \frac{3-x}{2} \leq y \leq 3-x\}.$$

Tudjuk, hogy

$$\iint_T f = \iint_{T_1} f + \iint_{T_2} f,$$

Tehát az integrálást külön-külön kell elvégeznünk a két tartományra.

$T_1$  esetén:

$$\int_0^1 \left( \int_{3-2x}^{3-x} (x^2 + 2y) dy \right) dx = \int_0^1 [x^2 y + y^2]_{3-2x}^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^1 (6x - 3x^2 + x^3) dx = \left[ 2x^2 - x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{5}{4},$$

hasonlóan  $T_2$ -re:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left( \int_{\frac{3-x}{2}}^{3-x} (x^2 + 2y) dy \right) dx &= \int_1^3 [x^2 y + y^2]_{\frac{3-x}{2}}^{3-x} dx = \\ &= \int_1^3 \left( \frac{1}{2} (3x^2 - x^3) + \frac{3}{4} (3-x)^2 \right) dx = 5. \end{aligned}$$

A keresett integrál e kettő összege:

$$\iint_T f = 6 \frac{1}{4}.$$

12. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \sqrt{|y - x^2|}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

tartományra!

Mivel

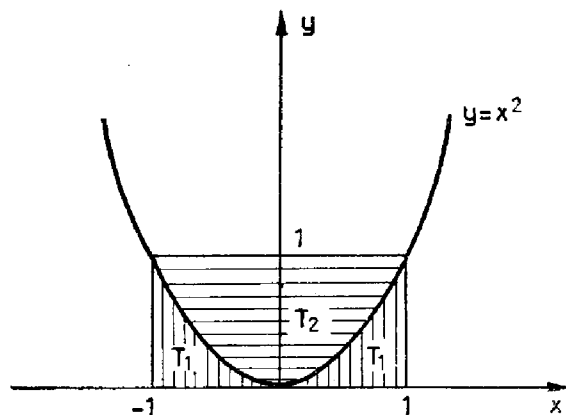
$$\sqrt{|y - x^2|} = \begin{cases} \sqrt{y - x^2}, & \text{ha } y \geq x^2 \\ \sqrt{x^2 - y}, & \text{ha } y < x^2, \end{cases}$$

így a tartományt két részre kell bontanunk (56. ábra):

$$T_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$T_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$





58. ábra

A  $T_1$  tartomány esetén  $x^2 > y$ , így:

$$\begin{aligned} \iint_{T_1} f &= 2 \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy \right) dx = 2 \int_0^1 \left[ \left( -\frac{2}{3} \right) (x^2 - y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{x^2} dx = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A  $T_2$  tartomány pontjaiban  $x^2 < y$ , tehát ekkor:

$$\begin{aligned} \iint_{T_2} f &= 2 \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 \sqrt{y - x^2} dy \right) dx = 2 \int_0^1 \left[ \frac{2}{3} (y - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x^2}^1 dx = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx. \end{aligned}$$

Az  $x := \sin t$  helyettesítéssel:

$$\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{16}.$$

(l. a 9. feladatot!)

Az eredmény tehát:

$$\iint_T f = \iint_{T_1} f + \iint_{T_2} f = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

### 3. A kettős integrál transzformációja

A kettős integrál transzformációja az egyváltozós függvények integrálásakor megismert helyettesítéses integrálás általánosítása. A változók célszerű transzformációja sok esetben megkönnyíti az integrál elvégzését, ill. lehetővé teszi a kiszámítását olyan esetekben, amelyekben transzformáció nélkül a feladat nem lenne megoldható.

Ha az

$$\begin{aligned} x &: (u, v) \mapsto x(u, v), \\ y &: (u, v) \mapsto y(u, v), \end{aligned} \quad (u, v) \in T' \subset \mathbb{R}^2$$

függvények az  $u, v$  sík  $T'$  tartományát kölcsönösen egyértelműen leképezik az  $x, y$  sík  $T$  tartományára, és e függvények folytonosan differenciálhatók, akkor, ha  $f$   $T$ -re vonatkozó in-

tegrálja létezik:

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_{T'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

ahol:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

a transzformáció determinánsa (Jacobi determináns). Speciálisan polártranszformáció esetén (láttuk, hogy a leképezés az origó kivételével kölcsönösen egyértelmű):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

tehát:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

A feladatok megoldása során — a tartomány alakjától függetlenül — természetesen egyéb transzformációkat is alkalmazunk.

*Megjegyzés:* Ha  $T'$  mérhető, akkor  $T$  is mérhető, és:

$$\mu(T) = \int_{T'} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

### Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$$

negyedkörre!

Az előzőekben láttuk, hogy  $f$  az origó kivételével folytonos,  $T$ -n korlátos függvény, így integrálható  $T$ -n. Térjünk át polárkoordinátákra!

Ekkor:

$$T = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

azaz a tartomány négyzet tartomány.

Elvégezve az

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \text{ helyettesítést, kapjuk, hogy:}$$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \sin 2\varphi.$$

Ezt figyelembe véve:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin 2\varphi d\varphi dr = - \int_0^1 \left[ r \frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 r dr = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right], & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálható a

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

körre, s határozza meg az integrál értékét!

Az entier-függvény definíciójából következően  $f$  korlátos  $T$ -n, hiszen

$$|f(x, y)| < 1, \text{ ha } (x, y) \in T;$$

így ha  $f$  integrálható, akkor

$$\left| \iint_T f \right| < \mu(T).$$

Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén  $f$  folytonos a

$$T_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{(n+1)^2} < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2} \right\}$$

tartományon, így itt integrálható is.

Ebből következően tetszőleges  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén létezik  $f$

$$T^* = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

tartományra vonatkozó integrálja is. Mivel  $f$  korlátossága miatt a

$$T \setminus T^* = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2} \right\}$$

tartomány járuléka tetszőlegesen kicsinnyé tehető, így  $f$  integrálható  $T$ -n.

Határozzuk meg az integrál értékét!

$$\iint_T f = \iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy - \iint_T \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] dx dy,$$

polárkoordinátákra átvérve az első tag:

$$\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r dr d\varphi = 2\pi.$$

A második tag integrálásakor felhasználjuk, hogy

$$\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n} \quad \text{esetén} \quad \left[ \frac{1}{r} \right] = n:$$

$$\iint_T \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r} \right] r dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 r \left[ \frac{1}{r} \right] dr =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} nr dr = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}.$$

Az integrál értékének meghatározásához a fenti összeget kell tehát kiszámítanunk.

Résztörtekre bontva:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2},$$

azaz:

$$2n+1 = A(n+1)^2 + Bn(n+1) + Cn.$$

A két oldal együtthatóit összehasonlítva:

$$A=1, B=-1, C=1.$$

Ezt felhasználva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} \right\}.$$

Mivel a felbontásban szereplő összeg mindkét tagja abszolút konvergens sor, így a sor átrendezhető, azaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

A felbontásban az első tag:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{n} \right) = 1,$$

a második tag:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

A kapott eredmények alapján:

$$\iint_T f = 2\pi - \pi \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \approx 1,11.$$

Valóban teljesül tehát, hogy

$$\iint_T f \leq \mu(T) = \pi.$$

**Megjegyzés:** A feladat megoldása során felhasználtuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ez például a következőképpen látható be:

Tekintsük a

$$g: x \mapsto \begin{cases} (x-\pi)^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2\pi, \\ g(x) = g(x+2\pi), & \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényt!

Mivel  $g$  folytonos függvény, így Fourier-sora minden pontban előállítja a függvényt. Tehát minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén:

$$g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos kx,$$

$x=0$  esetén:

$$g(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}.$$

Az egyenlőséget rendezve:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$$

függvényt a

$$T = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

tartományra!

Mivel  $T$  nem normáltartomány az  $xy$  síkon, térjünk át polárkoordinátákra! Ekkor:

$$T = \{(r, \varphi) \mid 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

tehát:

$$\iint_T f = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r \ln r^2 d\varphi dr = 2\pi \int_1^2 2r \ln r dr.$$

(Mivel az integrálandó  $\varphi$ -től független, így a  $\varphi$  szerinti integrálás  $2\pi$ -vel való szorzást jelent.)

Parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} u' &:= 2r, \\ v &:= \ln r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_T f &= 2\pi [r^2 \ln r]_1^2 - 2\pi \int_1^2 r^2 \frac{1}{r} dr = 2\pi \left[ r^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= 2\pi \left( 4 \ln 2 - \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

4. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto e^{-x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \varrho^2\}$$

tartományra!

Az integrálás csak polártranszformáció alkalmazásával végezhető el:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\varrho} r e^{-r^2} dr = \\ &= 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\varrho} = \pi(1 - e^{-\varrho^2}). \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* Számítsuk ki a kapott eredmény határértékét, ha  $\varrho$  minden határon túl növekszik:

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-\varrho^2}) = \pi.$$

Tehát az  $f$  függvény integrálja a teljes síkra  $\pi$ :

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy.$$

Mivel négyszögtartományról van szó, és  $f$  szorzatalakban írható fel, így V.1. szerint (belátható, hogy ez az összefüggés nemcsak korlátos tartományok esetén érvényes):

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Ebből következően:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

5. Az előző feladatban látott módszer alapján határozza meg az

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

integrál értékét!

A keresett érték négyzetét határozzuk meg:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy. \end{aligned}$$

Polárkoordinátákra áttérve:

$$A^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} d\varphi dr = \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = -2\pi \left[ e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} = 2\pi,$$

ahonnan következik, hogy  $A = \sqrt{2\pi}$ .

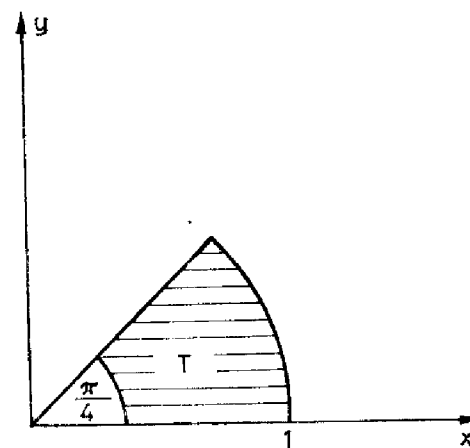
*Megjegyzés:* Az integrál értékét az előző feladat eredményének felhasználásával is meghatározhatjuk a

$$t = \frac{x}{\sqrt{2}} \text{ helyettesítéssel.}$$

6. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 - y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját az 59. ábrán látható körcikkre!



59. ábra

A tartomány polárkoordinátákra áttérve négyszögtartomány:

$$T = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Mivel

$$x^2 - y^2 = r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cos 2\varphi,$$

így  $f$   $T$ -re vett kettős integrálja:

$$\iint_T f = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos 2\varphi r d\varphi dr = \int_0^1 r^3 \left[ \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^1 \frac{r^3}{2} dr = \frac{1}{8}.$$

Az integrálás transzformáció nélkül is elvégezhető, de ekkor a számítás jóval bonyolultabb.

A tartomány:

$$T = N_y = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}.$$

Először tehát  $x$  szerint kell integrálnunk:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[ \frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{(\sqrt{1-y^2})^3}{3} - y^2 \sqrt{1-y^2} - \frac{y^3}{3} + y^3 \right) dy = \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{3} y^3 dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-4y^2}{3} \sqrt{1-y^2} dy. \end{aligned}$$

Az első tag:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{3} y^3 dy = \left[ \frac{y^4}{6} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{24}.$$

A második tag integrálásakor célszerű az  $y := \sin t$  helyettesítést alkalmazni:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-4y^2}{3} \sqrt{1-y^2} dy &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-4\sin^2 t) \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin^2 2t) dt = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1+\cos 2t}{2} - \frac{1-\cos 4t}{2} \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \left[ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12}.$$

Azaz végeredményben:

$$\iint_T f = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8},$$

ami az előző módon kapott eredménnyel természetesen megegyező. A két megoldást összehasonlítva látszik, hogy a polártranszformáció elvégzésével lényegesen könnyebben jutunk eredményre.

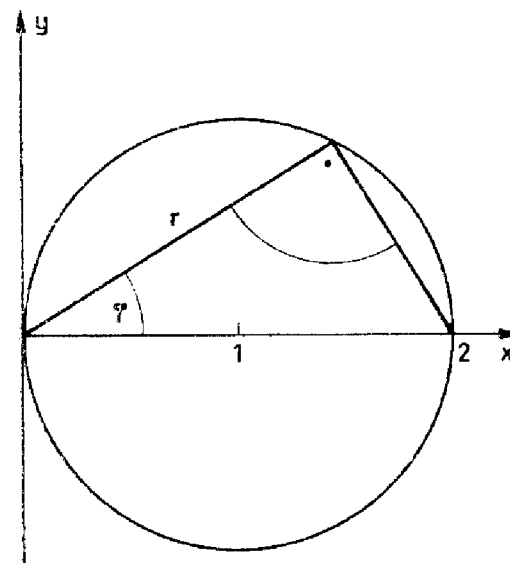
7. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

körre!



60. ábra

A tartomány polárkoordinátákra átvérve (60. ábra):

$$T = \left\{ (r, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \right\},$$

az  $r, \varphi$  síkon tehát  $T$  normáltartomány. Először  $r$  szerint kell integrálnunk:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} \frac{1}{r} r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [r]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \varphi d\varphi = \left[ 2 \sin \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4. \end{aligned}$$

8. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad (x, y) \in R^2$$

függvényt a

$$T = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$$

körre!

Az integrál meghatározásához célszerű a következő transzformációt elvégeznünk:

$$\begin{aligned} x &= 3 + r \cos t, \\ y &= 2 + r \sin t. \end{aligned}$$

E transzformációval az integrálási tartomány:

$$T = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Mivel az állandó deriváltja zérus, így a Jacobi-determináns most is  $r$ -rel egyenlő. A helyettesítést elvégezve:

$$x^2 + y^2 = (3 + r \cos t)^2 + (2 + r \sin t)^2 = 13 + 6r \cos t + 4r \sin t + r^2,$$

így  $f$  integrálja:

$$\begin{aligned} \iint_T f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (13 + 6r \cos t + 4r \sin t + r^2) r d\varphi dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 (13r + r^3) dr = 2\pi \left[ \frac{13r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 13,5\pi. \end{aligned}$$

9. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto |2xy|, \quad (x, y) \in R^2$$

függvényt a

$$T = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

tartományra!

A tartomány egy ellipszis, amelynek tengelyei egybeesnek a koordinátatengelyekkel. Az integrálás transzformáció nélkül is elvégezhető, de célszerű a következő transzformáció:

$$\begin{aligned} x &= 3r \cos \varphi, \\ y &= 2r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ekkor az integrálási tartomány négyszögtartomány:

$$T = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

A Jacobi-determináns:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cos \varphi & -3r \sin \varphi \\ 2 \sin \varphi & 2r \cos \varphi \end{vmatrix} = 6r.$$

Mivel a tartomány mindkét tengelyre szimmetrikus,  $f$  mindkét változójában páros, így elegendő az integrálást az első síknegyedre elvégezni:

$$\begin{aligned}\iint_T f &= 4 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot 3r \cos \varphi \cdot 2r \sin \varphi \cdot 6r \, d\varphi \, dr = \\ &= 288 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin 2\varphi \, d\varphi \, dr = 288 \int_0^1 r^2 \left[ -\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \\ &= 144 \int_0^1 r^2 \, dr = 48.\end{aligned}$$

10. Integrálja az

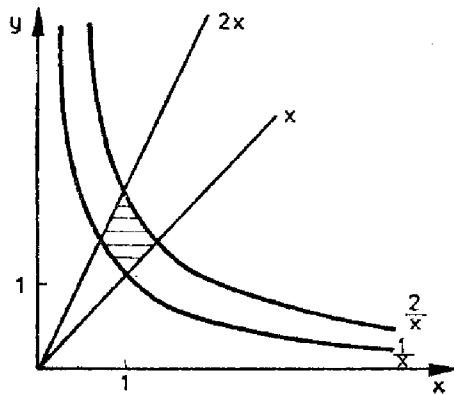
$$f: (x, y) \mapsto 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvényt az

$$y = x, \quad y = 2x, \quad xy = 1, \quad xy = 2$$

görbék által határolt tartományra!

A tartomány (61. ábra) az  $xy$  síkon nem normáltartomány, sőt elég nehéz is normáltartományokra darabolni.



61. ábra

Vezessünk be új változókat!

Legyen

$$u := xy,$$

$$v := \frac{x}{y},$$

azaz

$$x = \sqrt{uv} \quad \text{és} \quad y = \sqrt{\frac{u}{v}}.$$

Ekkor a transzformáció determinánsa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v}.$$

A tartomány az  $u, v$  síkon négyszögtartomány:

$$T = \left\{ (u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \right\}.$$

Így  $f$  integrálja (a determináns abszolút értékével szorzunk):

$$\iint_T f = \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2v} \, dv \, du = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln 2 \, du \approx 0,35.$$

Mivel az integrálandó függvény  $T$  minden pontjában egységnyi, így a kettős integrál definíciójából következően a kapott érték a tartomány területével egyenlő.

11. Határozza meg az

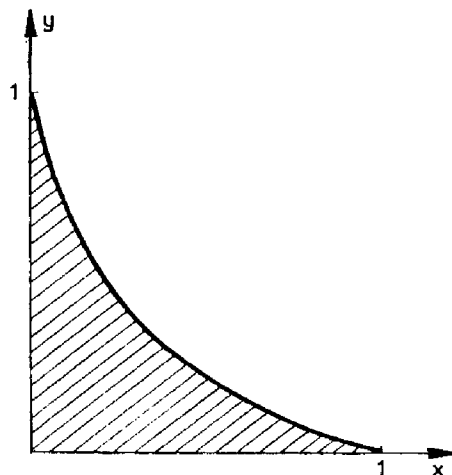
$$f: (x, y) \mapsto x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$$

tartományra!





62. ábra

A tartomány egy negyed asztroid (62. ábra). Vezessünk be új koordinátákat:

$$\begin{aligned}x &:= r \cos^3 \varphi, \\y &:= r \sin^3 \varphi.\end{aligned}$$

Ekkor  $T$  négyzet tartomány:

$$T = \left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

A Jacobi-determináns:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos^3 \varphi & -3r \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ \sin^3 \varphi & 3r \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = 3r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi.$$

Tehát  $f$  integrálja:

$$\iint_T f = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^3 \varphi \cdot 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr.$$

Alakítsuk át az integrandust!

$$\begin{aligned}3r^2 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi &= 3r^2 \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^2 \sin^2 \varphi = \\&= 3r^2 \cos \varphi (\sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi + \sin^6 \varphi).\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy  $g^n g' = \left( \frac{g^{n+1}}{n+1} \right)'$  ( $n \neq -1$ ), kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\iint_T f &= \int_0^1 3r^2 \left[ \frac{\sin^3 \varphi}{3} - 2 \frac{\sin^5 \varphi}{5} + \frac{\sin^7 \varphi}{7} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \\&= \int_0^1 3r^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) dr = \frac{8}{105}.\end{aligned}$$

#### 4. A kettős integrál alkalmazásai

A kettős integrál geometriai és fizikai alkalmazása egyaránt igen sokrétű. Ezen alkalmazási lehetőségek közül a legfontosabbakat említjük és szemléltetjük feladatokkal.

Az előző szakasz 11. feladatában már szerepelt, hogy a kettős integrál definíciójából következően:

$$\iint_T 1 \, dx \, dy = \mu(T).$$

Hasonlóan, V.1-ben, a kettős integrál meghatározásánál láttuk, hogy ha  $f$  integrálható  $T$ -n és  $f(x, y) \geq 0$  minden  $(x, y) \in T$  pontban, akkor a

$$\iint_T f \quad \text{a } T \text{ tartomány feletti } \quad z = (x, y)$$

felülettel határolt hengerszerű test térfogatát adja (49. ábra).

IV.2. tárgyalása során láttuk, hogy ha a  $D$  tartomány mérhető területű és az

$$\mathbf{r} : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D$$

folytonosan differenciálható  $D$ -n, akkor e kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel jellemzett felület felszíne:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv.$$

A lehetséges fizikai alkalmazások közül elsőként síklemez tömegközéppontjának meghatározását említjük. Helyezzük el a lemezt az  $x, y$  síkban! Legyen a lemez által lefedett tartomány  $T$ . Ha a lemez sűrűségét a

$$\varrho : (x, y) \mapsto \varrho(x, y), \quad (x, y) \in T$$

függvény írja le, akkor tömegközéppontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_T \int_T x \varrho(x, y) dx dy}{\int_T \int_T \varrho(x, y) dx dy}; \quad y_s = \frac{\int_T \int_T y \varrho(x, y) dx dy}{\int_T \int_T \varrho(x, y) dx dy}.$$

(E képletekben a számláló a síklemez  $y$ , ill.  $x$  tengelyre vett elsőrendű, ún. statikai nyomatéka, a nevező pedig a lemez tömege.) Természetesen, ha a lemez homogén, azaz sűrűsége állandó,  $\varrho$  az integráljel elé kiemelhető, s így egyszerűsíthetünk vele. Ekkor a nevező  $T$  területével  $\mu(T)$ -vel egyezik meg. Az előzőekben szereplő síklemez  $y$ , ill.  $x$  tengelyre vett másodrendű (tehetetlenségi) nyomatéka:

$$\Theta_x = \int_T \int_T y^2 \varrho(x, y) dx dy;$$

$$\Theta_y = \int_T \int_T x^2 \varrho(x, y) dx dy.$$

Hasonlóképpen a  $z$  tengelyre (vagy az origóra) vett másodrendű nyomaték:

$$\Theta = \int_T \int_T (x^2 + y^2) \varrho(x, y) dx dy = \Theta_x + \Theta_y.$$

Forgástest felszíne, ill. térfogata és a tömegközéppont által leírt kör kerülete közötti összefüggést adják meg Guldin tételei:

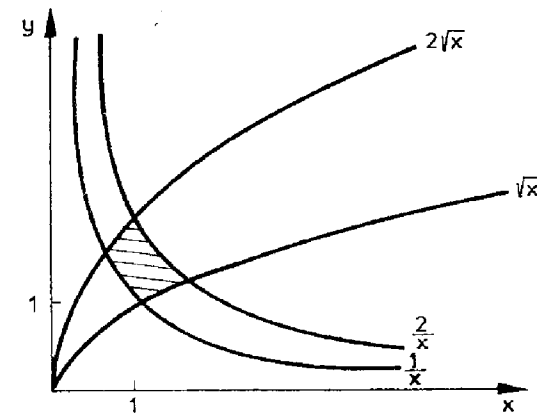
A forgástest felszíne egyenlő a forgatott görbeív hosszának és a tömegközéppont által leírt kör kerületének szorzatával;  
A forgástest térfogata egyenlő a forgatott lemez területének és a tömegközéppont által leírt kör kerületének szorzatával.

### Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad xy = 1, \quad xy = 2$$

görbék által határolt síkidom területét!



63. ábra

A terület meghatározásához a görbék által határolt  $T$  tartományra (63. ábra) kell integrálnunk az egységet, azaz:

$$\int_T \int_T 1 dx dy = \mu(T).$$

Az integrálás kiszámításához célszerű a kettős integrál transzformációját elvégeznünk.

Legyen

$$u := \frac{y}{\sqrt{x}},$$

$$v := xy,$$

azaz

$$x = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}} = v^{\frac{2}{3}} u^{-\frac{2}{3}},$$

$$y = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}.$$

Ekkor a tartomány:

$$T = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\},$$

A transzformáció determinánsa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} u^{-\frac{5}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} v^{-\frac{1}{3}} u^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \frac{1}{u},$$

tehát a keresett terület:

$$\mu(T) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{2}{3} \frac{1}{u} dv du = \int_1^2 \frac{2}{3} \frac{1}{u} du = \left[ \frac{2}{3} \ln u \right]_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2 \approx 0,47.$$

2. Határozza meg a

$$z = 1 - x^2 - 2y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

felület  $z \geq 0$  része és az  $x, y$  sík által határolt térrész térfogatát!

A felület az  $xy$  síkot az

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

egyenletű ellipszisben metszi.

A meghatározandó térfogat tehát

$$\iint_T (1 - x^2 - 2y^2) dx dy,$$

ahol

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Célszerű a kettős integrál transzformációja:

$$x := r \cos \varphi,$$

$$y := \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \varphi.$$

Ezen új változókkal:

$$T = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

A transzformáció determinánsa (V.3. 9. feladatához hasonlóan):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

tehát a keresett térfogat:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) \frac{r}{\sqrt{2}} d\varphi dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) \frac{r}{\sqrt{2}} dr = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}. \end{aligned}$$

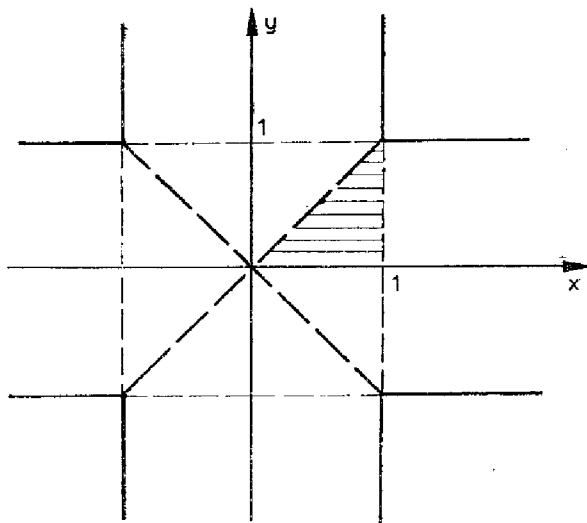
3. Határozza meg az

$$x^2 + z^2 = 1$$

és

$$y^2 + z^2 = 1$$

hengerek közös részének térfogatát!



64. ábra

A 64. ábrán felülnézetben ábrázoltuk a két hengert, amelyeknek tengelye az  $y$ , ill. az  $x$  tengely. Az ábrán szaggatott vonal jelzi a két hengerfelület metszévonalának képét.

A szimmetriából következően elegendő a vonalkázott terület feletti rész térfogatát meghatározunk. Ez az integrálási tartomány nyolcadrésze, de mivel csak az  $xy$  sík feletti rész térfogatát számoljuk, így a teljes térfogat tizenhatodrészt kapjuk meg.

Az integrálást tehát a

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

tartományra végezzük.

Itt a határoló hengerfelület — a takarásban levő „alsó” felület:

$$z^2 + x^2 = 1,$$

így:

$$\begin{aligned} \frac{V}{16} &= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} \, dy \, dx = \int_0^1 [y\sqrt{1-x^2}]_0^x \, dx = \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[ (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A keresett térfogat tehát:

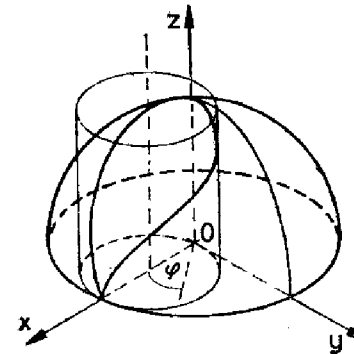
$$V = \frac{16}{3}.$$

*Megjegyzés:* Érdekességként bemutatjuk Bláthy Ottó e feladatra adott megoldását. (Műszaki nagyjaink 2. kötetéből.) Legyen a henger átmérője:  $D$ . „Ha a két hengert fekvő keresztnek képzeljük, a közös test elől- és oldalnézete kör, felülnézete és minden vízszintes metszete pedig a kör köré írt négyzet. Tehát a közös test köbtartalma úgy viszonylik a gömbéhez, mint a négyzet területe a beírt köréhez, vagyis arányuk:  $4 : \pi$ . A gömb köbtartalma  $\frac{\pi}{6} D^3$ , tehát a közös testé  $\frac{4}{6} D^3$ .”  $D=2$  esetén:  $V = \frac{16}{3}$ , azaz az előző eredményt kapjuk.

4. Határozza meg az origó középpontú két egység sugarú gömbből az

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

hengerfelület által kimetszett test (Viviani-féle test) térfogatát!



65. ábra

A test szimmetrikus az  $xy$  síkra (65. ábra), így elegendő a  $z \geq 0$  részének térfogatát meghatározunk. Mivel a gömb egyenlete:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

tehát

$$\frac{V}{2} = \int_T \int \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy,$$

ahol

$$T = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

E tartomány polárkoordinátákra átvérve (60. ábra):

$$T = \left\{ (r, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \right\}.$$

A transzformációt elvégezve:

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} (4-r^2)^{\frac{1}{2}} r dr d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \frac{2}{3} (4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy  $(4-4 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} |\sin^3 \varphi|$ , valamint a tartomány szimmetriáját, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4^{\frac{3}{2}} (\sin^3 \varphi - 1) d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi)) d\varphi = \\ &= \frac{16}{3} \left[ \varphi + \cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right), \end{aligned}$$

tehát a Viviani-test térfogata:

$$V = \frac{32}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

5. Határozza meg az

$$(x-3)^2 + z^2 = 4$$

egyenletű körvonal  $z$  tengely körüli forgatásakor keletkező térfelületét!

A keletkező felület egyenlete (a IV.2. 3. feladata):

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (3+2 \cos u) \cos \varphi \mathbf{i} + (3+2 \cos u) \sin \varphi \mathbf{j} + 2 \sin u \mathbf{k} \quad (u, \varphi) \in [0; 2\pi]^2.$$

A felszín kiszámításához szükséges

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\varphi|$$

meghatározása.

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u = -2 \sin u \cos \varphi \mathbf{i} - 2 \sin u \sin \varphi \mathbf{j} + 2 \cos u \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_\varphi = (3+2 \cos u)(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}).$$

Ezek vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\varphi &= (3+2 \cos u) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 \sin u \cos \varphi & -2 \sin u \sin \varphi & 2 \cos u \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (3+2 \cos u)(-2 \cos u \cos \varphi \mathbf{i} - 2 \cos u \sin \varphi \mathbf{j} - 2 \sin u \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Ennek abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\varphi| &= (3+2 \cos u) \sqrt{4 \cos^2 u (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 4 \sin^2 u} = \\ &= 2(3+2 \cos u). \end{aligned}$$

Ebből következően a tórusz felszíne:

$$\begin{aligned} A &= \int_T \int |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\varphi| du d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (6+4 \cos u) d\varphi du = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (6+4 \cos u) du = 24\pi^2. \end{aligned}$$

Lényegesen gyorsabban jutunk eredményre a Guldin-tétel alkalmazásával.

A forgatott kör kerülete:

$$k=4\pi.$$

A körlemez tömegközéppontja nyilvánvalóan a kör középpontja, így a tömegközéppont által a forgatáskor leírt kör kerülete:  $6\pi$ .

Guldin tétele szerint a forgástest felszíne:

$$A=4\pi 6\pi=24\pi^2,$$

ami természetesen az előzővel megegyező érték. Hasonlóan igen könnyen kapjuk a tórusz térfogatát is.

A forgatott körlemez területe:

$$T=4\pi,$$

a térfogat tehát:

$$V=4\pi 6\pi=24\pi^2.$$

( $A$  és  $V$  értéke általában különböző!)

6. Határozza meg a IV.2. szakasz 6. feladatában szereplő csavarfelület

$$t \in [0; 2\pi] \quad \text{és} \quad u \in [0; 1]$$

paraméterhatárokkal határolt részének felszínét!

A felület:

$$\mathbf{s}(t, u) = (\cos t - u \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + u \cos t)\mathbf{j} + (t + u)\mathbf{k}.$$

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{s}'_t = (-\sin t - u \cos t)\mathbf{i} + (\cos t - u \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{s}'_u = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

A felszín kiszámításához ezek vektoriális szorzatának abszolút értéke szükséges.

$$\mathbf{s}'_t \times \mathbf{s}'_u = -u \sin t \mathbf{i} + u \cos t \mathbf{j} + u \mathbf{k}.$$

Ennek abszolút értéke:

$$|\mathbf{s}'_t \times \mathbf{s}'_u| = \sqrt{2u^2} = u\sqrt{2}.$$

A felületdarab felszíne tehát:

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\sqrt{2} \, dt \, du = 2\pi \int_0^1 u\sqrt{2} \, du = \pi\sqrt{2}.$$

*Megjegyzés:* IV.1. szakasz 4. feladatában láttuk, hogy a csavarvonal ívhossza a  $t \in [0; 2\pi]$  intervallumon  $2\pi\sqrt{2}$ .

IV.2-ben említettük, hogy a felület úgynevezett lefejthető vonalfelület, azaz síkba kiteríthető. Várható volt tehát, hogy a felületdarab felszíne arányos a görbe ívhosszával.

Könnyen látható, hogy  $t \in [0; t_0]$ ,  $u \in [0; u_0]$  esetén a felszín.

$$A = \pi t_0 u_0^2 \sqrt{2} = \frac{U_0^2 S}{2},$$

ahol  $S$  a görbe ívhossza.

7. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \quad D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

felület felszínét!

A felület az

$$f: (x, y) \mapsto xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény grafikonjának — egy nyeregfelületnek — része. A felszín kiszámításához meg kell határoznunk a felületi normális abszolút értékét.

Mivel

$$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + y\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_y = \mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

tehát

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Így az integrálandó függvény:

$$|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Mivel az integrálási tartomány az origó középpontú egységgör, célszerű polárkoordinátákra áttérnünk:

$$T = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

A felszín tehát:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1+r^2} \, d\varphi \, dr = \frac{2\pi}{2} \int_0^1 2r(1+r^2)^{\frac{1}{2}} \, dr = \\ &= \pi \left[ \frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi (\sqrt{8} - 1). \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* E feladatban látjuk, de általánosan is könnyen igazolható, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto f(x, y), \quad (x, y) \in T \subset \mathbb{R}^2$$

függvénnyel jellemzett felület felszíne:

$$A = \iint_T \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2},$$

ha ez az integrál létezik.

8. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2)\mathbf{k} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

felület  $xy$  sík feletti részének felszínét!

A felület az

$$f: (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény grafikonja, egy forgási paraboloid. Az  $xy$  síkkal alkotott metszész-vonal egyenlete:

$$1 - x^2 - y^2 = 0.$$

Az előző feladat megjegyzése szerint az integrálandó:

$$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

Mivel az integrálási tartomány kör, így itt is célszerű polárkoordinátákra áttérnünk:

$$T = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

A felszín tehát:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1+4r^2} \, d\varphi \, dr = \frac{2\pi}{8} \int_0^1 8r(1+4r^2)^{\frac{1}{2}} \, dr = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (\sqrt{125} - 1). \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* Mivel forgásfelületről van szó, a felszín egyszeres integrálással is meghatározható.

Könnyen látható, hogy a feladatban szereplő felületdarab felszíne azonos az

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad x \in [0; 1]$$

függvény grafikonjának  $x$  tengely körüli forgatásakor keletkező felület fel-

színevel. Ez viszont, mint azt az Olvasó az egyváltozós függvények analíziséből ismeri:

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1} dx =$$

$$= \pi \left[ \frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{4 \cdot \frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (\sqrt{125} - 1),$$

ami az előzővel megegyező.

9. Határozza meg a

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$$

tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

Mivel a tartomány az  $y$  tengelyre szimmetrikus, és a tömegközéppont a szimmetriatengelyen helyezkedik el, tehát:

$$x_s = 0.$$

Az  $y$  koordináta meghatározásakor figyelembe vesszük, hogy homogén síklapról van szó, tehát a sűrűség állandó, így az integráljel elé kiemelhető:

$$y_s = \frac{\int_T \int y dx dy}{\int_T \int dx dy} = \frac{\int_T \int y dx dy}{\mu(T)}.$$

A nevező a félkörlemez területe:

$$\mu(T) = \frac{1}{2} r^2 \pi,$$

az integrálási tartomány:

$$T = \{(x, y) \mid -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}.$$

így a számláló meghatározásakor először  $y$  szerint kell integrálnunk.

$$\int_T \int y dx dy = \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} y dy dx = \int_{-r}^r \frac{r^2 - x^2}{2} dx = \frac{2}{3} r^3.$$

Tehát a tömegközéppont  $y$  koordinátája:

$$y_s = \frac{4r}{3\pi}.$$

*Megjegyzés:*  $y_s$  értékét lényegesen egyszerűbben megkaphatjuk Guldin tételei alapján.

Mivel a félkör forgatásakor egy gömb keletkezik, így:

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{r^2 \pi}{2} 2\pi y_s,$$

ahol  $2\pi y_s$  a tömegközéppont által megtett út.

Ezt rendezve:

$$y_s = \frac{4r}{3\pi}.$$

10. Határozza meg a

$$T = \{(x, y) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

A tartomány (62. ábra) szimmetrikus az  $y = x$  egyenesre, azaz  $x_s = y_s$ . A tömegközéppont  $x$  koordinátája:

$$x_s = \frac{\int_T \int x dx dy}{\int_T \int dx dy}.$$



A számlálót már az V.3. szakasz feladatában meghatároztuk:

$$\iint_T x \, dx \, dy = \frac{8}{105}.$$

A nevezőt az ott látott módszerrel integráljuk az

$$\begin{aligned} x &:= r \cos^3 \varphi, \\ y &:= r \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

transzformációt alkalmazva:

$$\begin{aligned} \iint_T dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3r}{4} \sin^2 2\varphi \, d\varphi \, dr = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(1 - \cos 4\varphi) \, d\varphi \, dr = \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 r \frac{\pi}{2} \, dr = \frac{3\pi}{32}. \end{aligned}$$

Ebből következően:

$$x_s = y_s = \frac{256}{315\pi} \approx 0,259.$$

*Megjegyzés:* E feladatnál is meghatározhatnánk  $y_s$  értékét a térfogat ismeretében:  $y_s$ -ből viszont kiszámíthatjuk a síklap forgatásával keletkező test térfogatát:

$$V \equiv \mu(T) 2\pi y_s = \frac{3\pi}{32} 2\pi \frac{256}{315\pi} = \frac{16}{105} \pi.$$

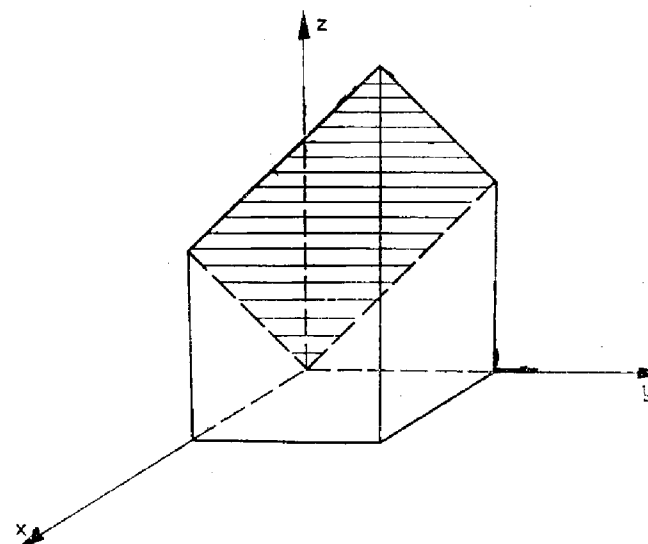
11. Határozza meg annak az egységnyezetet lefedő síklemez tömegközéppontjának koordinátáit, amelynek sűrűsége:

$$\varrho: (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y) \in [0; 1]^2.$$

Mivel  $\varrho$  szimmetrikus két változójában, s a tartomány szimmetrikus az  $y = x$  egyenesre, így

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{\iint_T x(x+y) \, dx \, dy}{\iint_T (x+y) \, dx \, dy} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + xy) \, dx \, dy}{\int_0^1 \int_0^1 (x+y) \, dx \, dy} = \\ &= \frac{\int_0^1 \left( \frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right) dy}{\int_0^1 \left( \frac{1}{2} + y \right) dy} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

A tömegközéppont tehát az  $S\left(\frac{7}{12}; \frac{7}{12}\right)$  pontban van.



66. ábra

*Megjegyzés:* A most megoldott feladatot úgy is felfoghatjuk, hogy a 66. ábrán látható homogén test tömegközéppontjának  $x$  és  $y$  koordinátáját határoztuk meg. A  $z$  koordináta meghatározásához már hármas integrál szükséges. (E test magassága a  $P(x, y)$  pontban  $x+y$ .)

12. Határozza meg az  $R$  sugarú, homogén,  $\rho$  sűrűségű, origó középpontú henger origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Mint e rész bevezetőjében láttuk, az origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték ( $\rho$  állandó, így kiemelhető):

$$\Theta = \rho \int_T \int (x^2 + y^2) dx dy.$$

Célszerű polárkoordinátákkal dolgoznunk:

$$\begin{aligned} \Theta &= \rho \int_T \int (x^2 + y^2) dx dy = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi dr = \\ &= \frac{2\pi \rho R^4}{4} = \pi R^2 \rho \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2}, \end{aligned}$$

ahol  $m$  a korong tömege.

*Megjegyzés:* A kapott eredmény homogén  $R$  sugarú henger tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának is tekinthető.

13. Határozza meg a

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

tartományt lefedő homogén síklemez  $y$  tengelyre vett tehetetlenségi nyomatékát!

E rész bevezetője szerint:

$$\Theta_y = \rho \int_T \int x^2 dx dy = \rho \int_0^b \int_0^a x^2 dx dy = \frac{1}{3} \rho a^3 b = \frac{1}{3} m a^2,$$

ahol  $m = ab\rho$  a lap tömege.

A feladat megoldása egy  $a$  hosszúságú rúd, a végpontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának is tekinthető.

## VI. HÁRMAS INTEGRÁL

### 1. Hármass integrál téglá-, ill. normáltartomány esetén

A hármass integrál definícióját a kettős integrál definíciójához hasonlóan adjuk meg.

Tekintsük a  $V \subset R^3$  mérhető, korlátos, összefüggő tartományt! ( $V$ -t *mérhetőnek* nevezzük, ha a  $V$ -be beírt poliéderek térfogatának felső határa és a  $V$  köré írt poliéderek térfogatának alsó határa megegyezik.)

$V$  térfogatát, mértékét jelölje  $\mu(V)$ .

Tekintsük  $V$  egy felosztását! (Egy tartomány felosztását V.1-ben definiáltuk.) Azt mondjuk, hogy a felosztás minden határon túl finomodik, ha a  $V_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) halmazok mindegyikének átmérője zérushoz tart.

Legyen az  $f: V \rightarrow R$  háromváltozós függvény korlátos  $V$ -n, s jelölje  $m_i(M_i)$  az  $f$  értékeinek alsó (felső) határát a  $V_i \subset V$  halmazon.

Az  $f$  függvényt  $V$ -n *integrálhatónak* nevezzük, ha a

$$\sum_{i=1}^n m_i \mu(V_i) \quad \text{és a} \quad \sum_{i=1}^n M_i \mu(V_i)$$

összegek határértéke bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozat esetén megegyezik. E közös határértéket nevezzük  $f$   $V$ -re vett *hármass* (térfogati) *integráljának*.

Jelölése:

$$\iiint_V f = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

de szokásos az

$$\int_V f dV$$

jelölés is.

Ha  $f$  integrálható  $V$ -n és

$$V = V_1 \cup V_2,$$

ahol  $V_1$  és  $V_2$  mérhető tartományok, amelyeknek nincs közös belső pontjuk, akkor a definícióból következően:

$$\iiint_V f = \iiint_{V_1} f + \iiint_{V_2} f.$$

Ha  $f$  folytonos a mérhető, korlátos, zárt  $V$  tartományon, akkor  $f$   $V$ -re vonatkozó integrálja biztosan létezik, de  $f$  folytonossága itt sem szükséges feltétele az integrálhatóságnak.

*Téglartományról* beszélünk, ha

$$V = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}.$$

Ekkor, ha  $f$  integrálható  $V$ -n és létezik a

$$z \mapsto \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy dx, \quad z \in [a_3; b_3]$$

függvény, akkor

$$\iiint_V f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Az integrálás sorrendje téglartomány esetén felcserélhető. Itt is igaz, hogy ha  $f$  integrálható és

$$f(x, y, z) = g_1(x)g_2(y)g_3(z) \quad \text{minden } (x, y, z) \in V$$

esetén, akkor  $f$  hármass integrálja három egyszeres integrál szorzataként számítható ki.

Legyen  $T$  az  $xy$  sík normáltartománya, legyenek továbbá a

$$g_1: (x, y) \mapsto g_1(x, y), \quad (x, y) \in T$$

$$g_2: (x, y) \mapsto g_2(x, y)$$

függvények folytonosak  $T$ -n, és teljesüljön ezekre  $T$  minden pontjában a

$$g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$$

egyenlőtlenség!

Ekkor a

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in T, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

tartományt az  $xy$  síkra *normáltartománynak* nevezzük. Hasonlóan értelmezhető  $xz$ -re, ill.  $yz$ -re normáltartomány is.

Normáltartományok esetén az integrálás sorrendje *meghatározott*. Például az előző tartomány esetén (ha  $f$  integrálható):

$$\iiint_V f = \iint_T \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Ha  $V$  nem normáltartomány, akkor  $V$ -t normáltartományokra bontjuk, esetleg az integrál transzformációjával próbálkozunk. (A transzformációt VI.2-ben tárgyaljuk.)

### Gyakorló feladatok

① Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^2 + 4yz, \quad (x, y, z) \in R^3$$

függvény egységkockára vonatkozó integrálját!

Mivel  $V$  téglartomány, ezért az integrálás sorrendje tetszőleges. Integráljunk először  $z$  szerint:

$$\int_0^1 (x^2 + 4yz) dz = [x^2 z + 2yz^2]_0^1 = x^2 + 2y.$$

Mivel a  $z$  szerinti integrálást már elvégeztük, így már csak a kapott függvény egységnégyzetre vett kettős integrálját kell meghatározunk:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} + 2xy \right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + 2y \right) dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

A hármas integrál kiszámítása tehát az egyik változó szerinti integrálás elvégzése után egy kettős integrál értékének meghatározásával egyenértékű.

2. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}, \quad D_f = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x+y+z > 0\}$$

függvény egységkockára vonatkozó integrálját!

$f$  nem korlátos az egységkockán, de mivel itt

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

és

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

létezik, így  $f$  adott tartományra vett integrálja is létezik. (L. az V.1. szakasz 8. feladatát!)

Az integrálás sorrendje tetszőleges, mivel  $T$  téglartomány. Integráljunk először  $z$  szerint!

$$\int_0^1 (x+y+z)^{-\frac{1}{2}} dz = \left[ 2(x+y+z)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2(1+y+x)^{\frac{1}{2}} - 2(y+x)^{\frac{1}{2}}.$$

E függvény egységnyezetre vett kettős integrálja:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \int_0^1 \left[ (1+y+x)^{\frac{1}{2}} - (y+x)^{\frac{1}{2}} \right] dy dx = \\ & = \frac{4}{3} \int_0^1 \left[ (1+y+x)^{\frac{3}{2}} - (y+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 dx = \frac{4}{3} \int_0^1 \left( (2+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right) dx - \\ & - 2 \int_0^1 (1+x)^{\frac{3}{2}} dx \approx 0,86. \end{aligned}$$

3. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+y+z}},$$

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \sqrt{x} + y + z \neq 0\}$$

függvényt az egységkockára!

Az előző feladatnál látott megoldásból következik, hogy  $f$  egységkockára vett integrálja létezik. Az integrálás sorrendje tetszőleges, mivel téglalattományra integrálunk.

Először  $z$  szerint integrálva:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z}} = [\ln(\sqrt{x+y+z})]_0^1 = \ln(\sqrt{x+y+1}) - \ln(\sqrt{x+y}).$$

A kapott eredmény  $y$  szerinti integrálásakor mindkét tagban parciálisan integrálunk. Az első tag:

$$\int_0^1 1 \cdot \ln(\sqrt{x+y+1}) dy = [y \ln(\sqrt{x+y+1})]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{x+y+1}} dy =$$

$$\begin{aligned} & = \ln(\sqrt{x+2}) - \int_0^1 \left( \frac{y+\sqrt{x+1}}{y+\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+y+1}} \right) dy = \\ & = \ln(\sqrt{x+2}) - [y - (\sqrt{x+1}) \ln(\sqrt{x+y+1})]_0^1 = \\ & = (\sqrt{x+2}) \ln(\sqrt{x+2}) - (\sqrt{x+1}) \ln(\sqrt{x+1}) - 1. \end{aligned}$$

Hasonlóan a második tag:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 1 \ln(\sqrt{x+y}) dy = [y \ln(\sqrt{x+y})]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y}} dy = \\ & = \ln \sqrt{x+1} - \int_0^1 \left( \frac{y+\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}} \right) dy = \\ & = \ln(\sqrt{x+1}) - [y - \sqrt{x} \ln(y+\sqrt{x})]_0^1 = \\ & = (\sqrt{x+1}) \ln(\sqrt{x+1}) - \sqrt{x} \ln \sqrt{x} - 1. \end{aligned}$$

E kettő különbségét kell  $x$  szerint integrálnunk:

$$\begin{aligned} \int_V \int \int f &= \int_0^1 ((\sqrt{x+2}) \ln(\sqrt{x+2}) - 2(\sqrt{x+1}) \ln(\sqrt{x+1}) - \\ & - \sqrt{x} \ln \sqrt{x}) dx. \end{aligned}$$

A három tagot külön-külön integráljuk. Az első tag integrálásakor célszerű az

$$u := \sqrt{x+2}$$

helyettesítés:

$$\int_0^1 (\sqrt{x+2}) \ln(\sqrt{x+2}) dx = \int_2^3 u \ln u \cdot 2(u-2) du.$$

Parciális integrálással:

$$\int_2^3 2(u^2 - 2u) \ln u \, du = \left[ 2 \left( \frac{u^3}{3} - u^2 \right) \ln u - 2 \left( \frac{u^3}{9} - \frac{u^2}{2} \right) \right]_2^3 =$$

$$= 3 - 2 \left( \frac{8}{3} - 4 \right) \ln 2 + 2 \left( \frac{8}{9} - 2 \right) \approx 2,64.$$

A második tagnál hasonlóan járunk el:

$$v := \sqrt{x} + 1$$

helyettesítéssel:

$$\int_1^2 2v \ln v 2(v-1) \, dv = \left[ 4 \left( \frac{v^3}{3} - \frac{v^2}{2} \right) \ln v - 4 \left( \frac{v^3}{9} - \frac{v^2}{4} \right) \right]_1^2 =$$

$$= 4 \left( \frac{8}{3} - 2 \right) \ln 2 - 4 \left( \frac{8}{9} - 1 \right) + 4 \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) \approx 1,76.$$

A harmadik tagban parciálisan integrálva:

$$\int_0^1 \sqrt{x} \ln \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x} \ln x \, dx = \frac{1}{3} \left[ x^{\frac{3}{2}} \ln x \right]_0^1 - \left[ \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{2}{9},$$

mivel

$$\lim_{0+} \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} \ln x = 0.$$

A részeredményeket összevonva:

$$\iiint_V f \approx 0,66.$$

4. Igazolja, hogy létezik az

$$f: (x, y, z) \mapsto xyze^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény első térnyolcadra vonatkozó improprius integrálja, s határozza meg az integrál értékét!

Határozzuk meg először  $f$  integrálját a

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$$

kockára!

Mivel  $V$  téglartomány és

$$xyze^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{2}} = xe^{\frac{-x^2}{2}} ye^{\frac{-y^2}{2}} ze^{\frac{-z^2}{2}},$$

így a hármas integrál három egyszeres integrál szorzatával egyenlő:

$$\iiint_V f = \int_0^a xe^{\frac{-x^2}{2}} \, dx \int_0^a ye^{\frac{-y^2}{2}} \, dy \int_0^a ze^{\frac{-z^2}{2}} \, dz =$$

$$= \left( \int_0^a xe^{\frac{-x^2}{2}} \, dx \right)^3 = \left( \left[ -e^{\frac{-x^2}{2}} \right]_0^a \right)^3 = \left( 1 - e^{\frac{-a^2}{2}} \right)^3.$$

Mivel

$$\lim_{\infty} \left( 1 - e^{\frac{-a^2}{2}} \right)^3 = 1,$$

így az  $f$  függvény első térnyolcadra vett integrálja létezik és 1.

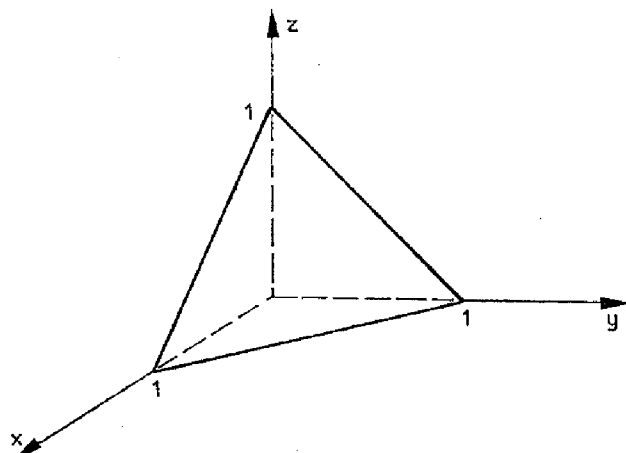
*Megjegyzés:* A feladat eredményéből következik, hogy

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |f| = 8.$$

5. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto 2xy, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvényt a 67. ábrán látható tartományra!



67. ábra

A tartományt a koordinátasíkok és az  $x+y+z=1$  sík határolja. A tartomány egy lehetséges megadási módja:

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

$V$  az  $xy$  síkra normáltartomány.

Először  $z$  szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{1-x-y} 2xy \, dz = [2xyz]_0^{1-x-y} = 2xy - 2x^2y - 2xy^2.$$

Ennek  $y$  szerinti integrálja:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} (2xy - 2x^2y - 2xy^2) \, dy &= \left[ xy^2 - x^2y^2 - 2x \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} = \\ &= -\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x. \end{aligned}$$

Tehát  $f$  integrálja:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \left( -\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x \right) dx = \frac{1}{60}.$$

*Megjegyzés:* A tartomány az  $xz$ , ill.  $yz$  síkra is normáltartomány, így megadható pl.:

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1-z, 0 \leq y \leq 1-z-x\}$$

alakban is. Ekkor először  $y$ , majd  $x$ , végül  $z$  szerint kell integrálni. Az Olvasó gyakorlásképpen ellenőrizheti, hogy így elvégezve az integrálást, ugyanaz az eredmény adódik.

6. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto 2y, \quad (x, y, z) \in R^3$$

függvényt a

$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$  tartományra!

A tartomány, amely az  $xy$  síkra normáltartomány a

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

paraboloid alatti térrész első térfelcádjába eső része. Először  $z$  szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{1-y^2-x^2} 2y \, dz = [2yz]_0^{1-y^2-x^2} = 2y - 2y^3 - 2yx^2,$$

ennek  $y$  szerinti integrálja:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2y - 2y^3 - 2yx^2) \, dy &= \left[ y^2 - \frac{y^4}{2} - y^2x^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 1 - x^2 - \frac{(1-x^2)^2}{2} - x^2(1-x^2) = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}. \end{aligned}$$

Tehát  $f$  integrálja:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{4}{15}.$$

7. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto xyz, \quad (x, y, z) \in R^3$$

függvényt a

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

tartományra!

Határozza meg

$$\int_V \int_V \int_V |f|$$

értékét is!

A tartomány egy origó középpontú, egységsugarú gömb. Mivel  $f$  páratlan mindhárom változójában,  $V$  szimmetrikus a koordinátságokra, így

$$\int_V \int_V \int_V f = 0.$$

$f$  abszolút értékének integrálásakor elegendő az első térfelcsekre integrálnunk. Ennek egy lehetséges megadási módja:

$$V_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Mivel  $V_1$ -et az  $xy$  síkra normáltartományként adtuk meg, így először  $z$  szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz = \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) = \frac{1}{2} xy - x^3y - xy^3.$$

Ennek  $y$  szerinti integrálja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (xy - x^3y - xy^3) \, dy &= \frac{1}{2} \left[ \frac{xy^2}{2} - \frac{x^3y^2}{2} - \frac{xy^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{1}{8} (x - 2x^3 + x^5). \end{aligned}$$

Tehát:

$$\int_V \int_V \int_V |f| = 8 \int_V \int_V \int_V f = \int_0^1 (x - 2x^3 + x^5) \, dx = \frac{1}{6}.$$

8. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto e^{\frac{z}{xy}}, \quad D_f = \{(x, y, z) \in R^3 \mid xy \neq 0\}$$

függvényt a

$$V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1+x, 0 \leq z \leq xy\}$$

tartományra!

A tartomány az  $xy$  síkra normáltartomány, így először  $z$  szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{xy} e^{\frac{z}{xy}} \, dz = \left[ \frac{e^{\frac{z}{xy}}}{\frac{1}{xy}} \right]_0^{xy} = xy(e-1),$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_V \int_V \int_V f &= (e-1) \int_1^2 \int_1^{1+x} xy \, dy \, dx = (e-1) \int_1^2 \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_1^{1+x} \, dx = \\ &= \frac{e-1}{2} \int_1^2 (2x^2 + x^3) \, dx = \frac{101}{24} (e-1). \end{aligned}$$

9. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto xy, \quad (x, y, z) \in R^3$$

függvényt a

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

tartományra!



A tartomány a  $(z-1)^2 = x^2 + y^2$  egyenletű körkúp első síknegyedbeli, a  $z=0$ , ill.  $z=1$  síkokkal határolt része.  
Először  $z$  szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{1-\sqrt{y^2+x^2}} xy \, dz = [xyz]_0^{1-\sqrt{y^2+x^2}} = xy - xy\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ennek  $y$  szerinti integrálja:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [xy - xy(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}] dy &= \frac{1}{2} \left[ xy^2 - x \frac{2}{3} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} x(1-x^2) - \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} x^4, \end{aligned}$$

tehát  $f$  integrálja:

$$\int \int \int_V f = \int_0^1 \left( \frac{5}{6} x - \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{3} x^4 \right) dx = \frac{9}{40}.$$

## 2. A hármas integrál transzformációja

Az V. fejezet 3. szakaszának tárgyalása során láttuk, hogy egyes transzformációval egyes feladatok megoldása egyszerűbbé válik.

Hasonló céllal tárgyaljuk a hármas integrál transzformációját is.

Ha az

$$\begin{aligned} x &: (u, v, w) \mapsto x(u, v, w), \\ y &: (u, v, w) \mapsto y(u, v, w), \\ z &: (u, v, w) \mapsto z(u, v, w), \end{aligned} \quad (u, v, w) \in V' \subset \mathbb{R}^3$$

függvények az  $u, v, w$  tér  $V'$  tartományát kölcsönösen egyértelműen képezik le az  $x, y, z$  tér  $V$  tartományára, e függvények

folytonosan differenciálhatók, és  $f$  integrálható  $V$ -n, akkor:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V f &= \int \int \int_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \times \\ &\times \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw, \end{aligned}$$

ahol

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

az ún. Jacobi-determináns.

Leggyakoribb transzformáció a hengerkoordinátákra, ill. gömbi koordinátákra való áttérés. Hengerkoordináták esetén:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

a Jacobi-determináns ekkor  $r$ -rel egyenlő.

Gömbi koordináta-rendszer esetén:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta, \end{aligned}$$

a Jacobi-determináns  $r^2 \sin \vartheta$ -val egyenlő.

Az I. fejezetben láttuk, hogy a  $z$  tengely pontjainak kivételével a leképezés mindkét esetben kölcsönösen egyértelmű. Igazolható, hogy akkor is helyes eredményre jutunk, ha a tartománynak a  $z$  tengellyel van közös pontja.

## Gyakorló feladatok

### 1. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{z}{1+x^2+y^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvényt a

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

tartományra!

A tartomány egy egységnyi magasságú körhenger, melynek tengelye a  $z$  tengely.

Célszerű hengerkoordinátákra áttérni. Ekkor a tartomány:

$$V = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Mivel a Jacobi-determináns  $r$ -rel egyenlő, így:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z}{1+r^2} r \, d\varphi \, dz \, dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \frac{zr}{1+r^2} \, dz \, dr = \\ &= \pi \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} \, dr = \frac{\pi}{2} [\ln(1+r^2)]_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

### 2. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^2 + z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvényt az előző szakasz 9. feladatában szereplő tartományra!

A tartomány a

$(z-1)^2 = x^2 + y^2$  egyenletű körkúp  $0 \leq z \leq 1$  része. A kúpfelületet az  $xy$  síkkal párhuzamos sík körben metszi, amelynek sugara:

$$r = |z-1| = 1-z, \quad \text{ha} \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Tehát hengerkoordinátákra áttérve a tartomány:

$$V = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 1-r\}.$$

( $z$  felső határát az  $r=1-z$  egyenlőségből kaptuk.) A transzformációt elvégezve:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-r} (r^2 \cos^2 \varphi + z^2) r \, dz \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( r^3(1-r) \cos^2 \varphi + \frac{1}{3} r(1-r)^3 \right) d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (r^3 - r^4) \cos^2 \varphi + \frac{1}{3} (r - 3r^2 + 3r^3 - r^4) \right) d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{20} \cos^2 \varphi + \frac{1}{60} \right) d\varphi = \int_0^1 \left( \frac{1}{20} \cdot \frac{1+\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{60} \right) d\varphi = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* A feladatban látott megfontolás egyéb forgásfelületekkel határolt tartományok esetén is használható.

### 3. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$$

függvényt a 68. ábrán látható tartományra!

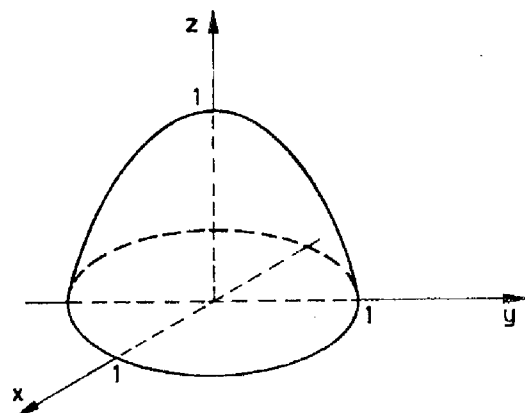
A tartományt a  $z = 1 - x^2 - y^2$  paraboloid és az  $xy$  sík határolja. A paraboloidot az  $xy$  síkkal párhuzamos síkokkal metszve, a metszésvonalak körök, amelyeknek sugara

$$r = \sqrt{1-z}, \quad z \in [0; 1].$$

Hengerkoordinátákra áttérve a tartomány határai tehát:

$$V = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1-r^2\}.$$

A transzformációt elvégezve:



68. ábra

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} \frac{z}{r} dz d\varphi dr = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^2 d\varphi dr = \\ &= \pi \int_0^1 (1-2r^2+r^4) dr = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* Ha a tartomány szimmetriatengelye nem a  $z$  tengely, akkor a hengerkoordinátákat kissé módosítva alkalmazzuk, mint ezt a következő feladatban tesszük.

4. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto 2ye^{\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9}}, \quad (x, y, z) \in R^3$$

függvényt a

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}$$

tartományra!

A tartomány egy egységnyi magasságú henger, amelynek alapgörbéje az  $xz$  síkban levő ellipszis, tengelye az  $y$  tengely. Végezzük el a következő transzformációt:

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \varphi, \\ z &= 3r \sin \varphi, \\ y &= y. \end{aligned}$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke  $6r$ , és

$$V = \{(r, \varphi, y) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Mivel a helyettesítést elvégezve

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = r^2,$$

így:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 2ye^{r^2} 6r dy d\varphi dr = \\ &= \int_0^1 2y dy \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 6re^{r^2} dr = [y^2]_0^1 [\pi]_0^{2\pi} [3e^{r^2}]_0^1 = 6\pi(e-1). \end{aligned}$$

Az integrál átalakításakor felhasználtuk, hogy az új változók bevezetésével  $V$  téglartomány lett, és az integrálandó függvény szorzatalakban írható fel.

5. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{x}{\sqrt{\frac{y^2}{4} + z^2}}, \quad D_f = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid \frac{y^2}{4} + z^2 \neq 0 \right\}$$

függvényt a

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid (x-1)^2 \leq \frac{y^2}{4} + z^2, 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

tartományra!

Az integrálási tartományt a  $zy$  sík és az

$$(x-1)^2 = z^2 + \frac{y^2}{4}$$

egyenletű kúpfelület határolja. E kúp csúcsa az  $A(1; 0; 0)$  pont, alapgörbéje az  $yz$  síkban levő

$$z^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ ellipszis.}$$

Alkalmazzuk a következő transzformációt:

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= 2r \cos \varphi, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Mivel

$$z^2 + \frac{y^2}{4} = r^2,$$

így

$$(x-1)^2 = r^2,$$

azaz

$$1-x=r, \quad \text{ha} \quad x \in [0; 1].$$

A tartomány határai tehát:

$$V = \{(x, r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq x \leq 1-r\}.$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke  $2r$ , így:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r} \frac{x}{r} 2r \, dx \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} [x^2]_0^{1-r} d\varphi \, dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 (1-r)^2 dr = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

6. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0; 0; 0)\}$$

függvényt a

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

tartományra!

Határozza meg  $f$  abszolút értékének e tartományon vett integrálját is!

Az integrálási tartomány egy origó középpontú egységsugarú gömb. Mivel  $f$  mindhárom változójában páratlan, és  $V$  a koordinátasíkokra szimmetrikus, így  $f$   $V$  tartományon vett integrálja zérus.

$f$  abszolút értékének integrálásakor elegendő az integrál értékét a tartomány első térfelcsojába eső részére meghatároznunk.

Célszerű gömbi koordinátákat alkalmazni.

Ekkor:

$$V_1 = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

A helyettesítést elvégezve:

$$\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = r \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

tehát  $|f|$  integrálja:

$$\begin{aligned} \iiint_V |f| &= 8 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = \\ &= 8 \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= 2[r^4]_0^1 \left[ \frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

7. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto e^{-x^2-y^2-z^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény első tényolcadra vett integrálját!

Az előző feladathoz hasonlóan e feladatnál is dolgozhatnánk gömbi koordinátákkal. Célszerűbb azonban V.3. 4. feladatának eredményét felhasználni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

tehát

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Ennek alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} e^{-z^2} dx dy dz &= \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^3 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

8. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto e^{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}}} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvény

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}$$

tartományra vett integrálját!

A tartomány egy origó középpontú ellipszoid, amelynek tengelyei a koordinátatengelyekkel egyirányúak.

Célszerű kissé módosított gömbi koordinátákat (elliptikus koordináták) alkalmazni:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = 2r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = 3r \cos \vartheta.$$

Mivel a Jacobi-determináns második sora kétszerese, harmadik sora háromszorosa a gömbi koordináta-rendszer alkalmazásakor felírt determinánsnak, így a determináns értéke  $6r^2 \sin \vartheta$ .

Az integrálási tartomány:

$$V = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}.$$

$f$  integrálja tehát:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 6r^2 \sin \vartheta e^r d\vartheta d\varphi dr = \\ &= \int_0^1 6r^2 e^r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Az első tényező értéke parciális integrálással:

$$\int_0^1 6r^2 e^r dr = [6r^2 e^r - 12r e^r + 12e^r]_0^1 = 6e - 12.$$

Végeredményben a keresett integrál:

$$\iiint_V f = (6e - 12) 2\pi \cdot 2 = 24\pi(e - 2).$$

9. Integrálja a

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

tartományra az

$$f: (x, y, z) \mapsto \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}, \quad (x, y, z) \in V$$

függvényt!

Az előző feladathoz hasonlóan végezzük el a következő transzformációt:

$$\begin{aligned} x &= ar \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= br \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= cr \cos \vartheta, \\ (a, b, c &\in \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

A Jacobi-determináns értéke  $abc r^2 \sin \vartheta$ , az integrálási tartomány:

$$V = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}.$$

Ezt alkalmazva:

$$\begin{aligned} \int_V \int \int f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{1-r^2} abc r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \\ &= abc \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4abc\pi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr. \end{aligned}$$

Célszerű az  $r := \sin t$  helyettesítést elvégezni:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Tehát  $f$  integrálja az adott tartományon

$$\frac{1}{4} abc\pi^2 \text{-tel egyenlő.}$$

10. Integrálja az

$$f: (x, y, z) \mapsto x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

függvényt a

$$V = \{(x, y, z) \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \leq 1\}$$

gömbre!

Célszerű a koordináta-rendszer kezdőpontját a gömb középpontjába tolván gömbi koordinátákat bevezetni, azaz elvégezni a következő transzformációt:

$$\begin{aligned} x &= 3 + r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= 2 + r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= 4 + r \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Az integrálási tartomány ekkor:

$$V = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}.$$

Mivel állandó deriváltja zérus, így a Jacobi-determináns értéke  $r^2 \sin \vartheta$ , tehát:

$$\begin{aligned} \int_V \int \int f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3 + r \sin \vartheta \cos \varphi) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( 3r^2 \sin \vartheta + r^3 \cos \varphi \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} \right) d\vartheta d\varphi dr. \end{aligned}$$

Mivel

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 2,$$

és

$$\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

tehát a  $\vartheta$  szerinti integrálás elvégzése után:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( 6r^2 + \frac{\pi}{2} r^3 \cos \varphi \right) d\varphi dr = \int_0^1 12\pi r^2 dr = 4\pi.$$

Az eredmény az integrálási tartomány térfogatának háromszorosa.

*Megjegyzés:* Az eredményt egyszerűbben kapjuk meg, ha felhasználjuk, hogy a gömb tömegközéppontjának  $x$  koordinátája 3, és (l. a következő szakaszt!)

$$x_s = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV},$$

ahol a nevező a gömb térfogata.

### 3. A hármas integrál alkalmazásai

A hármas integrál definíciójából következően:

$$\int_V dV = \mu(V) = \text{a } V \text{ tartomány térfogata.}$$

A lehetséges fizikai alkalmazások közül csak néhányat említünk: Ha a  $V$  térrészt kitöltő test sűrűségét a

$$\varrho : (x, y, z) \mapsto \varrho(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V$$

függvény írja le, akkor a test tömege:

$$m = \int_V \varrho dV.$$

(Ha  $\varrho$  a térrész töltéssűrűségét adja meg, akkor a fenti integrál a térrészben levő töltés mennyiségét adja meg.)

A  $V$  térrészt betöltő  $\varrho$  sűrűségű test tömegközéppontjának koordinátái — a kettős integrál alkalmazásainál láttak logikus általánosításaként:

$$x_s = \frac{\int_V \int_V \int_V x \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\int_V \int_V \int_V \varrho(x, y, z) dx dy dz},$$

$y_s, z_s$  kiszámítása hasonlóképpen történik.

(Természetesen, ha  $\varrho$  állandó, akkor az integráljel elé kiemelhető.)

Az előzőekben szereplő test  $x$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_x = \int_V \int_V \int_V (y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Az origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \int_V \int_V \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

### Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

tartomány térfogatát!

A tartomány egy ellipszoid, amelynek tengelyei a koordináta-tengelyekkel egyirányúak.

A tartomány térfogata:

$$\mu(V) = \int_V dV.$$

Az integrál meghatározásához a VI.2. szakasz 9. feladatában látott transzformációt végezzük el:

$$\begin{aligned}x &= ar \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= br \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= cr \cos \vartheta.\end{aligned}$$

E transzformációval:

$$\begin{aligned}\int_V dV &= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = 2abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi \, dr = \\&= 4\pi abc \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{4\pi}{3} abc.\end{aligned}$$

Természetesen, ha  $a=b=c=R_0$ , azaz a tartomány gömb, a test térfogatára a jól ismert

$$V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \text{ adódik.}$$

2. Határozza meg az előző feladatbeli ellipszoid  $z \geq 0$  részének tömegközéppontját, ha e test sűrűsége állandó!

Mivel a  $z$  tengely a test szimmetriatengelye, így a tömegközéppont a  $z$  tengelyen helyezkedik el, azaz

$$x_s = y_s = 0,$$

a  $z$  koordináta:

$$z_s = \frac{\int_V \int_V \int_V z \, dx \, dy \, dz}{\int_V \int_V \int_V dx \, dy \, dz}.$$

A nevező a térrész térfogatával egyenlő. Ez az érték — mivel félellipszoidról van szó — az előző feladatban számított térfogat fele, azaz

$$\int_V dV = \frac{2\pi}{3} abc.$$

A számláló meghatározásához az előbb látott transzformációt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}\int_V \int_V \int_V z \, dx \, dy \, dz &= abc^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \vartheta r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = \\&= abc^2 \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \, d\vartheta = abc^2 \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

A tömegközéppont  $z$  koordinátája tehát:

$$z_s = \frac{abc^2 \frac{\pi}{4}}{abc \frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8} c.$$

A tömegközéppont tehát az  $S\left(0; 0; \frac{3}{8}c\right)$  pontban van.  $\left(R_0\right.$  sugarú félgömb esetén:

$$z_s = \frac{3}{8} R_0 \Bigg).$$

3. Határozza meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

gömbhéjból a

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad z \geq 0$$

kúp vág ki!



A kúp tengelye a  $z$  tengely, félnyílásszöge  $\frac{\pi}{4}$ .

Elegendő a kérdéses test negyedrészenek a térfogatát meghatároznunk. Gömbi koordinátákra áttérve ez a térrész a következőképp jellemezhető:

$$V_1 = \left\{ (r, \varphi, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Tehát a térfogat:

$$\begin{aligned} \mu(V) &= \int_V dV = 4 \int_{V_1} dV = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = \\ &= 4 \int_1^2 r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \, d\vartheta = 4 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{7\pi}{3} (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4. Határozza meg az

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 2z$$

ellipszoid és az

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2 \quad z \geq 0$$

↑ úp közös részének térfogatát!

Az ellipszoid egyenlete

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z-1)^2 = 1$$

alakban is írható.

A két felület a  $z=1$  síkon az

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ellipszisben metszi egymást.

A térrész tehát:

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \right\}.$$

Integráljunk először  $z$  szerint:

$$\begin{aligned} \int_V dV &= \int_T \int \left( \int_{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}}^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}} dz \right) dx \, dy = \\ &= \int_T \int \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} \right) dx \, dy. \end{aligned}$$

(Itt  $T$ -vel jelöltük az  $xy$  sík

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

tartományát.)

A kettős integrál meghatározásához célszerű polárkoordinátás alakra áttérni:

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \varphi, \\ y &= 3r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_V dV &= 6 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1 + \sqrt{1 - r^2} - r) \, d\varphi \, dr = \\ &= 12\pi \int_0^1 (r + r(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} - r^2) \, dr = \\ &= 12\pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = 6\pi. \end{aligned}$$

**Megjegyzés:** A feladatot egyszerűbben is megoldhatjuk. A szóban forgó térrész ugyanis egy egységnyi magasságú ellipszis alapú kúpból és egy félellipszoidból áll, tehát térfogata:

$$\mu(V) = \frac{1}{3} 6\pi + \frac{2}{3} 6\pi = 6\pi.$$

(A kúp alapterülete  $ab\pi = 6\pi$ .)

5. Határozza meg a

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq c, \left( \frac{z}{c} - 1 \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

térrészt betöltő homogén test tömegközéppontjának koordinátáit!

A test egy ellipszis alapú kúp, amelynek tengelye az  $z$  tengely, tehát a tömegközéppont  $x$ , ill.  $y$  koordinátája zérus. A kúp térfogatát integrálás nélkül is könnyen meghatározhatjuk. Alapterülete, az ellipszis területe  $ab\pi$ -vel, magassága  $c$ -vel egyenlő, így

$$\mu(V) = \frac{abc\pi}{3}.$$

Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha a VI.2. szakasz 2. feladatához hasonlóan a következő transzformációt végezzük el:

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \varphi, \\ y &= br \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Ekkor az integrálási tartomány:

$$V = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq c(1-r)\}.$$

Ezt alkalmazva:

$$\int_V dV = ab \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{c(1-r)} r \, dz \, d\varphi \, dr = abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1-r) \, d\varphi \, dr =$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 (r-r^2) \, dr = \frac{abc\pi}{3},$$

ami valóban az előzővel megegyező.

Meg kell határoznunk a  $z_s$  számlálójában levő integrál értékét is:

$$\begin{aligned} \int_V z \, dV &= ab \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{c(1-r)} rz \, dz \, d\varphi \, dr = \frac{abc^2}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1-r)^2 \, d\varphi \, dr = \\ &= \frac{\pi abc^2}{12}. \end{aligned}$$

Végeredményben tehát a kúp tömegközéppontjának  $z$  koordinátája:

$$z_s = \frac{\pi abc^2}{12} : \frac{abc\pi}{3} = \frac{c}{4},$$

azaz a tömegközéppont a kúp magasságát 3 : 1 arányban bontja.

**Megjegyzés:** Ha az első feladatban szereplő ellipszoid  $z \leq 0$  részéből és az e feladatban szereplő kúpból alkotunk egy homogén testet, az eddigi számítások alapján ennek a tömegközéppontját is meg tudjuk határozni. A félellipszoid térfogata — így tömege is — az e feladatbeli kúp térfogatának kétszerese.

A kúp

$$S_1 \left( 0; 0; \frac{c}{4} \right)$$

tömegközéppontjában tehát egységnyi, az ellipszoid

$$S_2 \left( 0; 0; -\frac{3}{8} c \right)$$

tömegközéppontjában két egységnyi tömeg helyezkedik el. E két pontból álló pontrendszer tömegközéppontja:

$$S \left( 0; 0; -\frac{c}{6} \right).$$

Ha ezt a testet gravitációs térben egy vízszintes lapra állítjuk, „keljfeljancsi-ként” viselkedik. Stabil egyensúlyi helyzetben akkor van, ha az ellipszoid helyezkedik el alul és a kúp tengelye függőlegesen áll.

6. Határozza meg az  $R$  sugarú homogén gömb középpontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy a gömb középpontja az origóban legyen, és a forgástengely a  $z$  tengellyel essen egybe!

Mint a bevezetőben láttuk:

$$\Theta_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Gömbi koordinátákra áttérve:

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = \\ &= \rho \int_0^R r^4 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned}$$

A harmadik tényező:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta &= \int_0^\pi \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta = \int_0^\pi (\sin \vartheta - \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \left[ -\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ezt helyettesítve:

$$\Theta_z = \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3}.$$

Mivel a gömb tömege:  $\rho \frac{4}{3} R^3 \pi$ , így

$$\Theta_z = \frac{2}{5} m R^2.$$

7. Határozza meg az  $R$  sugarú,  $M$  magasságú,  $\rho$  sűrűségű egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékát a tömegközéppontján átmenő, alaplapjával párhuzamos tengelyre!

Helyezzük el a hengert úgy, hogy tömegközéppontja az origóba kerüljön, tengelye a  $z$  tengely legyen, s határozzuk meg az  $x$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

$$\Theta_x = \rho \iiint_V (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Célszerű hengerkoordinátákat alkalmazni. Ekkor:

$$V = \left\{ (r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{M}{2} \leq z \leq \frac{M}{2} \right\},$$

tehát

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} r(r^2 \sin^2 \varphi + z^2) \, dz \, d\varphi \, dr = \\ &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r \left( r^2 M \sin^2 \varphi + \frac{M^3}{12} \right) d\varphi \, dr = \\ &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r \left( r^2 M \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \frac{M^3}{12} \right) d\varphi \, dr = \\ &= \rho \int_0^R \left( r^3 M \pi + \pi \frac{M^3}{6} r \right) dr = \rho \left( \frac{R^4}{4} M \pi + \frac{M^3}{12} R^2 \pi \right). \end{aligned}$$

Mivel a henger tömege:

$$m = \rho \pi R^2 M,$$

így

$$\Theta_x = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{M^2}{12} \right).$$

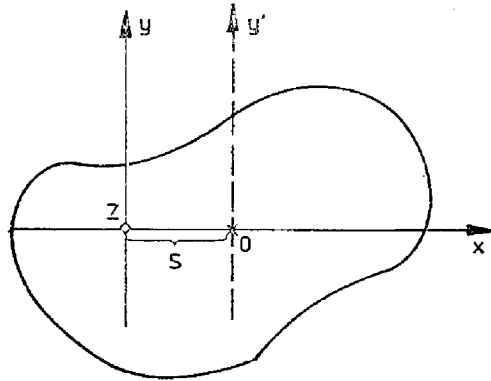
8. Igazolja, hogy egy test tetszőleges 0 ponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \Theta_s + ms^2,$$

ahol  $\Theta_s$ : az előző tengellyel párhuzamos, a tömegközépponton áthaladó tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték,

$m$ : a test tömege,

$s$ : a két tengely távolsága.



69. ábra

Rögzítsük a koordináta-rendszert úgy, hogy a tömegközéppont az origóba kerüljön, és a forgástengely a z tengely irányába mutasson!

Ekkor

$$\Theta_s = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV.$$

Hasonlóképpen (69. ábra) adódik a 0 ponton átmenő tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_V ((x-s)^2 + y^2) \rho dV = \\ &= \int_V (x^2 + y^2) \rho dV + s^2 \int_V \rho dV - 2s \int_V x \rho dV. \end{aligned}$$

Itt az első tag  $\Theta_s$ , a másodikban szereplő integrál a test tömegét adja, tehát a második tag  $ms^2$ ; a harmadik tagban szereplő integrál zérus, ugyanis

$$x_s = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV} = 0,$$

hiszen a tömegközéppont az origóban van.

Ezzel beláttuk, hogy:

$$\Theta = \Theta_s + ms^2.$$

A most igazolt állítás *Steiner tétele*.

9. Határozza meg a 7. feladatban szereplő körhenger tehetetlenségi nyomatékát, ha a forgástengely az alaplap egyik át-mérője!

A 7. feladatban láttuk, hogy a tömegközépponton áthaladó, az alap-lappal párhuzamos tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_s = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{M^2}{12} \right).$$

A 8. feladat (Steiner-tétel) alkalmazásával az ezzel párhuzamos, tőle  $\frac{M}{2}$  távolságban levő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \Theta_s + m \left( \frac{M}{2} \right)^2 = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{M^2}{3} \right).$$

Természetesen a feladat a Steiner-tétel alkalmazása nélkül is megoldható.

10. Határozza meg az  $a$  élű, egységnyi sűrűségű kockának a kocka középpontján áthaladó, a kocka élével párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! Igazolja, hogy bármely középponton áthaladó tengely esetén ugyanekkora a tehetetlenségi nyomaték!

Helyezzük el a kockát úgy, hogy középpontja az origóban legyen, élei a tengelyekkel párhuzamosan helyezkedjenek el, s határozzuk meg az  $x$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot!

Az integrálási tartomány:

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2} \right\}.$$

A tartomány szimmetriája következtében elegendő az első ténnyolcadra integrálni:

$$\begin{aligned} \Theta_x &= 8 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) dx dy dz = 4a \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) dy dz = \\ &= 4a \int_0^{\frac{a}{2}} \left( \frac{a^3}{24} + \frac{a}{2} z^2 \right) dz = 4a \left( \frac{a^4}{48} + \frac{a^4}{48} \right) = \frac{a^5}{6}. \end{aligned}$$

Mivel  $\varrho = 1$ , így  $m = a^3$ ,  
tehát:

$$\Theta_x = \frac{ma^2}{6}.$$

nyilvánvaló, hogy  $\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z$ , hiszen az integrálási tartományt a tengelyek cseréje nem változtatja meg. Ha az origón átmenő forgástengely irányát az

$\mathbf{e}(e_1; e_2; e_3)$  egységvektor adja meg, akkor a kocka egy  $\mathbf{r}$  helyvektorú pontjának tengelytől való távolsága (70. ábra):

$$l = |\mathbf{r}| \sin(\mathbf{e}, \mathbf{r}) \leq l,$$

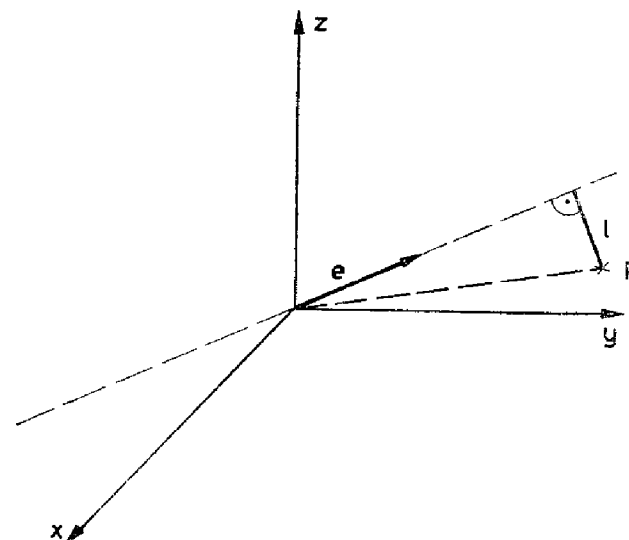
ami egyenértékű az

$$l^2 = |\mathbf{r} \times \mathbf{e}|^2$$

egyenlőséggel.

Tehát

$$\begin{aligned} l^2 &= (e_2 z - e_3 y)^2 + (e_1 z - e_3 x)^2 + (e_1 y - e_2 x)^2 = \\ &= e_1^2(z^2 + y^2) + e_2^2(z^2 + x^2) + e_3^2(x^2 + y^2) - \\ &\quad - 2e_2 e_3 zy - 2e_1 e_3 zx - 2e_1 e_2 xy. \end{aligned}$$



70. ábra

Tudjuk, hogy az  $\mathbf{e}$  irányú tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\Theta = \int_V l^2 dV.$$

$l^2$  előző alakját beírva, tagonként integrálva (figyelembe vesszük, hogy:

$$\int_V (z^2 + y^2) dV = \Theta_x, \quad \int_V zy dV = 0,$$

a tartomány szimmetriája miatt):

$$\Theta = \Theta_x e_1^2 + \Theta_y e_2^2 + \Theta_z e_3^2.$$

Mivel

$$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z,$$

és

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1,$$

így

$$\Theta = \Theta_x(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \Theta_x,$$

amivel az állítást igazoltuk.

*Megjegyzés:* A feladat speciális esete egy általános tételnek: Ha a 0 átmenő minden tengelyre felmérjük az

$$\overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{OP}}}$$

távolságot, akkor a  $P$  pontok egy ellipszoid felületén helyezkednek el. A kocka esetén ez gömb, mivel három egymásra merőleges tengely esetén  $\Theta$  egyenlő, így minden irányban azonos.

## VII. VONAL- ÉS FELÜLETI INTEGRÁL

### 1. Vonalintegrál

A vonalintegrál fogalmát szemléletesen, egy fizikai alkalmazáson keresztül vezetjük be.

Tekintsük az

$$\mathbf{E} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D \subset \mathbb{R}^3$$

elektromos teret s egy  $D$ -ben levő térgörbét (71. ábra). Mozgassunk e görbe  $A$  pontjából  $B$  pontjába egy pozitív egységnyi töltést! Határozzuk meg a végzett munka értékét! Mivel a térerősség általában pontról pontra változik, s az elmozdulás nem feltétlenül egyenes mentén történik, így a munka nem számítható az erő- és az elmozdulásvektor skalárszorzataként. Bontsuk fel az  $L=AB$  görbét kis darabokra! (E kis ívdaraboknak csak a végpontjaik közösek, egyesítsük a teljes ívet adja meg.) A  $k$ -adik részt a  $\Delta \mathbf{r}_k$  vektorral helyettesítjük, amely az ívelem kezdőpontjából végpontjába mutat. Mivel a mozgatott töltés  $Q=1$ , így  $\mathbf{F}=\mathbf{E}$ , tehát az e részen végzett munka, közelítőleg:

$$\Delta W_k \approx \mathbf{E}(\varrho_k) \Delta \mathbf{r}_k,$$

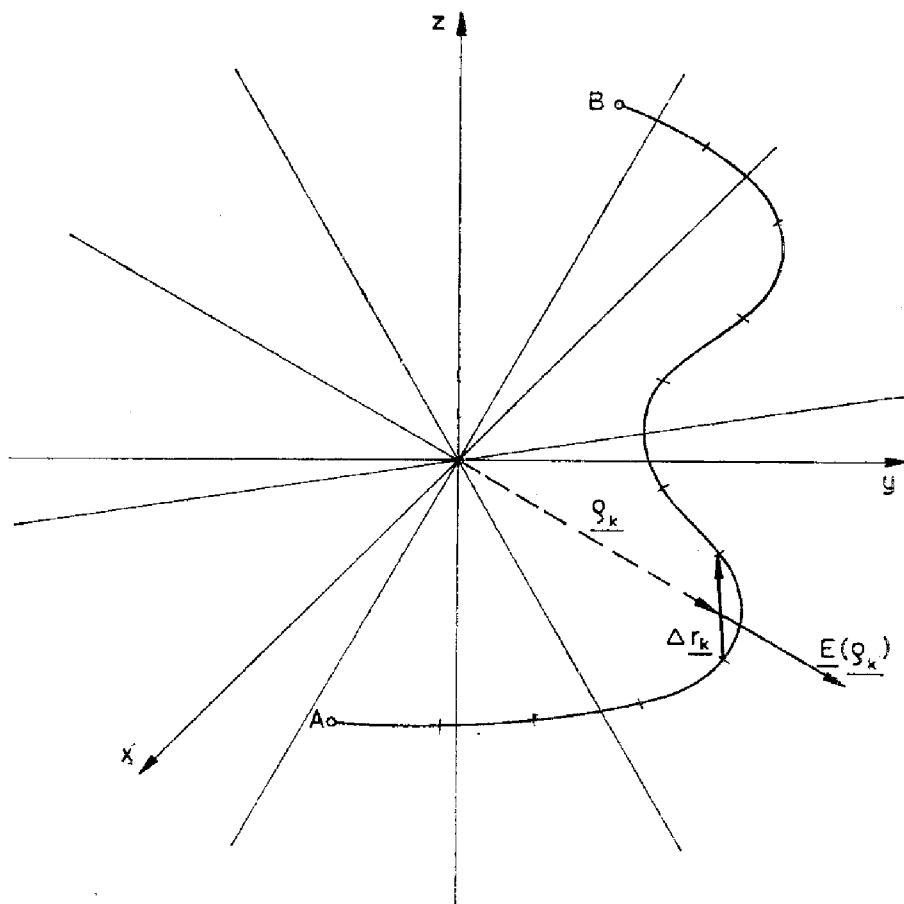
ahol  $\varrho_k$  jelöli  $\Delta \mathbf{r}_k$  valamely pontját.

Ha ezeket az elemi munkákat összegezzük, s vesszük az összeg határértékét, midőn a felosztás minden határon túl finomodik

(azaz, ha  $\max_k |\Delta \mathbf{r}_k|$  is zérushoz tart), akkor, ha az összegnek van véges, a felosztástól és a reprezentáns ponttól független határértéke, akkor ezt az értéket az  $\mathbf{E}$  vektortér  $L$  görbére vett *vonalintegráljának* nevezzük. Értéke az egységnyi töltés mozgásakor végzett munkát adja meg.

Jelölése:

$$\int_L \mathbf{E} d\mathbf{r}.$$



71. ábra

(Ha  $L$  zárt görbe, akkor:  $\oint E \, dr$ .)

A továbbiakban a vonalintegrál létezésének elégséges feltételéről szólunk.

Legyen adott a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D \subset \mathbb{R}^3$$

folytonos vektor-vektor függvény, valamint az

$$L = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [t_1; t_2] \quad \mathbf{r} \in D\}$$

irányított térgörbe.

Ha  $\mathbf{r}(t)$  létezik és folytonos a térgörbe minden pontjában, akkor a vektortér  $L$  görbén vett vonalintegrálja létezik, és

$$\int_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt.$$

A vonalintegrál értékét általában nem határozza meg egyértelműen a vektortér és az integrálási út kezdő-, ill. végpontja. Az az különböző görbéken haladva az  $A$  és  $B$  pontok között, a vonalintegrál értéke általában különböző lesz. Másképp fogalmazva: a vonalintegrál értéke zárt görbe esetén általában zérustól különböző.

Ha a vonalintegrál értéke független az úttól, akkor a vektortér *potenciálosnak* nevezzük. A potenciálfüggvény (egy skálár-vektor függvény) értékét a  $B \in D$  pontban a következőképp definiáljuk:

Legyen az  $A \in D$  pontban  $u(A) = 0$ , és

$L = \widehat{AB}$  a  $D$ -ben futó térgörbe.

Ekkor

$$u(B) = \int_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r}.$$

Legyen adott egy

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V \subset \mathbb{R}^3$$

( $V$  egyszeresen összefüggő tartomány) vektortér, és tegyük fel, hogy van olyan  $V$ -ben értelmezett

$$u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r})$$

függvény, amely  $V$ -ben differenciálható és tetszőleges  $\mathbf{r} \in V$ -re:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } u(\mathbf{r}).$$

Ekkor tetszőleges  $V$ -ben haladó differenciálható térgörbe

esetén

$$\int_L \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \text{grad } u(\mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \\ = u(\mathbf{r}(t_1)) - u(\mathbf{r}(t_2)).$$

(Egyszeresen összefüggőnek nevezzük a  $V$  térrészt, ha minden benne haladó zárt görbe lefedhető  $V$ -ben levő felületdarabbal. A tórusz például nem egyszeresen összefüggő tartomány, két koncentrikus gömb közötti térrész viszont ilyen.)

Annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a  $\mathbf{v}$  vektortér potenciális, a Stokes-tétel tárgyalásánál adjuk meg.

A vektortér valamely zárt görbére vett integrálját a vektortér *cirkulációjának* nevezzük.

Fekessünk a tér egy rögzített  $P_0$  pontjára  $L_k$  ( $k \in N$ )  $P_0$ -ra zsugorodó görbesorozattal határolt felületeket, amelyek felszíne  $\Delta f_k$ .

Ha bármely ilyen sorozat esetén létezik és mindig ugyanaz a

$$\lim \frac{1}{\Delta f_k} \oint \mathbf{v} d\mathbf{r}$$

határérték, akkor ezt a  $P_0$  pontbeli átlagos örvénysűrűségnek nevezzük. Belátható, hogy az átlagos örvénysűrűség

$$\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{v}(P_0),$$

ahol  $\mathbf{n}$  a felületsorozat normálegységvektorának határértéke. Megjegyezzük még, hogy az előzőekhez hasonlóan értelmezhető a vektorértékű vonalintegrál is, amelynek jelölése

$$\int_L \mathbf{v} \times d\mathbf{r}.$$

(Ekkor az előző vektortér, ill. térgörbe esetén a

$$\lim \sum \mathbf{v}(\rho_k) \times \Delta \mathbf{r}_k$$

határértéket vizsgáljuk. Ha ez létezik és értéke bármely finomodó felosztássorozat esetén ugyanaz, akkor ezt az értéket a  $\mathbf{v}$  vektortér  $L$  görbére vett *vektorértékű vonalintegráljának* nevezzük.)

## Gyakorló feladatok

① Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortérnek az  $A(1; 2; 5)$  és a  $B(4; 7; 9)$  pontokat összekötő egyenesszakaszra vett vonalintegrálját!

Az egyenesszakasz egyenlete (IV.1. szakasz 1. feladat)

$$\mathbf{r} = (1 + 3t)\mathbf{i} + (2 + 5t)\mathbf{j} + (5 + 4t)\mathbf{k}, \quad t \in [0; 1].$$

$\mathbf{r}$  megfelelő koordinátáit  $\mathbf{v}$ -be helyettesítve:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (2 + 5t)\mathbf{i} + (5 + 4t)\mathbf{j} + (1 + 3t)\mathbf{k}.$$

Mivel e szakaszra

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

így az integrandus  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))$  és  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  skalárszorzata:

$$3(2 + 5t) + 5(5 + 4t) + 4(1 + 3t).$$

Tehát:

$$\int_L \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_0^1 (47t + 35) dt = 58,5.$$

Természetesen, ha a feladatbeli egyenesszakasznak más paraméterezését választjuk, az integrál értéke nem változik. Az

$$\mathbf{r} : t \mapsto (1 + 3t^2)\mathbf{i} + (2 + 5t^2)\mathbf{j} + (5 + 4t^2)\mathbf{k} \quad t \in [0; 1]$$

függvény szintén az  $AB$  szakasz egy lehetséges megadási módja.

Ekkor

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (2 + 5t^2)\mathbf{i} + (5 + 4t^2)\mathbf{j} + (1 + 3t^2)\mathbf{k},$$

és

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 6t\mathbf{i} + 10t\mathbf{j} + 8t\mathbf{k},$$

tehát:



$$\int_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_0^1 (94t^3 + 70t) \, dt = 58,5,$$

ami valóban az előzővel megegyező.

2. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto x^2 y \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + zx \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

függvénynek az

$$L_1 = \{\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1\},$$

$$L_2 = \{\mathbf{r}_2 \mid \mathbf{r}_2 = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1\},$$

térgörbékre vett vonalintegrálját!

A két görbe kezdő- és végpontja azonos, hiszen

$$\mathbf{r}(0) = A(0; 0; 0),$$

és

$$\mathbf{r}(1) = B(1; 1; 1).$$

Az  $L_1$  görbe esetén:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{v}[\mathbf{r}_1(t)] \dot{\mathbf{r}}_1(t) \, dt = \\ &= \int_0^1 (t^4 \mathbf{i} + t^5 \mathbf{j} + t^4 \mathbf{k})(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}) \, dt = \\ &= \int_0^1 (t^4 + 2t^6 + 3t^6) \, dt = \frac{32}{35}. \end{aligned}$$

Hasonlóan az  $L_2$  görbére:

$$\int_{L_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^7 \mathbf{i} + t^8 \mathbf{j} + t^6 \mathbf{k})(2t\mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 4t^3 \mathbf{k}) \, dt =$$

$$= \int_0^1 (2t^8 + 3t^{10} + 4t^9) \, dt = \frac{886}{990},$$

ami az előzőtől különböző.

E feladat esetében tehát

$$\int_{L_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} \neq \int_{L_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

bár az  $L_1$  és  $L_2$  görbék kezdő- és végpontja azonos.

3. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto x^3 y \mathbf{i} + \frac{x}{2+y} \mathbf{j} + xz \mathbf{k}, \quad D_v = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq -2\}$$

függvény

$$L = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

görbére vett vonalintegrálját!

Az  $L$  görbe az  $x=1$  síkban fekvő egységsugarú kör, azaz zárt görbe.

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left( \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{2+\cos t} \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k} \right) (-\sin t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin t}{2+\cos t} + \cos t \sin t \right) \, dt = \left[ \ln(2+\cos t) + \frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* Az, hogy a vonalintegrál egy zárt görbe esetén zérus, nem jelenti azt, hogy a tér potenciálos, azaz minden zárt görbe esetén zérus. Esetünkben az

$$L_1 = \{\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_1 = \sin 2t \mathbf{i} + \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

zárt görbe esetén

$$\int_{L_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left( 2 \sin^3 2t \cos 2t - \frac{1}{2} \sin^2 2t \right) dt = \frac{\pi}{2}$$

adódik, ami zérustól különböző.

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{j}, \quad D_v = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$$

függvény

$$L = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

görbére vett vonalintegrálját!

A térgörbe a IV.1. szakasz 2. feladatában szereplő csavarvonal, amely illeszkedik az  $x^2+y^2=1$  felületre. A vektortér hengerszimmetrikus, trajektoriái a  $z$  tengelyre, azaz a térgörbe érintőjére is merőlegesek. Ebből következően  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))$  és  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  vektorok skalárszorzata minden pontban zérus, így:

$$\int_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = 0.$$

(Az Olvasó gyakorlásképpen ellenőrizze számítással, hogy az integrandus valóban zérus!)

5. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{j}, \quad D_v = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$$

vektortér

$$L = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = t \mathbf{i} + \sqrt{1-t^2} \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

negyedkörre vett vonalintegrálját!

Végezze el az integrálást a teljes körre is!

A kör pontjaiban

$$x^2+y^2=1,$$

így

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{1-t^2} \mathbf{i} - t \mathbf{j},$$

és

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \mathbf{j}.$$

Tehát:

$$\int_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_0^1 \left( \sqrt{1-t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt.$$

A második tagot átalakítjuk:

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2}.$$

Így:

$$\int_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

A teljes körre való integráláskor célszerű más paraméterezéssel dolgozni:

$$L_1 = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Az előzőhöz hasonlóan:

$$\int_{L_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi,$$

ami az előző eredmény négyszerese.

Megjegyzés: A vektortér az

$$\mathbf{u} : \mathbf{r} \mapsto \arctg \frac{x}{y}, \quad D_u = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}$$

függvény gradienseként állítható elő (a  $zx$  sík pontjainak kivételével). Így bármely  $y > 0$  feltételben levő zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke.

A feladatbeli kör átmetszi az  $y=0$  síkot, körülveszi a  $z$  tengelyt, amelynek pontjaiban a vektortér nincs értelmezve, így a zárt görbére nem kell zérussal egyenlőnek lennie a vonalintegrálnak.

6. Legyen

$$u: \mathbf{r} \mapsto x^3 y z^2, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

és

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \text{grad } u.$$

Határozza meg a vonalintegrál értékét az  $A(1; 1; 1)$  és  $B(2; 3; 5)$  pontokat összekötő tetszőleges, folytonosan differenciálható görbére!

Mivel a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } u(\mathbf{r}) = \frac{du}{d\mathbf{r}}$$

egyenlőség a tér minden pontjában teljesül, így a tér potenciális, s potenciálfüggvénye az  $u$  skalárvektor függvény.

Így:

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \frac{du}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} du = u(\mathbf{r}_B) - u(\mathbf{r}_A).$$

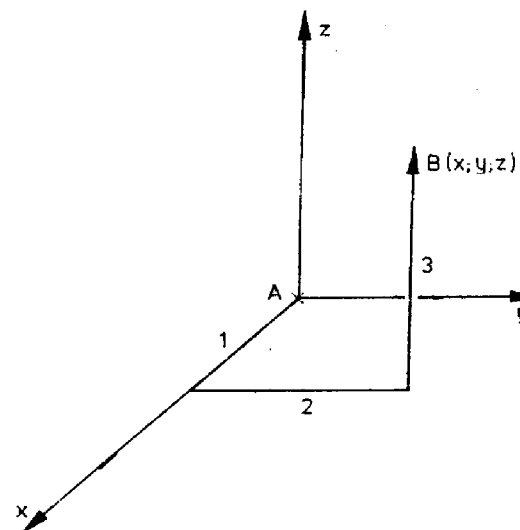
Mivel az  $u$  függvény értéke az  $A$  pontban 1, a  $B$  pontban 600, így:

$$\int_L \mathbf{v} d\mathbf{r} = 599.$$

7. Határozza meg a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto xy^2\mathbf{i} + (x^2y + z)\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

vektortér vonalintegrálját az  $A(0; 0; 0)$  és  $B(x; y; z)$  pontokat összekötő 72. ábrán látható töröttvonalra!



72. ábra

Az első szakaszon az  $x$  tengelyen haladunk az  $A$  pontból a  $P_1(x; 0; 0)$  pontba.

Ekkor

$$L_1 = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = t\mathbf{i}, \quad t \in [0; x]\},$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = 0,$$

tehát

$$\int_{L_1} \mathbf{v} d\mathbf{r} = 0.$$

A második szakaszon a  $P_1(x; 0; 0)$  pontból a  $P_2(x; y; 0)$  pontig megyünk, az  $y$  tengellyel párhuzamosan:

$$L_2 = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = x\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t \in [0; y]\},$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = xt^2\mathbf{i} + x^2t\mathbf{j},$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{j}.$$

E szakaszra tehát

$$\int_{L_2} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_0^y x^2 t dt = \left[ \frac{x^2 t^2}{2} \right]_0^y = \frac{x^2 y^2}{2}.$$

Végül a  $P_2$  pontból a  $B$  pontig a  $z$  tengellyel párhuzamosan:

$$L_3 = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \in [0; z]\}.$$

Ekkor

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = xy^2\mathbf{i} + (x^2y + t)\mathbf{j} + (y + t)\mathbf{k},$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{k},$$

tehát:

$$\int_{L_3} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_0^z (y + t) dt = \left[ yt + \frac{t^2}{2} \right]_0^z = yz + \frac{z^2}{2}.$$

Végeredményben:

$$\int_L \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_{L_1} \mathbf{v} d\mathbf{r} + \int_{L_2} \mathbf{v} d\mathbf{r} + \int_{L_3} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \frac{x^2y^2}{2} + yz + \frac{z^2}{2}.$$

*Megjegyzés:* Könnyen látható, hogy a vektortér

$$u: \mathbf{r} \mapsto \frac{x^2y^2}{2} + yz + \frac{z^2}{2}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

skalár-vektor függvény gradienseként állítható elő. Ha tehát tudjuk, hogy a vektortér valamely  $V \subset \mathbb{R}^3$  tartományban potenciális, a potenciálfüggvényt az e feladatban látott módszerhez hasonlóan kereshetjük meg.

Természetesen az  $A, B$  pontok a  $V$  tartományban vannak, s a törött-vonalat is úgy kell felvennünk, hogy az végig a  $V$  térrészben haladjon.

8. Az

$$\mathbf{E}: \mathbf{r} \mapsto \frac{k\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad D_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

térerősségű vektortérben az  $A(4; 0; 0)$  pontból a  $B(0; 10; 0)$  pontba mozgatunk egy pozitív egységnyi töltést az  $AB$  szakasz mentén. Határozza meg a végzett munka értékét!

Láttuk, hogy a pozitív egységnyi töltés mozgatásakor végzett munka:

$$W = \int_L \mathbf{E} d\mathbf{r}.$$

Mivel a vektortér az

$$u: \mathbf{r} \mapsto \frac{-k}{|\mathbf{r}|} \quad D_u = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

skalár-vektor függvény gradienseként állítható elő (IV.3. szakasz alapján), és a

$$V = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$$

tartomány egyszeresen összefüggő, így e tartományban haladó bármely görbe esetén a vonalintegrál értéke független az úttól, azaz  $V$ -ben a vektortér potenciális. Tehát:

$$W = \int_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = u(B) - u(A) = -\frac{k}{10} + \frac{k}{4} = \frac{3k}{20}.$$

*Megjegyzés:* A vonalintegrál úttól való függetlenségét a következőképpen is kihasználhatjuk.

Mozgassuk először a töltést az  $A$  pontból a  $C(0; 4; 0)$  pontba az  $x^2 + y^2 = 16$  körvonal mentén, majd  $C$ -ből vigyük  $B$ -be. Mivel a tér radiális, azaz erővonalai a kört merőlegesen metszik, így az  $AC$  íven a vonalintegrál értéke zérus. A  $CB$  szakaszon csak  $y$  értéke változik, így  $|\mathbf{r}| = y$ .

$$\int_{CB} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_4^{10} \frac{ky}{y^3} dy = \left[ \frac{-k}{y} \right]_4^{10} = \frac{3k}{20},$$

tehát

$$\int_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = \frac{3k}{20},$$

ami természetesen az előzővel megegyező.

A vektorértékű vonalintegrál alkalmazásai közül a Biot—Savart-törvényt említjük.

Az  $L$  görbe mentén folyó  $I$  intenzitású áram által az  $\mathbf{r}_0$  helyvektorú pontban létrehozott mágneses térerősség:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = -\frac{I}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \times d\mathbf{r}.$$

9. Határozza meg a Biot—Savart-törvény alapján az  $I$  árammal átjárt  $R$  sugarú körvezető középpontjában a mágneses térerősség értékét!

Helyezzük el a körvezetőt az  $xy$  síkban úgy, hogy a kör középpontja az origó legyen. ( $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ )

Mivel az  $\mathbf{r}$  a kört merőlegesen metszi, s a körön  $|\mathbf{r}| = R$ , így:

$$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}| |d\mathbf{r}| \sin 90^\circ = R dr.$$

Ebből következően:

$$|\mathbf{H}(\mathbf{o})| = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{R}{R^3} dr = \frac{I}{4\pi} \frac{1}{R^2} \oint_L dr.$$

Mivel

$$\oint_L dr = 2R\pi,$$

hiszen az integrál értéke a kör területével egyenlő, így

$$|\mathbf{H}(\mathbf{o})| = \frac{I}{2R}.$$

( $\mathbf{H}(\mathbf{o})$  a körvezető síkjára merőleges.)

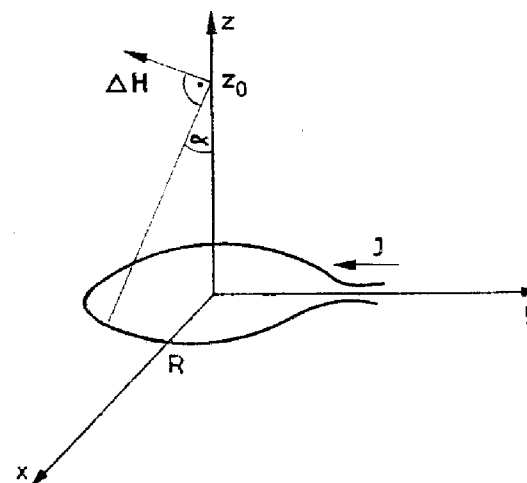
10. Határozza meg a mágneses térerősséget az előző körvezető tengelyén levő  $P$  pontban, amely a körvezető síkjától  $m$  távolságra van!

Helyezzük el a körvezetőt az előző feladatban látott módon (73. ábra). Az elrendezés szimmetriájából következik, hogy  $\mathbf{H}$  a  $z$  tengely pontjaiban a tengely irányába mutat. Az  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  vektor minden pontban merőleges a kör érintőjére, tehát:

$$|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| \cdot |d\mathbf{r}| = \sqrt{R^2 + m^2} dr.$$

Mivel — mint láttuk —  $\mathbf{H}$  a  $z$  tengely irányába mutat, így csak  $\Delta \mathbf{H}$  tengelyirányú komponenseit kell összegeznünk. Az ábra alapján a  $\Delta \mathbf{H}$  vektor  $z$  tengely irányú vetülete:

$$|\Delta \mathbf{H}| \sin \alpha,$$



73. ábra

ahol

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + m^2}}$$

(merőleges szárú szögek), tehát

$$|\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)| = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{\sqrt{R^2 + m^2}}{(\sqrt{R^2 + m^2})^3} \sin \alpha dr = \frac{IR}{4\pi(R^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} \oint_L dr.$$

Az előző feladatban láttuk, hogy

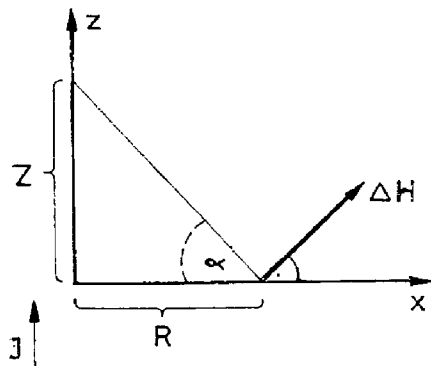
$$\oint_L dr = 2R\pi,$$

így:

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$m = 0$  esetén az előző feladat eredményét kapjuk.

11. Határozza meg az  $I$  árammal átjárt, végtelen hosszú egyenes vezető által létrehozott mágneses tér nagyságát, a vezetőtől  $R$  távolságban!



74. ábra

Helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy a vezető a  $z$  tengellyel essen egybe!

Határozzuk meg az  $A(R; 0; 0)$  pontban  $H$  abszolút értékét! Mivel az  $r_0 - r$  vektor az  $xz$  síkban van, így  $H$  az  $y$  tengely irányába mutat (74. ábra).

Mivel

$$|r_0 - r| = \sqrt{R^2 + z^2},$$

és

$$\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

így

$$|H| = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{|r_0 - r|}{|r_0 - r|^3} \sin \alpha \, dr = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{R^2 + z^2}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \, dz =$$

$$= \frac{I}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{2z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dz = \frac{I}{4\pi} \left[ -2(R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\infty} = \frac{I}{2R\pi}.$$

*Megjegyzés:* Az egyenes vezető által létrehozott mágneses tér erősségét egyszerűbben megkaphatjuk az ún. gerjesztési törvény alkalmazásával, amely szerint a mágneses térerősség zárt görbén vett vonalintegrálja egyenlő a zárt görbe által határolt felületen áthaladó áramok előjeles összegével. Legyen a zárt görbe az

$$x^2 + y^2 = R^2$$

kör. Mivel a  $H$  vektortér hengersizmetrikusan veszi körül a vezetőt, így e kör pontjaiban  $H$  érintőirányú, azaz

$$H \, dr = |H| \, dr.$$

A gerjesztési törvény szerint:

$$I = \oint_L H \, dr = \oint_L |H| \, dr = |H| \oint_L dr = |H| 2R\pi.$$

Ebből

$$|H| = \frac{I}{2R\pi},$$

ami az előzővel megegyezik.

## 2. Felületi integrál

A felületi integrál fogalmát is egy alkalmazásán keresztül mutatjuk be.

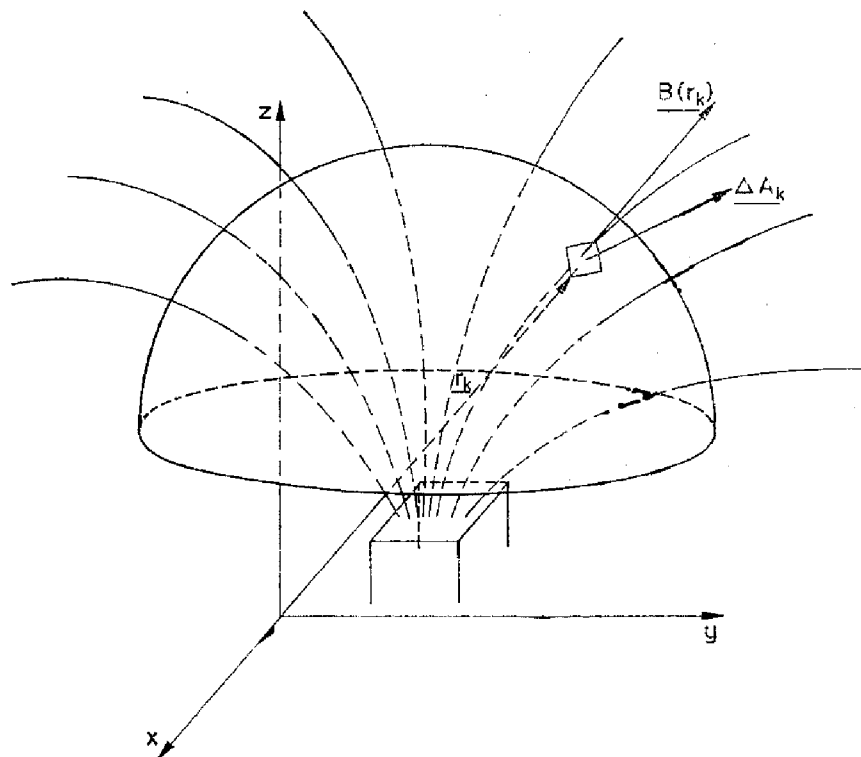
Tekintsük a

$$B: r \mapsto B(r) \quad r \in D \subset R^3$$

indukcióvektorral jellemzett mágneses teret és egy  $D$ -ben levő irányítható, mérhető felszíni felületet (jelölje ezt  $F$ ).

Határozzuk meg az  $e$  felületen áthaladó indukcióvonalak számát, a fluxust (75. ábra)!

Mivel általában  $B$  pontról pontra változik, s a felület nem sík, így a fluxus nem számolható a  $B$  és a felületre merőleges  $A$  vektor skalárszorzataként. Bontsuk fel a felületet mérhető felszíni részekre! (E részeknek csak a határvonaluk közös, egye-



75. ábra

sítésük az eredeti felületet adja!) A  $k$ -adik darabon válasszunk ki egy  $\mathbf{r}_k$  reprezentáns pontot, és jelölje  $\Delta \mathbf{A}_k$  azt a vektort, amelynek iránya a felületi normális irányával megegyező, abszolút értéke a felületdarab felszínével egyenlő, azaz:  $|\Delta \mathbf{A}_k| = \mu(F_k)$ . (A felületdarabok irányítása a felület irányításának megfelelő.) E kis felületen az elemi fluxus:

$$\Delta \Phi_k = \mathbf{B}(\mathbf{r}_k) \Delta \mathbf{A}_k.$$

Ha minden határon túl finomodó felosztássorozat ( $F_k$  átmérőinek maximuma is zérushoz tart) esetén létezik a felosztástól és a reprezentáns pont választásától független

$$\lim \sum_k \mathbf{B}(\mathbf{r}_k) \Delta \mathbf{A}_k$$

határérték, akkor ezt az értéket a  $\mathbf{B}$  vektortér  $F$  felületre vett *felületi integráljának* nevezzük.

Jelölése:

$$\int_F \mathbf{B} d\mathbf{A}.$$

Zárt felület esetén a jelölés:

$$\oint_F \mathbf{B} d\mathbf{A}.$$

Az integrál értéke tehát az  $F$  felületen áthaladó fluxust adja meg.

Ha a

$$\mathbf{B} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D \subset \mathbb{R}^3$$

folytonos, és az

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in T\}$$

$D$ -ben levő korlátos, irányítható, mérhető felszínű, folytonosan differenciálható felület, akkor:

$$\int_F \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_T \int \mathbf{B}(\mathbf{r}(u, v)) (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv.$$

Tekintsük az előző vektortér egy  $\mathbf{r}_0 \in D$  pontját, s vegyük azt körül  $D$ -ben haladó  $\mathbf{r}_0$ -ra zsugorodó olyan  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  zárt felületsorozattal, amelynek minden elemére létezik

$$\oint_{F_n} \mathbf{B} d\mathbf{A}.$$

Az  $F_n$  zárt felületre számított fluxus a felület által határolt térrészben (legyen ez  $V_n$ ) levő „forrás” mennyiségére jellemző. Ha bármely ilyen sorozat esetén létezik a felület alakjától függetlenül mindig ugyanaz a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(V_n)} \oint_{F_n} \mathbf{B} d\mathbf{A}$$

határérték, akkor ezt az  $r_0$  pontbeli *forrássűrűségnek* nevezzük. Igazolható, hogy értéke

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(r_0).$$

Megjegyezzük, hogy a (skalárértékű) felületi integrálhoz hasonlóan értelmezhető az

$$\int_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A}$$

vektorértékű felületi integrál is.

Ekkor az előző vektortér, ill. felület esetén a

$$\lim \sum \mathbf{B}(r_k) \times \Delta \mathbf{A}_k$$

határértéket vizsgáljuk. Ha ez létezik, és értéke bármely finomodó felosztássorozat esetén ugyanaz, akkor ezt az értéket a  $\mathbf{B}$  vektortér  $F$  felületre vett *vektorértékű felületi integráljának* nevezzük.

$$\int_F d\mathbf{A}$$

a felületelemek összegével, azaz a felület felszínével egyezik meg. Ha a felület irányítását megváltoztatjuk, a felületi integrál értéke előjelet vált. A feladatokban az irányítást úgy választottuk, hogy az integrál értéke pozitív legyen.

### Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a

$$\mathbf{W} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

függvény felületi integrálját az  $A(1; 1; 3)$ ,  $B(4; 2; 7)$  és  $C(5; 4; 9)$  csúcspontú háromszögre!

A háromszöglap egy lehetséges megadási módja (l. a IV.2. szakasz 1. feladatát):

$$F = \{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = (1+3u+4v)\mathbf{i} + (1+u+3v)\mathbf{j} + (3+4u+6v)\mathbf{k}, \\ (u, v) \in R^{+2} \mid 0 \leq u+v \leq 1 \}.$$

Határozzuk meg a paraméterek szerinti parciálisokat:

$$\mathbf{r}'_u = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Az integrandus a

$\mathbf{w}[\mathbf{r}(u, v)]$ ,  $\mathbf{r}'_u$ ,  $\mathbf{r}'_v$  vektorok vegyes szorzata; azaz

$$\begin{vmatrix} 1+3u+4v & 1+u+3v & 3+4u+6v \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 7.$$

(Mivel a determináns első sorában összeg szerepel, így ez három determináns összegére bontható. A másodikból  $u$ -t, a harmadikból  $v$ -t kiemelve ezeknek két sora megegyező, tehát értékük zérus, tehát csak az összeg első tagja marad meg.)

Az integrálási tartomány:

$$T = \{ (u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u \}.$$

Tehát:

$$\int_F \mathbf{W} d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{1-u} 7 dv du = \frac{7}{2}.$$

2. Határozza meg az előző feladatban szereplő vektortér integrálját egy origó középpontú,  $R$  sugarú gömbfelületre!

A gömbfelület egy lehetséges megadása (l. a. IV.2. szakasz 2. feladatát):

$$F = \{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = R \sin u \cos v \mathbf{i} + R \sin u \sin v \mathbf{j} + R \cos u \mathbf{k}, u \in [0; \pi], v \in [0; 2\pi] \}.$$

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u = R \cos u \cos v \mathbf{i} + R \cos u \sin v \mathbf{j} + (-R \sin u) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = -R \sin u \sin v \mathbf{i} + R \sin u \cos v \mathbf{j}.$$



Az integrandus:

$$\mathbf{w}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) = \\ = R^3 \sin^3 u \cos^2 v + R^3 \sin^3 u \sin^2 v + R^3 \cos^2 u \sin u = R^3 \sin u.$$

Tehát a vektortér gömbfelületre vett felületi integrálja:

$$\oint_F \mathbf{w} d\mathbf{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin u \, dv \, du = 4\pi R^3.$$

Jóval egyszerűbben kapjuk meg az eredményt, ha felhasználjuk, hogy a tér erővonalai (trajektóriái) sugárirányúak, azaz merőlegesen metszik a gömbfelületet, így lévén a felületen  $|\mathbf{w}| = R$ ,

$$\oint_F \mathbf{w} d\mathbf{A} = \oint_F |\mathbf{w}| d\mathbf{A} = \oint_F R d\mathbf{A} = R \oint_F d\mathbf{A}.$$

Mivel a felületelemek összege a gömb felszínét adja, így:

$$R \oint_F d\mathbf{A} = 4\pi R^3,$$

ami az előzővel megegyező.

**Megjegyzés:** Jelölje  $V$  a gömbfelület által határolt térrészt, s képezzük a

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(V)} \oint_F \mathbf{w} d\mathbf{A}$$

határértéket!

Mivel

$$\mu(V) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

az  $R$  sugarú gömb térfogata, így a fenti határérték 3-mal egyenlő.

Esetünkben tehát valóban teljesül a

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(V)} \oint_F \mathbf{w} d\mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{w}(0) = 3$$

összefüggés.

3. Határozza meg a

$$\mathbf{B} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{j} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér felületi integrálját az

$$x^2 + z^2 = 1$$

hengerfelület  $0 \leq y \leq 1$  részére!

A felület:

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \cos \varphi \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Tekintve, hogy

$$\mathbf{j} \times \mathbf{r} = z \mathbf{i} - x \mathbf{k},$$

így

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(\varphi, t)) = \sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{k}.$$

Tehát az integrandus:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t) = \begin{vmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

így

$$\int_F \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0.$$

**Megjegyzés:** Mivel a felület tetszőleges  $P(x, y, z)$  pontjában a felületi normális irányát az  $\mathbf{r}(x, 0, z)$  vektor adja, amely a  $\mathbf{B}$  vektorra merőleges, vagyis  $\mathbf{nB} = 0$ , így nyilvánvaló, hogy teljesül a

$$\int_F \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \text{ egyenlőség.}$$

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto zy \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér felületi integrálját az

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = (\operatorname{ch} t + 2u) \mathbf{i} + (\operatorname{sh} t + 4u) \mathbf{j} + 5uk, \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq 1\}$$

felületre!

A felület egy hiperbola alapú henger része (l. a IV. 2. szakasz 5. feladatát). Elvégezve a megfelelő koordináták helyettesítését:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t, u)) = 5u ((\operatorname{sh} t + 4u)\mathbf{i} + (\operatorname{ch} t + 2u)\mathbf{j} + 5u\mathbf{k}),$$

az integrandus pedig:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_t) &= 5u \begin{vmatrix} \operatorname{sh} t + 4u & \operatorname{ch} t + 2u & 5u \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 150u^2 (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) = 150u^2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Tehát a felületi integrál:

$$\int_F \mathbf{v} dA = \int_0^1 \int_0^1 150u^2 e^{-t} du dt = 50(1 - e^{-1}).$$

5. Határozza meg a

$$\mathbf{E}: \mathbf{r} \mapsto \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad D_E = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

függvény felületi integrálját a  $z=1$  síkra!

Célszerű kihasználni a  $z$  tengelyre való forgásszimmetriát. Adjuk meg a felületet a következő módon:

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = u \cos \varphi \mathbf{i} + u \sin \varphi \mathbf{j} + \mathbf{k}, u \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Ekkor az  $u=u_0$  vonalak  $z$  tengely középpontú körök. Mivel a felületen

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{u^2 + 1},$$

így:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(u, \varphi)) = \frac{1}{(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} (u \cos \varphi \mathbf{i} + u \sin \varphi \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Az integrandus tehát:

$$\mathbf{E} \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_\varphi = \frac{1}{(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} u \cos \varphi & u \sin \varphi & 1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -u \sin \varphi & u \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = u.$$

Így  $E$  felületi integrálja:

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{E} dA &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{u}{(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} d\varphi du = \pi \int_0^\infty 2u(u^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} du = \\ &= \pi \left[ -2(u^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^\infty = 2\pi. \end{aligned}$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a síkot

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

alakban adjuk meg, s a felületi integrál számításakor polárkoordinátákra térünk át.

6. Az elektrosztatika Gauss-tételét felhasználva határozza meg az origóban levő egységnyi ponttöltés terét!

Az elektrosztatika Gauss-tétele:

$$\oint_F \mathbf{D} dA = \sum_i Q_i,$$

azaz a  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  vektor zárt felületre vett integrálja egyenlő a felület által határolt térrészben levő töltések előjeles összegével.

Mivel a kialakuló tér gömbszimmetrikus, így egy origó középpontú  $R_0$  sugarú gömbre célszerű a felületi integrált meghatározni.

A gömbfelületen, mivel  $\mathbf{D}$  merőleges a felületre:

$$\mathbf{D} dA = |\mathbf{D}| dA,$$

ebből következően

$$\oint_F \mathbf{D} dA = \oint_F |\mathbf{D}| dA = |\mathbf{D}| \oint_F dA = |\mathbf{D}| 4\pi R_0^2 = Q = 1.$$

Az integrálás során felhasználtuk, hogy a gömbszimmetria miatt a felületen  $|\mathbf{D}|$  állandó, így az integráljel elé kiemelhető.

Tehát

$$|\mathbf{D}(\mathbf{r})| = \varepsilon |\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{1}{4\pi r^2},$$

azaz

$$\mathbf{E} : \mathbf{r} \mapsto \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad D_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}.$$

*Megjegyzés:* Ha a töltést egy  $a$  sugarú fémgömbre vittük fel, ennek tere  $|\mathbf{r}| \geq a$  esetén kapott eredményünkkel megegyező,  $|\mathbf{r}| < a$  esetén pedig  $|\mathbf{E}| = 0$ .

7. Határozza meg az  $R_1$  sugarú végtelen hosszú vezető henger által létrehozott tér erősségét, ha annak egységnyi magasságú részén  $Q$  töltés helyezkedik el!

Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\oint_F \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = Q.$$

Helyezzük el a hengert úgy, hogy tengelye a  $z$  tengely legyen, és legyen a zárt felület egy ugyancsak  $z$  tengelyű,  $R_0$  sugarú egységnyi magasságú körhenger. (A henger alap- és fedőkörét is figyelembe kell vennünk!)

A felületi integrál meghatározásához kihasználjuk, hogy a tér henger-szimmetrikus, azaz a henger alap- és fedőkörén nem lép ki erővonal, így ezek járuléka a felületi integrálhoz zérus.

A henger palástján  $\mathbf{D}$  állandó, így:

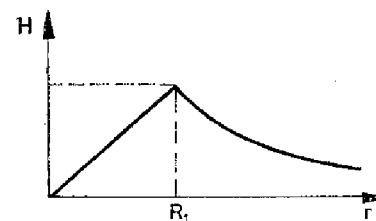
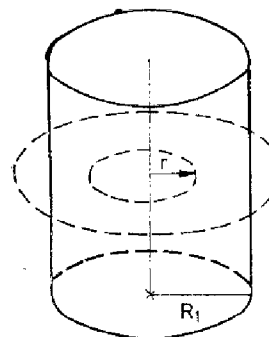
$$\int_F \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_F |\mathbf{D}| \, dA = |\mathbf{D}| \int_F dA = |\mathbf{D}| 2\pi R_0 = \begin{cases} 0, & \text{ha } R_0 < R_1, \\ Q, & \text{ha } R_0 \geq R_1. \end{cases}$$

Tehát:

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \begin{cases} 0, & \text{ha } |\mathbf{r}| < R_1 \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon|\mathbf{r}|}, & \text{ha } |\mathbf{r}| \geq R_1. \end{cases}$$

Ez esetben tehát a tengelytől távolodva a térerősség abszolút értéke csak  $\frac{1}{|\mathbf{r}|}$  első hatványa szerint csökken.

8. Egy  $R_1$  sugarú egyenes vezetőben  $j$  áramsűrűségű egyen-áram folyik. Határozza meg a mágneses térerősség értékét a vezetőben s azon kívül!



76. ábra

Írjuk fel a VII.1. 11. feladatában szereplő gerjesztési törvény általános alakját!

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \int_F \mathbf{j} \, d\mathbf{A}$$

(itt  $F$  a zárt  $L$  görbére fektetett felület).

Legyen az  $L$  görbe a vezető tengelyére merőleges síkban levő, a tengelyre szimmetrikusan elhelyezkedő körvonal,  $F$  az erre fektetett síklap (76. ábra).

Láttuk (VII.1. szakasz 11. feladata), hogy

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = |\mathbf{H}| 2\pi r,$$

ahol  $r$  a kör sugara.

A felületi integrál  $r \leq R_1$  esetén:

A vezetőben  $j$  a felületre merőleges,

$$|j| = \frac{I}{R_1^2 \pi} = \text{állandó},$$

így ekkor:

$$\int_F j dA = \int_F |j| dA = \frac{I}{R_1^2 \pi} \int dA = \frac{I r^2 \pi}{R_1^2 \pi} = \frac{I r^2}{R_1^2}.$$

A két eredmény egyenlőségéből:

$$|H| = \frac{I r}{2\pi R_1^2}, \quad \text{ha } r < R_1.$$

A vezető belsejében tehát a tengelytől távolodva  $|H|$  lineárisan növekszik, a vezetón kívül, mint azt VII.1.11. feladatában láttuk,  $\frac{1}{r}$ -rel arányosan csökken.

9. Határozza meg a

$$\mathbf{B}: \mathbf{r} \mapsto x\mathbf{i} \quad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér vektorértékű felületi integrálját a  $zx$  síkban fekvő

$$(x-1)^2 + z^2 \leq 1$$

körlapra!

$$\int_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A} \text{ értékét kell meghatároznunk.}$$

Mivel minden  $\mathbf{r} \in R^3$  pontban  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$   $\mathbf{i}$ -vel párhuzamos, az  $F$  (sík) felület pedig  $\mathbf{i}$ -re merőleges, így:

$$|\mathbf{B} \times d\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| dA = dA.$$

Ebből következően a felületi integrál abszolút értékének kiszámítása a

$$\iint_T x dx dz$$

értékének meghatározásával egyenértékű, ahol

$$T = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Az integrál értékének meghatározásához célszerű a következő transzformációt elvégezni:

$$\begin{aligned} x-1 &= t \cos \varphi, \\ z &= t \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ekkor

$$T = \{(t, \varphi) \mid 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

így

$$\iint_T x dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+t \cos \varphi) t d\varphi dt = 2\pi \int_0^1 t dt = \pi.$$

Így, mivel  $\mathbf{B} \times d\mathbf{A}$  iránya  $(-\mathbf{j})$ -vel egyezik meg, tehát:

$$\int_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A} = -\mathbf{j}\pi.$$

*Megjegyzés:* Ha a felületet határoló görbében egységnyi erősségű áram folyik, a  $\mathbf{B}$  indukciójú mágneses tér  $\int_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A}$  forgatónyomatékokat gyakorol rá.

10. Határozza meg a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér

$$F = \left\{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = u \cos \varphi \mathbf{i} + u \sin \varphi \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad u \in [0; 1], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

felületre vett vektorértékű felületi integrálját!

A felület a  $z=2$  síkban fekvő negyedkör, amelynek normálvektora párhuzamos  $\mathbf{k}$ -val, így az integrálás eredménye  $\mathbf{k}$ -ra merőleges vektor lesz.

Mivel a kifejtési tétel szerint:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

tehát az integrandus:

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\varphi) = (\nabla \mathbf{r}'_\varphi) \mathbf{r}'_u - (\nabla \mathbf{r}'_u) \mathbf{r}'_\varphi.$$

Elvégezve a helyettesítést, s meghatározva a parciálisokat kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u, \varphi)) = u^2 \sin \varphi \cos \varphi \mathbf{i} + 2u \cos \varphi \mathbf{j} + 2u \sin \varphi \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_u = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}'_\varphi = -u \sin \varphi \mathbf{i} + u \cos \varphi \mathbf{j}.$$

Ha ezeket az értékeket az integrandusba helyettesítjük — a részletszámítások mellőzésével — a következő adódik:

$$\int_F \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2u^2 \cos \varphi \mathbf{i} - u^3 \cos \varphi \sin \varphi \mathbf{j}) d\varphi du = \frac{2}{3} \mathbf{i} - \frac{1}{8} \mathbf{j},$$

amely vektor valóban merőleges a  $\mathbf{k}$  vektorra.

## VIII. INTEGRÁLTÉTELEK

### 1. Gauss—Osztogradszkij-tétel

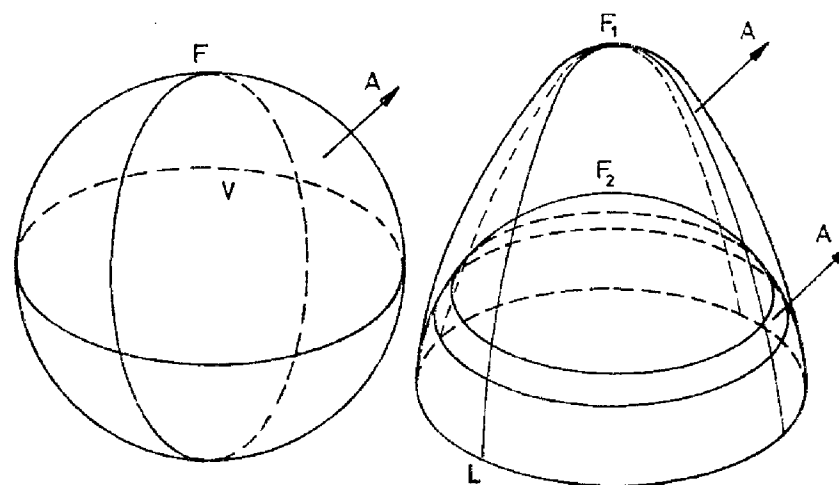
A VII.2. szakaszban említettük a vektortér  $\mathbf{r}_0$  pontbeli divergenciája és az  $\mathbf{r}_0$ -t körülvevő zárt felületre vett felületi integrálja közötti kapcsolatot.

Ennek alapján várható, hogy a vektortér divergenciájának térfogati integrálja és a vektortér felületi integrálja között valamilyen összefüggés áll fenn.

Ezt mondja ki a Gauss—Osztogradszkij-tétel (77. ábra).

Legyen  $F$  zárt, véges sok, egymáshoz élekben csatlakozó folytonosan differenciálható felületdarabból álló felület, kifelé irányított normálvektorral; az  $F$  által határolt  $V$  térrész mérhető térfogatú, s legyen a  $\mathbf{v}$  vektortér e térrészben és a felületen folytonosan differenciálható, ekkor:

$$\oint_F \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV.$$



77. ábra

A tétel fizikai tartalma — elektromos térben szemléltetve —: Legyen a vektortér  $\mathbf{E}$  térben a térerősség vektora.

A bal oldalon szereplő integrál az  $\mathbf{E}$  tér fluxusát (az  $F$  felületen áthaladó erővonal számot) adja meg.

A jobb oldal a forrássűrűség (az  $\mathbf{E}$  tér forrásai a töltések) térfogati integrálja. Nyilvánvaló, hogy ha a zárt  $F$  felületen több erővonal lép ki, mint be, akkor a felület belsejében pozitív forrásnak kell lennie; másrészt, ha a  $V$  térrész forrásmentes, akkor a belépő és kilépő erővonalak száma azonos kell hogy legyen, tehát a bal oldal zérus.

Hasonló értelmezés adható áramlási terek esetén ( $\mathbf{v}$  ekkor az áramló közeg sebességeloszlása).

Speciálisan, ha a  $\mathbf{v}$  vektortér forrásmentes egy  $V$  térrészben, azaz

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V,$$

és  $F$ , valamint az általa bezárt térrész  $V$  részhalmaza, ekkor, ha  $F$ -re teljesülnek a tétel kikötései:

$$\oint_F \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = 0,$$

tehát forrásmentes vektortér esetén a vektortér zárt felületre vett felületi integrálja zérus.

Ezt a tényt másképpen is megfogalmazhatjuk: az előző térrészben haladó sima, zárt görbére illesztett  $F_1$  (nyílt) felületre vett felületi integrál értéke nem függ a felület alakjától, azaz  $L$  görbére illeszkedő különböző, de azonos irányítású felületek esetén azonos érték adódik.

Ha van olyan kétszer folytonosan differenciálható  $\mathbf{W}$  vektortér, amelyre

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{W} \quad \mathbf{r} \in V,$$

akkor az előző zárt  $F$  felületre:

$$\oint_F \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = 0,$$

hiszen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{r} \in V.$$

(Igazolható az állítás megfordítása is, tehát  $\mathbf{v}$  akkor és csak akkor forrásmentes, ha  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ .)

A  $\mathbf{W}$  vektorteret a  $\mathbf{v}$  tér *vektorpotenciáljának* nevezzük. A vektorpotenciál meghatározásának módszereivel nem foglalkozunk.

### Gyakorló feladatok

1. Szemléltesse a Gauss-tételt a következő két esetben úgy, hogy a tételben szereplő mindkét integrált meghatározza!

a)  $\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto x\mathbf{i}, \quad \mathbf{r} \in R^3,$

a  $V$  térrész az egységkocka,  $F$  a kocka felszíne.

b)  $\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R^3,$

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

$F$  a gömb felszíne.

a) Mivel a  $\mathbf{v}$  minden pontban  $\mathbf{i}$ -vel egyirányú, így a felületi integrálban csak az  $\mathbf{i}$ -re merőleges lapok járuléka lehet zérustól különböző. Az  $x=0$  sík esetén azonban  $\mathbf{v}=0$ , így az erre vett felületi integrál értéke zérus; az  $x=1$  sík esetén  $|\mathbf{v}|=1$ , így

$$\int_{F_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \int_{F_1} |\mathbf{v}| \, dA = \int_{F_1} dA = 1.$$

Tehát  $\oint_F \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = 1.$

$F$ .

Mivel

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 1 \quad \mathbf{r} \in R^3,$$

és

$$\mu(V) = 1,$$

így

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 1,$$

tehát a két oldal értéke valóban egyenlő.

b) Mivel  $\mathbf{v}$  sugárirányú, azaz  $F$  minden pontjában merőleges a felületre, és a felületen  $|\mathbf{v}|=1$ , így

$$\oint_F \mathbf{v} d\mathbf{A} = \oint_F |\mathbf{v}| dA = \oint_F dA = 4\pi.$$

Másrészt:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 3, \quad \mathbf{r} \in V,$$

így

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_V 3 dV = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi,$$

tehát a két integrál értéke valóban egyenlő.

2. Írja fel az

$$a) \oint_F \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_V \rho dV$$

(elektrosztatika Gauss-tétele: VII.2.8.)

$$b) \oint_F \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$$

( $\mathbf{B}$  a mágneses indukció vektora).

Maxwell-egyenletek differenciális alakját! ( $F$  a  $V$  térrészt határoló zárt felület.)

a) Feltéve, hogy teljesülnek a Gauss-tétel feltételei, alakítsuk át a bal oldalt:

$$\oint_F \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV.$$

Az egyenlet ekkor

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV - \int_V \rho dV = 0$$

alakban írható; az integrál tulajdonságait felhasználva:

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) dV = 0.$$

A térfogati integrál értéke csak akkor lehet térrésztől függetlenül zérus, ha maga az integrandus is zérus, azaz:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

( $\rho$  a töltéssűrűség, tehát a divergencia valóban a forrassűrűséget jelenti)

b) Láttuk e rész bevezetőjében, hogy a zárt felületre vett felületi integrál zérus voltából nem következik az, hogy az integrandus is zérus.

A bal oldalt a Gauss-tétel alapján átalakítva:

$$\oint_F \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0.$$

Ebből már következik az, hogy az integrandus zérus, azaz:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

tehát a  $\mathbf{B}$  tér forrásmentes vektortér, azaz  $\mathbf{B}$  egy másik vektortér rotációjává egyenlő.

(Azt, hogy  $\mathbf{B}$  forrásmentes, úgy is mondhatjuk, hogy nincs mágneses monopólus.)

3. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto x^2 y \mathbf{i} - xy^2 \mathbf{j} \quad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortérnek az

$$F_1 = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad z \geq 0\}$$

félgömb felületére vett felületi integrálját!

Zárjuk le a felületet az

$$F_2 = \{ \mathbf{r} \mid x^2 + y^2 \leq 16, z = 0 \}$$

körlappal, s alkalmazzuk az így nyert zárt felületre a Gauss-tételt ( $F = F_1 \cup F_2$ )!

$$\oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV.$$

Mivel

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

így a jobb oldalon szereplő integrál zérus, a másik oldal pedig:

$$\oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{F_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int_{F_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

A körlapon  $\mathbf{v} = 0$ , mivel itt  $z = 0$ , tehát az  $F_2$  felületre vett felületi integrál zérus, így

$$\int_{F_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0.$$

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto x^4 y^3 z^2 \mathbf{i} + x z^4 \mathbf{j} + x^3 y^{10} \mathbf{k} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

vektortérnek az egységkocka felszínére vett felületi integrálját (kifelé irányított felületi normális mellett)!

Alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV.$$

A vektortér divergenciája:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 4x^3 y^3 z^2,$$

a  $V$  térrész

$$V = \{ (x, y, z) \mid (x, y, z) \in [0; 1]^3 \},$$

tehát

$$\begin{aligned} \oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 4x^3 y^3 z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 y^3 z^2 \, dy \, dz = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

5. Határozza meg az

$$\mathbf{E} : \mathbf{r} \mapsto \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad D_E = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \neq 0 \}$$

vektortér felületi integrálját az

- a)  $K(2; 3; 5)$  középpontú egységsugarú gömb felületére,
- b) az origó középpontú egységsugarú gömb felületére,
- c) a

$$V = \{ (x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \}$$

térrész határfelületére! (A felületi normális irányítsuk a térrészből kifelé.)

a) IV.4-ben láttuk, hogy a vektortér az origó kivételével forrásmentes, azaz  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , ha  $\mathbf{r} \neq 0$ .

Mivel az origó a gömbfelületen kívül helyezkedik el, így:

$$\oint_{F_a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_{V_a} \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = 0.$$

b) Mivel az origóban  $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$ , és itt a vektortérnek szingularitása van, így ez esetben az integrál értéke zérustól különböző.

A felület pontjaiban  $\mathbf{E}$  a felületre merőleges, és itt  $|\mathbf{E}| = 1$ , így

$$\oint_{F_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{F_b} |\mathbf{E}| \, dA = \oint_{F_b} dA = 4\pi.$$

c) Mivel a vektortér az origó kivételével forrásmentes, így a  $V$  térrészbe belépő, ill. onnan kilépő erővonalak száma azonos, így



$$\oint_{F_c} \mathbf{E} d\mathbf{A} = 0.$$

*Megjegyzés:* Tetszőleges origót tartalmazó, mérhető  $V$  térrészt lezáró felület esetén (ha erre teljesülnek a Gauss-tétel kikötései):

$$\oint_F \mathbf{E} d\mathbf{A} = 4\pi.$$

6. Határozza meg az előző feladatbeli vektortér

$$\mathbf{F}_1 = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in [-1; 1]^3\}$$

felületére vett felületi integrálját!

Az előző feladat szerint a vektortér

$$\mathbf{V} = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in [-1; 1]^3\}$$

térrésze határfelületére ( $F$ ) vonatkozó felületi integrálja:

$$\oint_F \mathbf{E} d\mathbf{A} = 4\pi.$$

A tér szimmetriájából következően a kocka lapjain az  $\mathbf{E}$  tér felületi integráljának értéke azonos, így:

$$\int_{F_1} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{6} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

7. Határozza meg az

$$\mathbf{E} : \mathbf{r} \mapsto x^2yz^2\mathbf{i} + xy^3z^4\mathbf{j} + z^3x\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

vektortér rotációjának integrálját az

$$F = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0\}$$

felületre! (A felületi normális a  $z$  tengely pozitív irányába mutatson.)

Mivel  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , így a vektortér zárt felületre vett felületi integrálja zérus; azaz bármely, az  $F$  felület határgörbéjére illeszkedő, azonos irányítású felület esetén, azonos érték adódik a felületi integrálra.

Legyen

$$F_1 = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$$

Az előzők szerint:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_{F_1} \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A}.$$

az  $\mathbf{E}$  vektortér rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz^2 & xy^3z^4 & z^3x \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(-4xy^3z^3) - \mathbf{j}(z^3 - 2x^2yz) + \mathbf{k}(y^3z^4 - x^2z^2). \end{aligned}$$

Mivel  $F_1$  pontjaiban  $z=0$ , így itt

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

tehát:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_{F_1} \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A} = 0.$$

8. Igazolja, hogy ha a  $V$  térrész és az azt határoló  $F$  zárt felület eleget tesz a Gauss-tételben említett kikötéseknek, és a  $\mathbf{B}$  vektortér folytonosan differenciálható, akkor:

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{B} dV = - \oint_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A}!$$

Mivel a  $\mathbf{B}$  vektortér folytonosan differenciálható, így tetszőleges, rögzített a vektor esetén a

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{B}$$

vektortér is folytonosan differenciálható, azaz  $\mathbf{v}$ -re teljesül a Gauss-tétel:

$$\oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV.$$

Mivel

$$\operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

— amit az Olvasó a  $\nabla$  operátor alkalmazásával könnyen igazolhat —, így

$$-\int_V \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{B} \, dV = \oint_F (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A}.$$

A jobb oldalon egy vegyszorzat áll, amelynél a vektoriális és skaláris szorzás sorrendje felcserélhető:

$$\oint_F (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_F \mathbf{a} \cdot (\mathbf{B} \times d\mathbf{A}).$$

Mivel az  $\mathbf{a}$  vektor állandó, így az integráljel elé kiemelhető:

$$-\mathbf{a} \int_V \operatorname{rot} \mathbf{B} \, dV = \mathbf{a} \oint_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A};$$

ez az összefüggés azonban tetszőleges  $\mathbf{a}$  vektor esetén csak úgy teljesülhet, ha az igazolandó állítás teljesül.

*Megjegyzés:* Ha a  $V$  térrészben a  $\mathbf{B}$  vektortér örvénymentes, akkor

$$\oint_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A}$$

értéke csak a felület határvonalától és a felület irányításától függ.

9. Határozza meg az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  paraméterek értékeit úgy, hogy a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto (xz + ay^c + bz^2)\mathbf{i} + (xy + az^c + bx^2)\mathbf{j} + (yz + ax^c + by^2)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

vektortér vektor értékű felületi integráljának értéke tetszőleges zárt felület esetén zérus legyen!

Az előző feladat szerint ez akkor teljesül, ha a  $\mathbf{v}$  vektortér rotációja egy egyszerűen összefüggő  $V$  térrészben zérus, azaz itt  $\mathbf{v}$  örvénymentes.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz + ay^c + bz^2 & xy + az^c + bx^2 & yz + ax^c + by^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(z + 2by - acz^{c-1}) - \mathbf{j}(acz^{c-1} - x - 2bz) + \mathbf{k}(y + 2bx - acy^{c-1}).$$

Ha  $b=0$ ,  $c=2$ ,  $a=\frac{1}{2}$ , akkor

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

s így az előző feladat szerint

$$\oint_F \mathbf{v} \times d\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

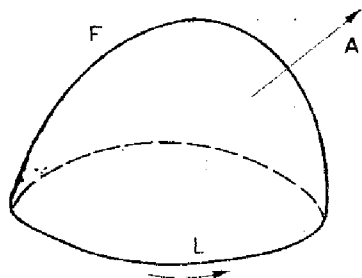
## 2. Stokes-tétel

A vonalintegrál definiálása során utaltunk a vektortér  $\mathbf{r}_0$  pontbeli rotációjának és a vektortér  $\mathbf{r}_0$ -t körülvevő zárt görbére vett vonalintegráljának kapcsolatára. Ennek alapján várható, hogy a rotáció felületi integrálja és (skalárértékű) vonalintegrálja között valamilyen összefüggés áll fenn.

Ezt mondja ki a *Stokes-tétel* (78. ábra).

Legyen  $F$  véges sok, egymáshoz élekben csatlakozó, folytonosan differenciálható felületdarabból álló irányítható felület,  $L$  a felületet határoló, szakaszonként „sima” (folytonosan deriválható) zárt görbe, amelyet úgy irányítunk, hogy körüljárása a felület normálisa irányából pozitív legyen. Ha a  $\mathbf{v}$  vektortér folytonosan differenciálható a felületen s annak határán, akkor:

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$



78. ábra

A tételből következik, hogy ha egy egyszeresen összefüggő  $V$  térrészben a vektortér örvénymentes (azaz  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$   $V$  minden pontjában), akkor minden  $V$ -ben haladó zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke, azaz a tér potenciálos, tehát a vonalintegrál értéke két adott pont között független az integrálási úttól.

Igazolható, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan

$$u: \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in V$$

skalártér, amelyre:

$$\mathbf{v} = \text{grad } u.$$

A potenciálfüggvény meghatározására a például VII.1.7.-ben látott módszer használható.

Megemlítjük még, hogy ha a  $\mathbf{v}$  vektortér divergenciája az egyszeresen összefüggő  $V$  tartományban zérus, akkor (VIII.1. szerint):

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{w},$$

azaz

$$\int_F \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_F \text{rot } \mathbf{w} d\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{w} d\mathbf{r},$$

vagyis  $\mathbf{v}$  felületi integrálja vektorpotenciáljának vonalintegráljával egyenlő.

## Gyakorló feladatok

1. Szemléltesse a Stokes-tételt a tételben szereplő mindkét integrál meghatározásával:

$$a) \quad \mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \mathbf{k} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{r} \in R^3,$$

a felület a  $z=0$  síkban fekvő, origó középpontú egységsugarú körlap, a görbe ennek határa;

$$b) \quad \mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \mathbf{r} \in R^3,$$

$F$  és  $L$  az előző!

a) Láttuk (IV.4. 3.), hogy

$$\text{rot } (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{k},$$

így a körlap pontjaiban  $\text{rot } \mathbf{v}$  a felületre merőleges, azaz:

$$\int_F \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_F |\text{rot } \mathbf{v}| dA = 2 \int_F dA = 2\pi,$$

mivel a felületelemek összege a körlap területével egyenlő. Mivel a felület normális  $\mathbf{k}$ -val egyező irányú, így az egységkört pozitív körüljárással kell befutnunk.

A másik integrál tehát, mivel a  $\mathbf{k} \times \mathbf{r}$  vektor  $\mathbf{k}$ -ra és  $\mathbf{r}$ -re is merőleges, így iránya a körvonal érintőjével azonos, így (a körvonalon  $|\mathbf{v}|=1$ )

$$\oint_L \mathbf{v} d\mathbf{r} = \oint_L |\mathbf{v}| dr = \oint_L dr = 2\pi,$$

hiszen ez az integrál a kör kerületével egyezik meg. A két integrál értéke tehát valóban egyenlő.

*Megjegyzés:* E vektortér esetén  $\text{rot } \mathbf{v}$  zérustól különböző, tehát a tér nem potenciálos, de bármely  $\mathbf{k}$ -ra merőleges síkban levő zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke.

b) E vektortér esetén

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

tehát ennek felületi integrálja is zérus. A határoló körvonal:

$$\mathbf{r} = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \quad t \in [0; 2\pi]\},$$

azaz:

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0, \end{aligned}$$

a két integrál értéke tehát valóban egyenlő. E vektortér potenciális, így bármely zárt görbe esetén a vonalintegrál értéke zérus.

2. Írja fel az

$$a) \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_F \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A},$$

(gerjesztési törvény általánosítása).

$$b) \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A}$$

(Faraday-féle indukciótörvény) Maxwell-egyenletek differenciális alakját!

a) Feltéve, hogy teljesülnek a Stokes-tétel feltételei, alakítsuk át a bal oldalt:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_F \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_F \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A},$$

rendezve:

$$\int_F \left( \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A} = 0.$$

Tetszőleges felületre integrálva, az integrál értéke csak úgy lehet zérussal egyenlő, ha maga az integrandus zérus, azaz

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

b) Az előzőhöz hasonlóan a bal oldalt alakítjuk át:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_F \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{A} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A},$$

amely tetszőleges felület esetén csak úgy teljesülhet, ha

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Megjegyzés:

a) A feladatban szereplő függvények

$$\mathbf{E} : (\mathbf{r}, t) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^+$$

jellegűek; az eddig szereplő vektor—vektor függvényeknél általánosabb függvények.

b) A második egyenlet eredményét a következőképp értelmezhetjük: az  $\mathbf{E}$  vektortér akkor rotációmentes, ha nincs kölcsönhatásban egy időben változó  $\mathbf{B}$  térrel. Tehát annak a feltétele, hogy zárt görbe esetén a munkavégzés zérustól különböző legyen az, hogy közben a tér valahonnan „energiautánpótlást” kapjon.

c) Homogén, izotrop közegben:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Tegyük fel továbbá, hogy  $\mathbf{j}$  és  $\rho$  zérus e térrészben. Tehát

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Vegyük a második egyenlet rotációját!

Feltéve, hogy a szereplő függvények kétszer folytonosan differenciálhatók — azaz a vegyes parciálisok egyenlők — a rotációképzés, és az idő szerinti deriválás sorrendje felcserélhető:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}.$$

A bal oldalt IV.4. szerint átalakítva:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

hiszen VIII.1.2. szerint  $\rho = 0$  esetén  $\text{div } \mathbf{E}$  is zérus.

A másik oldalon  $\text{rot } \mathbf{H}$  helyett  $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ -t helyettesítve (az első egyenlet alapján) kapjuk, hogy:

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Ez az összefüggés, a III.1. 18-ban látott hullámegyenlet vezetett arra az elméleti felismerésre, hogy létezniük kell elektromágneses hullámoknak. Ezután igazolták kísérletileg is létezésüket, majd sor került igen sokrétű alkalmazásukra is.

### 3. Potenciálos-e az

$$\mathbf{E} : \mathbf{r} \mapsto \frac{\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|^3}, \quad D_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\} \quad (\varepsilon > 0 \text{ állandó})$$

vektortér? Ha igen, határozza meg a potenciálfüggvényt!

IV.3. tárgyalása során láttuk, hogy

$$\text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\},$$

tehát az  $\mathbf{E}$  vektortér az

$$u : \mathbf{r} \mapsto \frac{-1}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|} + c \quad D_u = \{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

skalártér gradiense, így a vektortér potenciálos, s potenciálfüggvénye(i) az  $u$  skalár—vektor függvény(ek).

*Megjegyzés:* A gyakorlatban a potenciálfüggvény értelmezése az

$$\mathbf{E} = -\text{grad } u$$

összefüggés alapján történik, meghatározásához általában a „végtelen távoli” pontban választják zérusnak  $u$  értékét. Ennek alapján

$$u(R_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon R_0}.$$

VII.2-ben láttuk, hogy az  $\mathbf{E}$  tér az origóban levő egységnyi ponttöltés, vagy az  $R_0$  sugarú egységnyi töltésű fémgömb tere ( $|\mathbf{r}| \geq R_0$ ).

Egységnyi töltés hatására tehát a gömb  $u(R_0)$  feszültségre töltődik, így a gömb kapacitása:

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon R_0,$$

tehát a sugarával egyenesen arányos.

### 4. Potenciálos-e az

$$\mathbf{E} : \mathbf{r} \mapsto (4x^3y + z^2)\mathbf{j} + (x^4 + 3y^2z)\mathbf{j} + (1 + y^3 + 2zx)\mathbf{k} \quad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér? Határozza meg a potenciálfüggvényt!

Az  $\mathbf{E}$  vektortér akkor és csak akkor potenciálos, ha a tér örvénymentes, azaz

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in R^3.$$

Mivel

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4x^3y + z^2 & x^4 + 3y^2z & 1 + y^3 + 2zx \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

így a vektortér potenciálos, tehát van olyan  $u$  skalártér, amelynek gradienseként állítható elő  $\mathbf{E}$ .

Azaz  $u$ -ra teljesülnie kell a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3y + z^2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^4 + 3y^2z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^3 + 2zx + 1 \quad (3)$$

parciális differenciálegyenlet-rendszernek.

(1)-ből:

$$u = x^4y + z^2x + k(y, z),$$

ezt (2)-be helyettesítve:

$$u'_y = x^4 + k'_y = x^4 + 3y^2z,$$

ahonnan

$$k(y, z) = zy^3 + k_1(z).$$

Ezt (3)-ba helyettesítve:

$$u'_z = 2zx + y^3 + k'_1 = 1 + y^3 + 2zx,$$

tehát

$$k_1(z) = z + c,$$

azaz

$$u = x^4y + z^2x + zy^3 + z + c.$$

Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy  $E$  valóban  $e$  skalártér gradiense.

A potenciálfüggvényt a VII.1-ben látott módszerrel is meghatározhatjuk.

Haladjunk az origóból a 72. ábrán látható töröttvonal mentén a  $P(x, y, z)$  pontba, s határozzuk meg a vonalintegrál értékét!

Az első szakaszon az  $x$  tengely irányában mozgunk, azaz:

$$L_1 = \{r \mid r = ti \quad t \in [0; x]\}.$$

Mivel itt  $y = z = 0$ , így a görbén a vonalintegrál értéke zérus.

A második szakasz:

$$L_2 = \{r \mid r = xi + tj \quad t \in [0; y]\}.$$

E szakaszon  $z = 0$ , így

$$\int_{L_2} E dr = \int_0^y x^4 dt = x^4y.$$

A harmadik szakasz:

$$L_3 = \{r \mid r = xi + yj + tk \quad t \in [0; z]\},$$

ezen

$$\int_{L_3} E dr = \int_0^z (1 + y^3 + 2tx) dt = z + zy^3 + z^2x.$$

Ebből következően:

$$u = \int_L E dr = yx^4 + z^2x + zy^3 + z,$$

ami az előzővel megegyező.

*Megjegyzés:* A töröttvonal kezdőpontját, s magát a töröttvonalat úgy kell megválasztani, hogy tartalmazza a függvény értelmezési tartománya. Az előző feladatnál például a kezdőpont nem lehet az origó.

## 5. Potenciálos-e az

$$E: r \mapsto (3x^2y + 2x)i + (x^3 + 3y^2)j \quad r \in R^3$$

vektortér? Határozza meg a potenciálfüggvényt!

Ahhoz, hogy az  $E$  tér potenciálos legyen, teljesülnie kell a

$$\text{rot } E = 0$$

egyenlőségnek. Itt

$$\text{rot } E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y + 2x & x^3 + 3y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

tehát a tér potenciálos.

Az előző feladat szerint az  $u$  potenciálfüggvényre teljesülnie kell az

$$u'_x = 3x^2y + 2x,$$

$$u'_y = x^3 + 3y^2,$$

$$u'_z = 0$$

egyenleteknek.

Az elsőből:

$$u = x^3y + x^2 + k(y, z),$$

amit a másodikba helyettesítve:

$$u'_y = x^3 + k'_y = x^3 + 3y^2.$$

Mivel  $k$  nem függ  $z$ -től, hiszen a  $z$  szerinti derivált zérus, így

$$k(y, z) = y^3 + c,$$

tehát

$$u = x^3y + x^2 + y^3 + c.$$

*Megjegyzés:* E feladat megoldása egzakt differenciálegyenlet megoldásának keresésével egyenértékű.

6. Határozza meg az

$$\mathbf{E} : \mathbf{r} \mapsto (x+z)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

vektortér

$$L = \left\{ \mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$$

görbére vett vonalintegrálját!

Az  $L$  zárt görbe az

$$y = -z$$

sík és az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

gömb metszészvonala, egy egységsugarú kör.

A Stokes-tétel szerint:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A},$$

ahol  $F$  legyen az  $L$  görbe által határolt körlap. A vektortér rotációja:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Jelölje  $\alpha$  a  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  vektornak és a sík normálvektorának szögét. (Az  $\mathbf{n}(0; 1; 1)$  vektor irányából nézve az  $L$  görbe irányítása a Stokes-tételnek megfelelő);

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_F |\operatorname{rot} \mathbf{E}| \cos \alpha dA.$$

Mivel

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}}{|\mathbf{n}| |\operatorname{rot} \mathbf{E}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}},$$

így:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \sqrt{2}\pi.$$

*Megjegyzés:* Bármely  $y = -z$  síkban levő zárt görbe esetén:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = \sqrt{2} \cdot T,$$

ahol  $T$  jelöli a görbe által határolt síkrész területét.

7. Határozza meg az előző feladatbeli vektortér

$$L = \{ \mathbf{r} : \mathbf{r} = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \}$$

görbére vett vonalintegrálját!

Az előző feladathoz hasonlóan itt is a Stokes-tételt alkalmazzuk.

A görbe az

$$y - z = 0$$

síkban fekvő ellipszis. E sík egy normálvektora az  $\mathbf{n}(0; 1; -1)$  vektor

Mivel

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

így:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = 0.$$

*Megjegyzés:* Bármely  $\gamma = z$  síkban fekvő zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke.

A gyakorlati alkalmazások során az eddig említetteknek általánosabb potenciálkeresési feladatok megoldása is szükséges. E feladatokban a potenciálfüggvény magasabb rendű deriváltjai szerepelnek, s e függvénynek valamilyen peremfeltételeket is ki kell elégítenie.

Ilyen probléma adódik, ha a  $\mathbf{D}$  vektortér potenciális. Ekkor a VIII.1.2a)-ban látott egyenletből

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = \varrho,$$

ahol  $\varrho$  adott skálár-vektor függvény.

A  $\varrho = 0$  esetén adódó egyenlet a

$\Delta u = 0$  ún. Laplace-egyenlet;

$\Delta u = \varrho$  Poisson-egyenlet.

Ezek és a hasonló jellegű feladatok megoldásának segédeszközei a Green-tételkör tételei. Erre vonatkozik a következő feladat.

8. Igazolja, hogy ha a  $V$  térrész és az azt határoló zárt  $F$  felület eleget tesz a Gauss-tételben  $V$ -re és  $F$ -re kirótt követelményeknek, valamint a  $v$  és  $u$  skálár-vektor függvények kétszer folytonosan differenciálhatók e térrészben és a felületen, akkor:

$$\oint_F u \operatorname{grad} v \, d\mathbf{A} = \int_V (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + u \Delta v) \, dV!$$

Alkalmazzuk a Gauss-tételt az

$u \operatorname{grad} v$  vektor-vektor függvényre!

(Mivel  $v$  kétszer folytonosan differenciálható, így  $\operatorname{grad} v$  deriváltja folytonos tehát alkalmazható a tétel.)

E vektortér divergenciája a  $\nabla$  operátor alkalmazásával:

$$\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) = \nabla(u \nabla v) = \nabla u \nabla v + u \nabla^2 v = \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + u \Delta v.$$

Tehát a Gauss-tétel szerint:

$$\oint_F u \operatorname{grad} v \, d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) \, dV = \int_V (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + u \Delta v) \, dV,$$

ami a bizonyítandó állítás. Az igazolt összefüggés a Green-tétel aszimmetrikus alakja.

*Megjegyzés:* Alkalmazzuk a Gauss-tételt a  $v \operatorname{grad} u$  függvényre is.

Ekkor:

$$\oint_F v \operatorname{grad} u \, d\mathbf{A} = \int_V (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + v \Delta u) \, dV.$$

Ezt az előzőből kivonva kapjuk a Green-tétel másik alakját:

$$\oint_F (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \, d\mathbf{A} = \int_V (u \Delta v - v \Delta u) \, dV.$$

9. Szemléltesse a Green-tétel szimmetrikus alakját úgy, hogy a tételben szereplő mindkét integrált meghatározza:

$$u: \mathbf{r} \mapsto |\mathbf{r}| \quad \mathbf{r} \in R^3,$$

$$v: \mathbf{r} \mapsto \frac{1}{|\mathbf{r}|} \quad D_v = \{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq 0\},$$

$$V = \{\mathbf{r} \mid |\mathbf{r}| \leq R_0\}!$$

IV.3-ban láttuk, hogy

$$\operatorname{grad} |\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$



Ezt behelyettesítve a bal oldal:

$$\oint_F (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) dA = \oint_F \left( \frac{-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} \right) dA.$$

Felhasználva, hogy a felületi normális párhuzamos az  $\mathbf{r}$  vektorral, és a felületen  $|\mathbf{r}| = R_0$ :

$$-2 \oint_F \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} dA = -2 \oint_F \frac{1}{R_0} dA = -8R_0\pi.$$

A másik oldal:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r} \right) = \mathbf{r} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{|\mathbf{r}|} \operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{2}{|\mathbf{r}|},$$

tehát

$$v \Delta u = \frac{2}{|\mathbf{r}|^2}.$$

Ennek térfogati integrálja gömbi koordinátákra áttérve:

$$\int_V \frac{2}{|\mathbf{r}|^2} dV = \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2}{r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 8R_0\pi.$$

IV.4-ben láttuk, hogy

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = 0, \quad \text{ha } \mathbf{r} \neq \mathbf{0}.$$

Másrészt VIII.1.5-ben láttuk, hogy e függvény bármilyen origó középpontú gömbre vett integrálja  $4\pi$ , tehát nem szükségszerű, hogy az

$$\int_V u \Delta v dV = 0 \text{ egyenlőség teljesüljön.}$$

Bontsuk  $V$ -t két részre:

$$V_1 = \{\mathbf{r} : \varepsilon \leq |\mathbf{r}| \leq R_0\}, \\ V_2 = \{\mathbf{r} : 0 \leq |\mathbf{r}| \leq \varepsilon\};$$

$V_1$ -ben  $u \Delta v$  zérus, így integrálja is zérus.  $V_2$ -ben:

$$\int_{V_2} |\mathbf{r}| \cdot \Delta v dV \leq \varepsilon \int_{V_2} \Delta v dV = \varepsilon 4\pi,$$

amely érték tetszőlegesen kicsivé tehető. Így tehát

$$\int_V u \Delta v dV = 0,$$

tehát

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = -8R_0\pi,$$

amely a másik oldallal megegyező érték.

Megjegyzés  $\int_V u \Delta v dV$  meghatározásának módszeréből látható,

hogy tetszőleges  $V$ -ben folytonos  $u$  skalár-vektor függvény esetében az integrál értéke; ha  $v$  a feladatbeli skalártér:  $4\pi u(\mathbf{0})$ .

A Green-tétel alkalmazásait nem ismertetjük, csak annyit említünk, hogy potenciálkeresési feladatok esetén általában  $v$  az e feladatban szereplő függvény,  $u$  az ismeretlen potenciál, amely bizonyos peremfeltételeket kell teljesítsen. Ha a tér szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik, megfelelő transzformációval a feladatok lényegesen leegyszerűsíthetők.

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó  
Felelős kiadó: Fischer Herbert igazgató

Szedte az Alföldi Nyomda  
Nyomta az Alföldi Nyomda  
A nyomdai rendelés törzsszáma: 1380.66-12-2  
Készült Debrecenben, az 1985. évben

Műszaki vezető: Kőrösi Károly  
Műszaki szerkesztő: Metzker Sándor  
A borítót és a kötést tervezte: Sebes János  
A könyv ábráit rajzolta: Wator Béla  
A könyv formátuma: Fr5  
Ívterjedelme: 18,25 (A5)  
Ábrák száma: 78  
Példányszám: 6350  
Papír minősége: 80 g ofszet  
Betűcsalád és -méret: New Times, 10/10 és 8/10  
Azonossági szám: 61 218  
A kézirat lezárva: 1983. szeptember  
MŰ: 3666-i-8587