

Matrices y determinantes

William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

Probablemente el matemático irlandés más importante. En 1827, a la edad de 21 años, ingresó a la Royal Astronomer de Irlanda, donde participó hasta su muerte. Hamilton, cuando descubrió que la multiplicación de matrices no era conmutativa, se emocionó tanto que esculpió " $AB \neq BA$ " en una piedra de un puente en Dublin.

El término matriz fue empleado primero por Arthur Cayley (1821 - 1895) y James Sylvester (1814 - 1897). Estos dos buenos amigos, quienes tuvieron una entusiasta y provechosa sociedad matemática, fueron los primeros en estudiar sistemáticamente las matrices.



Si A y B son dos matrices

generalmente $AB \neq BA$

Aplicación de las matrices

La teoría de matrices ha sido una importante herramienta de las ciencias físicas desde 1920 y ha encontrado aplicación en muchas ramas de las matemáticas, la astronomía, la mecánica, la teoría de circuitos eléctricos, la física nuclear y la aerodinámica.

Sin embargo, su empleo como un instrumento en los negocios y en la economía data tan sólo de 1940, cuando George Dantzig, un matemático que trabajó para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, desarrolló la idea de la programación lineal (presentado en el siguiente capítulo). Los negocios pronto adoptaron las ideas de la programación lineal como un auxiliar en la producción de máximas utilidades o mínimos costos. Problemas actuales de economía encierran frecuentemente varias docenas de variables y se resuelven mejor en computadoras con la ayuda de matrices.

Matrices y determinantes

OBJETIVOS

- Reconocer los tipos de matrices.
- Operar con las matrices para aplicarlas en la resolución de sistemas lineales.
- Lograr ordenar los datos adecuadamente en la formulación de un problema.
- Manejar los determinantes como elemento de cálculo en la resolución de los sistemas lineales.

INTRODUCCIÓN

Las matrices y los determinantes son de gran utilidad en casi todas las ramas de la ciencia y la ingeniería, pues facilitan enormemente la solución de sistemas lineales.

Antes de ver algunas aplicaciones, veamos la reseña histórica.

Los determinantes hicieron su aparición en las matemáticas un siglo antes que las matrices. El término matriz fue creado en 1850 por James Joseph Sylvester y fue desarrollada por Hamilton (1853) y Cayley (1858). La mayoría de los historiadores coinciden en afirmar que la teoría de los determinantes se originó con el matemático alemán Goltfried W. Leibniz (1646 - 1716). Leibniz utilizó los determinantes en 1693 en la resolución de sistemas lineales. No obstante, algunos creen que el matemático japonés Seki Kawa hizo lo mismo diez años antes.

La contribución más prolífica a la teoría de los determinantes fue del matemático francés Agustín Louis Cauchy (1789 - 1857), quien en 1812 demostró por primera vez el teorema: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

El desarrollo de un determinante por adjuntas fue utilizada, por primera vez, por el matemático francés Pierre de Laplace (1749 - 1827).

Fue Carl Gustav Jacobi (1804 - 1851), matemático alemán, quien logró que la palabra “determinante” alcanzará la aceptación definitiva ya que los empleó en establecer la teoría de las funciones de varias variables. Sylvester llamó, más tarde, jacobiano a este determinante.

Veamos un ejemplo que nos permite ver la aplicación de las matrices.

Un productor de camisas, sacos y pantalones, en colores blanco, negro y azul, pide el balance de las ventas a uno de sus representantes. Éste le entrega la siguiente relación:

- 5 camisas de color blanco
- 7 camisas de color negro
- 6 camisas de color azul
- 4 sacos de color blanco
- 2 sacos de color negro
- 10 sacos de color azul
- 3 pantalones de color blanco
- 1 pantalón de color negro

Estos datos se pueden esquematizar así:

Color Artículo	Blanco	Negro	Azul
Camisas	5	7	6
Sacos	4	2	10
Pantalones	3	1	0

Pero, cuando se conozca la ubicación de las camisas, sacos y pantalones en filas y los colores blancos, negro y azul en las columnas, se podrá lograr mayor **simplificación y mejor organización** de los pedidos anotando solo las cantidades de los artículos por colores, así.

5	7	6
4	2	10
3	1	0

A este ordenamiento llamaremos matriz.

MATRIZ

DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz es un **ordenamiento rectangular de elementos** que podrán ser números, funciones, etc., dispuestos en filas y columnas. Aquí un ejemplo en sus distintas notaciones.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & \pi \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & \pi \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & \pi \end{pmatrix}$$

Esta matriz posee dos filas y tres columnas.

Es importante adquirir el hábito de enunciar siempre filas antes que las columnas (filas - columnas).

Veamos una matriz de 3 filas y 5 columnas.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & \sqrt{2} \\ 7 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

FILAS

COLUMNAS

NOTACIÓN GENERAL

Se simboliza cada elemento con subíndices de la forma a_{ij} , donde i representa la fila donde se encuentra y j la columna.

Así la matriz de “ m ” filas y “ n ” columnas cuyos elementos son a_{ij} es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Que abreviadamente se representa por:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

\uparrow número de columnas
 \uparrow número de filas

Donde: $\{m; n\} \subset \mathbb{N}$

Siendo: $i = 1; 2; 3; \dots; m$.

$j = 1; 2; 3; \dots; n$.

y podemos leer así:

A es la matriz de m filas y n columnas.

a_{ij} es un elemento de la matriz A .

ORDEN Y DIMENSIÓN DE UNA MATRIZ

El orden de la matriz es la multiplicación indicada del número de filas por el número de columnas de dicha matriz, así si la matriz tiene m filas y n columnas, diremos que la matriz es de orden $m \times n$.

Ejemplos:

1. La matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ tiene 2 filas y 3 columnas, entonces se dice que es de orden 2×3 (dos por tres).

2. La matriz $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ tiene 3 filas y 2 columnas, entonces se dice que es de orden 3×2 (tres por dos).

3. La matriz $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & -\pi & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ tiene 3 filas y 3 columnas, entonces será de orden 3×3 (tres por tres).

Como el número de filas es igual al número de columnas podemos decir que la matriz es de orden 3 (mencionamos sólo un factor de 3×3).

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices del mismo orden son iguales si todos sus elementos de la misma posición son respectivamente iguales.

Así: Sean las matrices

$$A = (a_{ij})_{m \times n} ; B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

Ejemplo 1

Las matrices: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ son iguales

Ejemplo 2

Las matrices:

$$\begin{pmatrix} x-1 & z+3 \\ y & 2w-1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ son iguales}$$

Halle el valor de $xyzw$

Resolución:

De la igualdad de matrices:

$$x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3, y = 4$$

$$z + 3 = 3 \Leftrightarrow z = 0$$

$$2w - 1 = 1 \Leftrightarrow w = 0$$

$$\therefore xyzw = 0$$

Ejemplo 3

Halle el valor de: $(2x - y) + (2z - w)$

Si las matrices:

$$\begin{pmatrix} 2x + y & 2z + w \\ x - 2y & z - 2w \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

son iguales

Resolución:

De la igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} 2x + y & 2z + w \\ x - 2y & z - 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}; y = \frac{6}{5}$$

Así mismo

$$\begin{cases} 2z + w = 5 \\ z - 2w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2; w = 1$$

Luego el valor de: $(2x - y) + (2z - w)$ es:

$$\left(2\left(\frac{7}{5}\right) - \frac{6}{5} \right) + (2(2) - 1) = \frac{8}{5} + 3 = \frac{23}{5}$$

MATRICES ESPECIALES

De acuerdo a la disposición de sus elementos o de la naturaleza de éstos.

Aquí veremos las matrices cuadradas, las rectangulares y sus tipos más usados.

1. MATRIZ CUADRADA

Esta matriz se caracteriza por tener igual cantidad de filas y columnas, diciéndose que es una matriz de orden $n \times n$ o simplemente es una matriz de orden n .

Así:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -1 & \pi & 3 \\ 0 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

son matrices de orden dos y tres respectivamente.

Si es de orden n tendremos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

En una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, la diagonal principal es el conjunto de elementos a_{ij} tal que $i = j$.

Así en:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

La diagonal principal es la terna: $(4 \ 5 \ 1)$.

En la matriz de orden n , la diagonal principal es: $(a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ \dots \ a_{nn})$.

Tipos de matrices cuadradas

Las matrices cuadradas pueden ser:

a. Matriz diagonal

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$, es decir, si todos sus elementos son nulos a excepción de por lo menos un elemento de la diagonal principal.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Matriz escalar

Es una matriz diagonal en donde sus elementos de la diagonal principal no son

nulos e iguales, así: la matriz $A=(a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz escalar si:

$$a_{ij} = \begin{cases} k; i=j \\ 0; i \neq j \end{cases} \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c. Matriz identidad

Es una matriz escalar cuyos elementos no nulos son iguales a 1. Así $A=(a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz identidad si:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; i=j \\ 0; i \neq j \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Matriz triangular superior

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n \times n}$ es triangular superior si $a_{ij}=0 \quad \forall i > j$, esto es, cuando los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son ceros.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e. Matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n \times n}$ es triangular inferior si $a_{ij}=0 \quad \forall i < j$, esto es, cuando los

elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal son ceros.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 0 \\ 3 & 2 & \pi \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f. Matriz simétrica

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n \times n}$ es simétrica si $a_{ij}=a_{ji}, \quad \forall i, j$, esto es, los elementos dispuestos simétricamente a la diagonal principal son iguales.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Vemos que las matrices diagonales, escalares; identidades son simétricas.

g. Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n \times n}$ es antisimétrica si $a_{ij}=-a_{ji} \quad \forall i, j$, esto es, los elementos dispuestos simétricamente, con respecto a la diagonal principal, son de signos opuestos.



Si: $a_{ij} = -a_{ji} \wedge \text{si } i=j$

$$\Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$$

Así que los elementos de su diagonal principal son nulos.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. MATRIZ RECTANGULAR

Son aquellas matrices donde el número de filas es distinta al número de columnas.

Esto es: la matriz $A=(a_{ij})_{m \times n}$ es rectangular si $m \neq n$.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}; (2 \ 3 \ 1 \ -1)_{1 \times 4}$$

Típos de Matrices Rectangulares

a. Matriz Fila o Vector Fila

Es una matriz formada por una sola fila, esto es, $A=(a_{ij})_{m \times n}$ es una matriz fila si $m=1$ ó bien $A=(a_{ij})_{1 \times n}$.

Ejemplos:

$$(4 \ 3); (3 \ 2 \ -1); (-\pi \ 0 \ 0 \ 2)$$

b. Matriz Columna

Es una matriz formada por una sola columna, esto es, $A=(a_{ij})_{m \times n}$ es una matriz columna si $n=1$ ó bien $A=(a_{ij})_{m \times 1}$.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. MATRIZ NULA

Es aquella matriz cuadrada o rectangular en donde todos sus elementos son nulos, es decir, una matriz $A=(a_{ij})_{m \times n}$ es nula si $a_{ij}=0 \ \forall i, j$.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Escribir un ejemplo de una matriz de orden 3×3 que sea:

- Triangular superior
- Escalar
- Simétrica
- Antisimétrica
- Fila de orden 1×5
- Columna de orden 4×1
- Identidad de orden 3

Resolución:

Las matrices pedidas son:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 4 & -2 & \sqrt{5} \\ -2 & 1 & -3 \\ \sqrt{5} & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -7 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) (-\sqrt{2} \ 5 \ 1 \ 4 \ -3)$$

$$f) \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 0 \\ -3+i \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Halle el menor valor de: $\left(\frac{x-y}{2z}\right)$ si las matrices

$$\begin{pmatrix} x^3-7x & z^2-z \\ x+y^2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ son iguales.}$$

Resolución:

$$x^3 - 7x = -6 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$$

que factorizando: $(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ó } x=-3 \text{ ó } x=2$$

$$\text{Además } x + y^2 = 5$$

Si $x=-3 \Leftrightarrow y^2=8 \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$ (puesto que se busca el menor)

$$\begin{aligned} \text{Así mismo: } z^2 - z = 12 &\Leftrightarrow z^2 - z - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -3 \text{ ó } z = 4 \end{aligned}$$

Luego el menor valor de $\frac{x-y}{2z}$ se obtiene cuando

$$x=-3; y=2\sqrt{2}; z=4$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{2z} = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2(4)}$$

$$\therefore \frac{x-y}{2z} = -\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Así como en cualquier conjunto numérico, en el conjunto de matrices también se definen ciertas operaciones, obviamente, bajo determinadas condiciones.

1. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MATRICES

Antes de dar la definición de adición o sustracción de matrices, veamos el siguiente ejemplo:

Una tienda de ropa de vestir tiene dos agentes vendedores:

- Uno de ellos solicita 6 camisas blancas, 7 camisas negras, 2 camisas rosadas, 5 pantalones negros, 15 pantalones blancos.
- El otro solicita 10 camisas blancas, 5 camisas negras y 7 camisas rosadas, 9 pantalones negros y 10 pantalones blancos.

¿Cuál es el requerimiento de ambos agentes?

Resolución:

Los pedidos de los agentes se pueden esquematizar mediante las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el pedido tal será:

(6+10) camisas blancas

(5+7) camisas negras

(2+7) camisas rosadas

(5+9) pantalones negros

(15+10) pantalones blancos

$$\text{así que: } A+B = \begin{pmatrix} 6+10 & 7+5 & 2+7 \\ 5+9 & 15+10 & 0+0 \end{pmatrix} \dots$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 9 \\ 14 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición de la Adición de Matrices

Sean las matrices

$$A=(a_{ij})_{m \times n} \wedge B=(b_{ij})_{m \times n}$$

La suma $A+B$ de las matrices A y B de orden $m \times n$ es una matriz $C=(c_{ij})_{m \times n}$ de orden $m \times n$, de tal modo, que cada elemento c_{ij} es igual a la suma $a_{ij}+b_{ij}$.

$$\text{Así: } A+B=(a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$$

Ejemplos:

$$1. \text{ Sean: } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -9 & 16 \end{pmatrix}$$

entonces $A+B$ es:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -9 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 4+7 \\ 3-9 & -1+16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B) = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$$

2. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -5 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego $A+B$ y $A-B$ son:

$$\text{I. } A+B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -5 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 9+2 \\ -5+9 & -1+5 \\ 4-1 & 9+3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 4 & 14 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{II. } A-B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -5 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8 & 9-2 \\ -5-9 & -1-5 \\ 4-(-1) & 9-3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A-B = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -14 & -6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. La operación binaria que hace corresponder a cada par de matrices A y B una tercera matriz C llamada suma de A y B , esto es:

$$+ : M_{m \times n} \times M_{m \times n} \longrightarrow M_{m \times n}$$

$$(A; B) \longrightarrow A+B = C$$

Demostrar que $(M_{m \times n}; +)$ tiene una estructura de grupo.

Resolución:

Para ver si tiene estructura de grupo veamos las siguientes propiedades.

- I. La adición es interna o cerrada en $M_{m \times n}$ es decir: $\forall A, B \in M_{m \times n} \Rightarrow (A+B) \in M_{m \times n}$ por definición de la adición de matrices.
- II. La adición en $M_{m \times n}$ es asociativa, es decir $\forall A; B; C \in M_{m \times n}: (A+B)+C = A+(B+C)$.

Veamos:

$$\text{Sean } A=(a_{ij})_{m \times n}; B=(b_{ij})_{m \times n}; C=(c_{ij})_{m \times n}$$

$$\Rightarrow (A+B)+C = ((a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n}) + (c_{ij})_{m \times n}$$

$$\Rightarrow (a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij}+c_{ij})_{m \times n}$$

$$= A+(B+C)$$

- III. Existe en $M_{m \times n}$ una única matriz identidad o neutro aditivo denotado por Θ ; llamada matriz nula cuyos todos sus elementos son ceros; esto es: $\forall A \in M_{m \times n} \exists \Theta$ tal que $A + \Theta = \Theta + A = A$

- IV. Para toda matriz $A \in M_{m \times n}$ tiene un simétrico aditivo dado por $-A$; esto es

$$\forall A \in M_{m \times n}: -A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

$$\Rightarrow A + (-A) = (a_{ij})_{m \times n} + ((-a_{ij}))_{m \times n} = \Theta_{m \times n}$$

Con estas propiedades queda garantizado que $(+; M_{m \times n})$ tiene estructura de grupo.

Además:

- V. La adición en $M_{m \times n}$ es conmutativa
- $$\forall A; B \in M_{m \times n} \Rightarrow A + B = B + A$$
- así: $A+B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n}$
- $$= (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m \times n}$$
- $$= (b_{ij})_{m \times n} + (a_{ij})_{m \times n} = B+A$$

Mediante esta quinta propiedad diremos que $(M_{m \times n}; +)$ es grupo abelino.

2. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

a. Multiplicación de un escalar por una matriz

Cuando un escalar multiplica a una matriz cada elemento de la matriz queda multiplicado por dicho escalar.

Así: Sea $A=(a_{ij})_{m \times n} \Leftrightarrow kA=(ka_{ij})_{m \times n}$

Donde: k es un escalar

Ejemplos:

1. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 5A = \begin{pmatrix} 5(4) & 5(3) \\ 5(2) & 5(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5A = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Sea:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2B = \begin{pmatrix} -2(1) & -2(3) & -2(-2) \\ -2(4) & -2(3) & -2(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 4 \\ -8 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

Sean las matrices:

$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n)_{1 \times n}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Definimos:

$$A \cdot B = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n)_{1 \times 1}$$

Es decir:

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Ejemplos:

$$1. \text{ Sean: } A = (1 \ 3 \ 5); \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = (1(7) + 3(-2) + 5(4)) = 21$$

$$2. \text{ Sean: } M = (3 \ 5 \ -3 \ 1); \quad N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M \cdot N = (3(3) + 5(0) - 3(0) + 1(2)) = 11$$

c. Multiplicación de dos matrices

Dados dos matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$; $B = (b_{jk})_{n \times p}$ existe una tercera matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ que representa el producto de multiplicar las matrices A y B; donde c_{ik} es el producto de multiplicar la fila i de la primera matriz por la columna "k" de la segunda matriz.



La multiplicación de la matriz A y la matriz B existe si y sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Es decir:

$$A \cdot B = (c_{ik})_{m \times p} \quad / \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Ejemplos:

1. Sean las matrices:

$$A = (1 \ 2 \ 3)_{1 \times 3}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2)_{1 \times 1} = 17$$

2. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

La matriz AB será una matriz C de orden 2×1

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (3 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 + 4 = 13$$

$$c_{21} = (4 \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 3}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

La matriz C producto de A y B será de orden 2×3 de la siguiente forma.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Hallando cada uno de los elementos:

$$c_{11} = (4 \ 3 \ 2) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = 45$$

$$c_{12} = (4 \ 3 \ 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 1 = 45$$

$$c_{13} = (4 \ 3 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 17$$

$$c_{21} = (5 \ 1 \ 9) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 9 \cdot 2 = 50$$

$$c_{22} = (5 \ 1 \ 9) \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 = 38$$

$$c_{23} = (5 \ 1 \ 9) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 26$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 45 & 45 & 17 \\ 50 & 38 & 26 \end{pmatrix}$$



La multiplicación de matrices no necesariamente es conmutativa.

PROPIEDADES

Sean A, B, C matrices para las cuales están definidas las operaciones de adición y multiplicación con m, n escalares, se tendrá:

- I. $m(A+B) = mA + mB$
- II. $(m+n)A = mA + nA$
- III. $m(nA) = mnA$
- IV. $A(BC) = (AB)C$
- V. $A(B+C) = AB + AC$
- VI. $AB=0$ no implica que $A=0$ ó $B=0$
- VII. $AB=AC$ no implica que $B=C$

Ejemplos:

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Veamos AB y BA

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 11 & 31 \\ 13 & 33 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 7 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow BA = \begin{pmatrix} 37 & 13 \\ 23 & 7 \end{pmatrix}$$

De donde observamos que: $AB \neq BA$.

2. Sean las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Veamos AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) & 3 \cdot 10 + 5 \cdot (-6) \\ 6 \cdot 5 + 10 \cdot (-3) & 6 \cdot 10 + 10 \cdot (-6) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que $AB=0$, pero no implica que A o B sean matrices nulas.

3. Sean las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Veamos AB y AC.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 8 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que $AB=AC$ sin embargo $B \neq C$.

DEFINICIONES

- I. Si $AB=BA$, se dice que las matrices A y B son matrices conmutables.
- II. Si $AB=-BA$, se dice que las matrices A y B son matrices anticonmutativas.



Si A es una matriz cuadrada de orden n y $B=aA+bI$ donde a y b son escalares entonces A y B son conmutables.

3. POTENCIACIÓN DE MATRICES

Sea A una matriz cuadrada de orden $k \in \mathbb{N}$ definimos:

$$A^n = \begin{cases} I ; n=0 & ; A \neq 0 \\ A ; n=1 \\ \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_{\text{"n" veces}} ; n \in \mathbb{N} ; n \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ entonces A^2 es:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$$



La potenciación de matrices es conmutativa. De donde se tendrá.

- Si A es una matriz cuadrada
 $\Rightarrow A^m \cdot A^n = A^n \cdot A^m ; m, n \in \mathbb{N}$
- Si A y B conmutan $\Rightarrow A^m$ y B^n conmutan siendo m, n naturales.
- Si A es una matriz cuadrada
 $(A^m)^n = A^{mn} = (A^n)^m ; m, n \in \mathbb{N}$

TRAZA DE UNA MATRIZ

Dada una matriz cuadrada, se llama traza a la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por traz así:

$$\text{Sea } A = (a_{ij})_{n \times n} \Rightarrow \text{Traz}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ejemplos:

1. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Traz}(A) = 4 + 7 = 11$$

2. Sea:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 9 & -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Traz}(M) = 5 + 7 - 2 = 10$$

Demostración

I. Sean: $A = (a_{ij})_{m \times n} ; B = (b_{ij})_{m \times n}$

$$\Rightarrow A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{aligned} \text{Traz}(A \pm B) &= \sum_{i=1}^n (a_{ii} \pm b_{ii}) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \pm \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{Traz}(A) \pm \text{Traz}(B) \end{aligned}$$

II. $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Traz}(\lambda A) &= \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} \\ &= \lambda \cdot \text{Traz}(A) \end{aligned}$$

III. $\text{Traz}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} / c_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \text{Traz}(BA) \end{aligned}$$

TEOREMA

Sean las matrices cuadradas A y B del mismo orden y λ un escalar.

- $\text{Traz}(A \pm B) = \text{Traz}(A) \pm \text{Traz}(B)$
- $\text{Traz}(\lambda \cdot A) = \lambda \text{Traz}(A)$
- $\text{Traz}(AB) = \text{Traz}(BA)$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Definición

Sea A una matriz $A(a_{ij})_{m \times n}$, se llama transpuesta a la matriz denotada por A^T definida por $A^T(a_{ji})_{n \times m}$. Es decir, dada una matriz A se determina su transpuesta denotada por A^T intercambiando todas las filas por columnas.

Ejemplos:

$$1. \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

- I. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
- II. $(A^T)^T = A$
- III. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; λ es un escalar
- IV. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

OTROS TIPOS DE MATRICES

1. Matriz simétrica

Una matriz cuadrada diremos que es simétrica si y sólo si es igual a su transpuesta ($A^T = A$).

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & -3 \\ 2 & -3 & \pi \end{pmatrix}$$

2. Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada será antisimétrica si y sólo si es igual al negativo de su transpuesta ($A^T = -A$).

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$\Rightarrow A$ es antisimétrica

TEOREMA

Toda matriz cuadrada se puede escribir como la adición de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Demostración

Observe las matrices $A + A^T$ y $A - A^T$

Vemos que:

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T \\ \Rightarrow A + A^T \text{ es simétrica}$$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) \\ \Rightarrow A - A^T \text{ es antisimétrica}$$

$$\text{y como: } A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{antisimétrica}}$$

podemos expresar la matriz A como una adición de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

3. Matriz involutiva

Una matriz cuadrada es involutiva si y sólo si su cuadrado es igual a la identidad ($A^2 = I$).

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos:

$$\begin{aligned} A^2 = A.A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+0 & 1-1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

$\Rightarrow A^2 = I \Leftrightarrow A$ es involutiva

4. Matriz nilpotente

Una matriz cuadrada A se dice nilpotente de índice k si $A^k = 0$; donde 0 es la matriz nula; además $A^{k-1} \neq 0$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Veamos:

$$\begin{aligned} \text{I. } A^2 = A.A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+2-6 & 1+2-3 & 3+6-9 \\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18 \\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } A^3 = A.A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0+3-3 & 0+3-3 & 0+9-9 \\ 0+6-6 & 0+6-6 & 0+18-18 \\ 0-3+3 & 0-3+3 & 0-9+9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ es una matriz nilpotente de índice de nilpotencia 3.

5. Matriz idempotente

Una matriz cuadrada A se llama idempotente si y sólo si $A^2 = A$.

Ejemplo:

$$\text{Veamos la matriz } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} A^2 = A.A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9-6 & 6-4 \\ -9+6 & -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

obteniéndose que $A^2 = A$

Luego diremos que A es una matriz idempotente.

6. Matriz hermitiana

Dada una matriz cuadrada de elementos complejos se llama hermitiana si dicha matriz es igual a la transpuesta de su matriz conjugada, es decir:

Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es hermitiana si $A = (\overline{a_{ij}})^T_{n \times n}$.

De donde se concluye que los elementos de la diagonal principal son necesariamente reales.

Ejemplo:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4+i \\ 4-i & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4-i \\ 4+i & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 5 & 4+i \\ 4-i & 1 \end{pmatrix}$$

Como: $(\overline{A})^T = A \Rightarrow A$ es una matriz hermitiana.

7. Matriz antihermitiana

Una matriz cuadrada de elementos complejos se llama antihermitiana si es igual al negativo de la transpuesta de su matriz conjugada.

Es decir:

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{n \times n} \wedge (\bar{A})^T = -\left((\bar{a}_{ij})\right)_{n \times n}^T$$

$\Rightarrow A$ es antihermitiana

De donde se concluye que los elementos de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 0 & 4+5i \\ -4+5i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4-5i \\ -4-5i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} 0 & -4-5i \\ 4-5i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\bar{A})^T = (-1) \begin{pmatrix} 0 & 4+5i \\ -4+5i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\bar{A})^T = -A$$

Luego se dirá que la matriz A es antihermitiana.

TEOREMA

Sea A una matriz cuadrada de elementos complejos.

I. $A + (\bar{A})^T$ es hermiteana.

II. $A - (\bar{A})^T$ es antihermiteana.

Demostración

I. Recordar que una matriz M es hermitiana si

$$(\bar{M})^T = M.$$

En el teorema:

$$(\overline{A + (\bar{A})^T})^T = (\bar{A} + A^T)^T = (\bar{A})^T + A = -\left(A + (\bar{A})^T\right)$$

Entonces $A + (\bar{A})^T$ es hermitiana.

II. Recordar que una matriz M es antihermitiana

si $(\bar{M})^T = -M$. En el teorema:

$$(\overline{A - (\bar{A})^T})^T = (\bar{A} - A^T)^T = (\bar{A})^T - A = -\left(A - (\bar{A})^T\right)$$

Entonces $A - (\bar{A})^T$ es antihermitiana.

TEOREMA

Toda matriz cuadrada de elementos complejos se puede escribir como la adición de una matriz hermitiana y otra antihermitiana.

Demostración:

Del teorema anterior:

$$A = \underbrace{\frac{A + (\bar{A})^T}{2}}_{\text{hermitiana}} + \underbrace{\frac{A - (\bar{A})^T}{2}}_{\text{antihermitiana}}$$

8. Matriz escalonada

Una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es una matriz escalonada si el número de ceros aumenta de fila a fila.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \pi & 2 & \sqrt{3} & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES ELEMENTALES (O.E.)

DEFINICIÓN

Se llama operaciones elementales o transformaciones elementales por filas o columnas sobre una matriz a las siguientes operaciones.

a. Intercambio de 2 filas o columnas

Notación:

Fila i (f_i) intercambiamos por la fila j (f_j) se representa por $f_i \times f_j$.

Columna i (c_i) intercambiamos por la columna j (c_j) se representa por $c_i \times c_j$.

Ejemplo: Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 \times c_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b. A la multiplicación de una fila o columna por un escalar no nulo

Notación:

Fila i (f_i) multiplicando por un escalar k , se representa por $f_i \rightarrow kf_i$

Columna j (c_j) multiplicado por un escalar k , se representa por $c_j \rightarrow kc_j$

Ejemplo:

Sea la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

las operaciones:

$$\xrightarrow{f_2 \rightarrow \pi f_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4\pi & 7\pi & 9\pi & 5\pi \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 \rightarrow \sqrt{2}c_3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 7 & 9\sqrt{2} & 5 \\ -1 & 0 & 2\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

c. A la fila i (f_i) sumar k veces la fila j

Notación: $f_i + kf_j / k$ es un escalar.

A la columna i (c_i) sumar k veces la columna j (c_j).

Notación: $c_i + kc_j / k$ es un escalar.

Ejemplo: Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & \pi \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \rightarrow 2f_2} \begin{pmatrix} 3-2(2) & 4+2(3) & 1+2(5) \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 10 & 11 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1-4 \\ -2 & 3 & 5-3 \\ 7 & 2 & \pi-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & \pi-2 \end{pmatrix}$$

MATRICES EQUIVALENTES

Se dice que una matriz A es equivalente, por fila o columna, a otra matriz B si esta última se ha obtenido de la primera por medio de una sucesión finita de operaciones elementales por filas o columnas.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es equivalente por filas a la matriz

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ porque a la fila 2 se le restó 4 veces la fila 1.

Así mismo, la matriz A es equivalente por columnas a la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$, porque a la columna 2 se le suma 2 veces la columna 1.

DETERMINANTES

DEFINICIÓN

El determinante es una función que, aplicada a una matriz cuadrada, la transforma en un escalar.

Notación:

Sea A una matriz cuadrada, el determinante de la matriz A se representa por $|A|$ o $\det(A)$.

Sea el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n ; entonces la definición queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} | \cdot | : M_{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \\ A &\rightarrow |A| \end{aligned}$$

1. MATRIZ DE ORDEN UNO

Se llama determinante de una matriz de primer orden, formada por el elemento a_{11} , al propio elemento a_{11} .

Ejemplos:

$$\text{Sea: } A = (3) \Rightarrow |A| = 3$$

$$B = (-5) \Rightarrow |B| = -5$$

2. MATRIZ DE ORDEN DOS

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se define su determinante:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Ejemplos:

$$1. \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$$

$$2. \text{ Sea } B = \begin{pmatrix} x & x^2 - 1 \\ y & x^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = x(x^2 + 1) - y(x^2 - 1) = x^3 + x - yx^2 + y$$

$$3. \text{ Sea } C = \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \phi \\ -\cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |C| = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

3. MATRIZ DE ORDEN TRES

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se define.

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11})$$

Ejemplo:

$$\text{Sea: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 3) - ((-2) \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 1)$$

$$|A| = (0 - 16 - 3) - (0 - 10 + 4) = -13$$

$$\therefore |A| = -13$$

CÁLCULO DE DETERMINANTES

a) Regla de Sarrus

Se aplica la matriz trasladando las dos primeras columnas a la parte final y se aplican multiplicaciones en dirección de las diagonales, conforme se indica.

Sea: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

+ + +

$$\Rightarrow |A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

Ejemplo:

Halle el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

+ + +

$$\begin{aligned} |A| &= (1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 1) - ((-2) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \cdot 2) \\ &= (0 - 16 - 3) - (0 + 4 - 10) = -19 + 6 = -13 \\ \Rightarrow |A| &= -13 \end{aligned}$$

b) Regla de la estrella

Se multiplican los elementos siguiendo el esquema.

$$\text{Sea: } |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{32}a_{13}a_{21}$$

$$\Rightarrow |A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

Ejemplo:

Halle el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 3) - ((-2) \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 1) \\ &= (0 - 16 - 3) - (0 - 10 + 4) = -19 + 6 = -13 \\ \Rightarrow |A| &= -13 \end{aligned}$$

PROPIEDADES GENERALES

1. Una matriz cuadrada y su transpuesta tienen el mismo determinante.
Es decir, $|A| = |A^T|$ siendo A cuadrada.
2. Sean las matrices cuadradas A y B y del mismo orden se tendrá $|AB| = |A| \cdot |B|$
3. Si una matriz cuadrada tiene los elementos de dos filas o dos columnas, respectivamente proporcionales; se dirá que su determinante es cero.

Ejemplo:

$$\text{Sea: } A = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = abk - bka = 0$$

En forma particular, si $k=1$ serán columnas o filas de elementos respectivamente iguales.

4. Si se intercambian dos filas o columnas consecutivas de una matriz cuadrada, su determinante sólo cambia de signo.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 15 - 8 = 7$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 8 - 15 = -7$$

5. Dos matrices cuadradas equivalentes por filas o columnas mediante la operación elemental III, es decir, cuando a una fila o columna se le suma una cierta cantidad de veces otra fila o columna tienen el mismo determinante.

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 15 - 8 = 7$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4+3k \\ 2 & 5+2k \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 3(5+2k) - 2(4+3k) = 7$$

\Rightarrow A y B tienen el mismo determinante

Ejemplo 2

Halle el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 4387 & 4388 \\ 4386 & 4387 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4387 & 4388 \\ 4386 & 4387 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1 - f_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4386 & 4387 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 4387 - 4386 = 1$$

$$\therefore |A| = 1$$

6. El determinante de una matriz diagonal triangular inferior o triangular superior es igual al producto de multiplicar los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\therefore |A| = 24$$

7. El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es igual a cero.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 7 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 7 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 140 - 140 - 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow |A| = 0$$

8. Sea A una matriz de orden n; se cumple $|kA| = k^n |A|$; k es un escalar.

Ejemplo 1

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 15 - 4 = 11$$

$$B = 3A \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 9 \cdot 15 - 12 \cdot 3 = 99$$

$$\Rightarrow |3A| = 3^2 \cdot |A|$$

Ejemplo 2

Halle el determinante de A en:

$$A = |A| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Tomando determinante:

$$|A| = |A|^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = |A|^2 \cdot (-11)$$

$$\Rightarrow |A| = 0 \quad \text{ó} \quad |A| = -\frac{1}{11}$$

MENORES Y COFACTORES

Considérese la matriz cuadrada de orden n .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

fila i

columna j

Denotaremos por M_{ij} a la matriz cuadrada de orden $(n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A luego:

- I Al determinante de la matriz M_{ij} ($|M_{ij}|$) se llamará menor del elemento a_{ij} de la matriz A .
- II Se define cofactor del elemento a_{ij} denotado por A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Ejemplo 1

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$

el menor de 3 es: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \sqrt{2} & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3\sqrt{2}$

el menor de 5 es: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$

el menor de 2 es: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26$

el menor de $\sqrt{2}$ es: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5$

Ejemplo 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -5 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ del elemento $a_{32} = -1$

Menor de a_{32} es: $|M_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$

cofactor de a_{32} es: $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-23) = 23$



- La diferencia entre el menor $|M_{ij}|$ y el cofactor A_{ij} de un elemento a_{ij} es solamente el signo.

Así: $\underbrace{A_{ij}}_{\text{cofactor}} = (-1)^{i+j} \underbrace{|M_{ij}|}_{\text{menor}}$

de donde:

$$A_{ij} = \begin{cases} |M_{ij}| & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -|M_{ij}| & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

- El signo que relaciona a A_{ij} y $|M_{ij}|$ del elemento a_{ij} de la matriz A se puede hallar en forma práctica mediante el siguiente arreglo:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Así el signo de a_{35} es positivo puesto que $(3+5)$ es par.

El signo del elemento a_{25} es negativo ya que $(2+5)$ es impar.

CÁLCULO DE DETERMINANTES POR COFACTORES

TEOREMA DE LAPLACE

El determinante de una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es igual a la suma de los productos obtenidos de multiplicar los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

Ejemplo:

Calcular el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

I. Elegimos la fila 2, entonces :

$$|A| = -(-2) \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 2(10+21) + 0 - 4(-9-5)$$

$$= 2(31) - 4(-14) = 62 + 56 = 118$$

$$\therefore |A| = 118$$



Lo mas recomendable es escoger la fila o columna que tenga la mayor cantidad de ceros.

Ejemplo:

Halle el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Nos conviene elegir la columna 3 por la cantidad de ceros que presenta.

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 9(9-28) = -171$$

$$\therefore |A| = -171$$



Se reduce mediante la tercera operación elemental (sumar a una cierta fila (o columna) una cierta cantidad de veces otra fila (o columna)). Buscando la mayor cantidad de ceros en una fila (o columna) para luego desarrollar por cofactores.

Ejemplo 1

$$\text{Halle el determinante de: } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_1 + C_2 \\ C_2 + C_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 22 & 24 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 22 & 24 \end{vmatrix} = 4 \cdot 24 - 22 \cdot 3 = 30$$

$$\therefore |A| = 30$$

Ejemplo 2

$$\text{Halle el determinante de: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$



A este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Se le conoce como determinante de Vandermonde que mas generalizado es:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

Para una matriz de orden n



\prod productoria



El teorema de Laplace se utiliza para hallar el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden.

Ejemplo 1

Halle el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2-f_1 \\ f_3-3f_1 \\ f_4-4f_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -7 & -5 & -11 \\ 0 & -11 & -8 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -7 & -5 & -11 \\ -11 & -8 & -10 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2-3f_1 \\ f_3-5f_1}} \begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & 12 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{f_1-2f_2 \\ f_2-f_3}} \begin{vmatrix} 0 & -28 & -13 \\ 0 & -5 & -7 \\ -1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -28 & -13 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -(28 \cdot 7 - 5(13))$$

$$\therefore |A| = -131$$

Ejemplo 2

Halle el determinante de:

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{vmatrix}$$

de la primera fila factorizo a y de la tercera b.

$$|M| = ab \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ 1 & 0 & \frac{d}{b} & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_1} ab \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & \frac{d}{b} - \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= ab \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & \frac{d}{b} - \frac{c}{a} & 0 \\ b & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & ad-bc & 0 \\ b & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc) \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = (ad-bc)(ad-bc)$$

$$\therefore |M| = (ad-bc)^2$$

Ejemplo 3

Calcular el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1+f_5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$5 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1-f_4} 5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2-f_1 \\ f_3-f_1}} -10 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -10(-1) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ = 10(0-12) \\ = -120 \\ \therefore |A| = -120$$

MATRIZ SINGULAR

Una matriz es singular si su determinante es cero; si su determinante es diferente de cero se llama matriz no singular.

Ejemplo:

$$I. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 24 - 24 = 0$$

 $\therefore A$ es singular

$$II. \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 20 - 3 = 17$$

 $\therefore B$ es no singular

MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz cuadrada; si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden tal que $AB=BA=I$, definiremos a B como la matriz inversa de A y la denotaremos por A^{-1} , es decir, $B=A^{-1}$.

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde $AB=BA=I$ $\Rightarrow A$ es el inverso de B ó ($A=B^{-1}$) B es el inverso de A ó ($B=A^{-1}$)**Ejemplo 2**

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Veamos:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-3 & -15+5 \\ 2-2 & -3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-3 & 6-6 \\ -5+5 & -3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

De donde $AB=BA \neq I$ $\Rightarrow A$ no es inverso de B , ni B es inverso de A **TEOREMA**

Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si es una matriz no singular, en tal caso se dice que la matriz es invertible.

Ejemplo 1

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ observamos que $|A| \neq 0$ lo cual nos indica que la matriz es invertible.

Ejemplo 2

La matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ se observa que $|B| = 0$
 \Rightarrow La matriz B no es invertible.

OBTENCIÓN DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ**1. MATRIZ DE COFACTORES**

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} , entonces la matriz B

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A esta matriz se le llama matriz de cofactores.

2. ADJUNTA DE UNA MATRIZ

A la transpuesta de la matriz de cofactores se le llama adjunta de la matriz A.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Adj} A = B^T}$$

Ejemplo 1

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_{11}=1; A_{12}=-4; A_{21}=-5; A_{22}=3$$

$$\text{matriz cof } A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-18) = 18$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(6) = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{matriz cofac } A = \begin{pmatrix} -26 & 4 & 14 \\ 18 & 0 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -26 & 18 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 14 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

Sea A una matriz invertible, entonces la matriz inversa está dada por:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}}$$

Ejemplo 1

Halle la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución:

Del ejemplo anterior 1

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \wedge |A| = -17$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{3}{17} \end{pmatrix}$$



Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad \neq bc$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Halle la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Del ejemplo anterior 2

$$\text{Adj } (A) = \begin{pmatrix} -26 & 18 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 14 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -26 & 18 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 14 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

Sean A y B matrices cuadradas no singulares:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$; λ es escalar
4. $|\text{Adj } A| = |A|^{n-1}$; donde n es el orden de la matriz A

3. MÉTODO DE GAUSS JORDAN

Consiste en obtener la matriz inversa de una matriz cuadrada no singular mediante operaciones elementales por filas (O.E.F.) siguiendo el siguiente esquema:

$$(A | I) \xrightarrow{\text{O.E.F.}} (I | B) \Rightarrow A^{-1} = B$$

Ejemplo 1

Halle la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(f_2) \cdot (-13)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 - 5f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Halle la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Resolución

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{f_2-f_1 \\ f_3-f_1}]{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[\substack{f_1-f_3 \\ f_2-f_3}]{f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ÁLGEBRA DE MATRICES CUADRADAS

Sea A una matriz cuadrada de orden n y $f(x)$ un polinomio o una función definida.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$\Rightarrow f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n / n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x^2 + 3x - 4$

Hallar la matriz $f(A)$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$f(A) = A^2 + 3A - 4I$$

como: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+3-4 & 4+3-0 \\ 8+6-0 & 11+9-4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1$. Halle la traza de $f(A)$ tal que:

$$A = |A| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Como $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1$

$$\Rightarrow f(A) = A + A^{-1} + I \dots \dots \dots (a)$$

de $A = |A| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

tomando determinante

$$|A| = |A|^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = |A|^2 (3)$$

$$|A| = 0 \vee |A| = \frac{1}{3}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Traz}(f(A)) = 6$$

Ejemplo 3

Se define la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

tal que: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Además la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular la traz de la matriz $f(A)$

Resolución:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$e^x + e^{-x} = 2 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\Rightarrow f(A) = 1 + \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{4} + \dots$$

Como:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\therefore f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Traz}(A) = 2$$

TEOREMA

Si los elementos de una fila o columna de un determinante son la suma algebraica de varias cantidades, la determinante se descompone en tantos determinantes como términos tiene la suma.

$$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

RANGO DE UNA MATRIZ

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ está formada por

dos vectores filas en \mathbb{R}^4 y 4 vectores columnas en \mathbb{R}^2 . Antes de conocer su rango, veamos algunas nociones preliminares.

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Sean $\mu_1; \mu_2; \mu_3; \dots; \mu_n$ vectores o matrices filas. se dice que un vector x se puede expresar de la forma $x = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3 + \dots + \lambda_n \mu_n$ con $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \dots; \lambda_n \in \mathbb{R}$ se llaman coeficientes de la combinación lineal.

Ejemplos:

1. $(3; 5; 4) = 2(1; 2; 1) + (1; 1; 2)$

Se dice que el vector $(3; 5; 4)$ es una combinación lineal de los vectores $(1; 2; 1)$ y $(1; 1; 2)$.

2. $(-8; 6; 3) = 2(-1; 0; 3) - 3(2; -2; 1)$

Se dice que el vector $(-8; 6; 3)$ es una combinación lineal de los vectores $(-1; 0; 3)$ y $(2; -2; 1)$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Sea V el conjunto de todos los vectores de n componentes y sean $\mu_1; \mu_2; \mu_3; \dots; \mu_k$ vectores de

V .

Se dice que los vectores $\mu_1; \mu_2; \mu_3; \dots; \mu_k$ son linealmente independientes (l.i.) en V si el vector cero se puede expresar como una combinación lineal única con coeficientes ceros.

Es decir:

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \dots + \lambda_k\mu_k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$$

Si no todos los λ_i son ceros, se dice que los vectores $\mu_1; \mu_2; \mu_3; \dots; \mu_k$ son linealmente dependientes (l.d.)

Ejemplo 1

¿Los vectores $(1; 1); (3; 1)$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^2 ?

Resolución:

Veamos:

$$\lambda_1(1; 1) + \lambda_2(3; 1) = (0; 0)$$

$$(\lambda_1; \lambda_2) + (3\lambda_2; \lambda_2) = (0; 0)$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

lo cual es cierto solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$

\therefore son linealmente independientes

Ejemplo 2

¿Los vectores $(1; 2; 3); (0; 0; 2); (2; 4; 0)$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ?

Resolución:

$$\lambda_1(1; 2; 3) + \lambda_2(0; 0; 2) + \lambda_3(2; 4; 10) = (0; 0; 0)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_3; 2\lambda_1 + 4\lambda_3; 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 10\lambda_3) = (0; 0; 0)$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$2\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \dots\dots (3)$$

De (1) y (2) $\lambda_1 = -2\lambda_3$

Sea $\lambda_3 = t \Rightarrow \lambda_1 = -t$

En (3): $-3t + 2\lambda_2 + 10t = 0$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{7}{2}t$$

Entonces la solución es:

$$\left(-t; -\frac{7}{2}t; t\right) / t \in \mathbb{R}$$

que no necesariamente son ceros

\therefore los vectores son linealmente dependientes.

RANGO DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz de orden $m \times n$, se puede considerar que cada una de sus “ m ” filas es un vector de \mathbb{R}^n y sus “ n ” columnas es un vector de \mathbb{R}^m .

- I. El número máximo de filas l.i se llama rango por filas.
- II. El número máximo de columnas l.i se llama rango por columnas.
Se demuestra que el rango por filas es igual al rango por columnas.
- III. Se llama rango de una matriz al número de filas o columnas l.i.

Problemas Resueltos

Problema 1

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ \pi & x & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

- I. ¿Cuál es el orden de la matriz A?
- II. ¿Cuál es la tercera fila de la matriz A?
- III. ¿Cuál es la cuarta columna de la matriz A?
- IV. ¿Cuál es el elemento a_{23} ?

Resolución:

- I. Como la matriz tiene 3 filas y 4 columnas entonces la matriz será de orden 3×4 .
- II. La tercera fila es: $(7 \ 1 \ 0 \ -7)$
- III. La cuarta columna es: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$
- IV. Se pide el elemento de la segunda fila y la tercera fila que es 9.

Problema 2

Escriba una matriz si es de orden:

- I. 2×3 tal que su elemento $a_{ij} = i+j$
- II. 3×1 tal que su elemento $a_{ij} = i^2 - j$
- III. 3×3 tal que $a_{ij} = \begin{cases} 3 & ; \text{ si } i=j \\ 2 & ; \text{ si } i \neq j \end{cases}$
- IV. 4×3 tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; \text{ si } i > j \\ i-j & ; \text{ si } i \leq j \end{cases}$

Resolución:

- I. De orden 2×3 (2 filas y 3 columnas)
' $a_{ij} = i+j$ así $a_{22} = 2+2$

$$\Rightarrow A = (a_{ij})_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

- II. De orden 3×1 (3 filas y 1 columna) tal que:
 $a_{ij} = i^2 - j$ así $a_{31} = 3^2 - 1 = 8$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 - 1 \\ 2^2 - 1 \\ 3^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- III. De orden 3×3 (3 filas y 3 columnas) tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3 & ; \text{ si } i=j \\ 2 & ; \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

así: $a_{32} = 2$ puesto que $3 \neq 2$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- IV. De orden 4×2 (4 filas y 2 columnas) tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; \text{ si } i > j \\ i-j & ; \text{ si } i \leq j \end{cases}$$

así: $a_{32} = 3+2$ ya que $3 > 2$

$a_{12} = 1-2$ ya que $1 \leq 2$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1-2 & 1-3 \\ 2+1 & 2+2 & 2-3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 \end{pmatrix}$$

Luego: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Problema 3

Halle el valor de $xyuv$ si las matrices.

$$\begin{pmatrix} x+y & u+v \\ x-y & u-v \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ son iguales}$$

Resolución:

$$\text{Si } \begin{pmatrix} x+y & u+v \\ x-y & u-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

De la igualdad de matrices:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=4 ; y=1$$

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u-v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow u=1 ; v=2$$

$$xyuv = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

Problema 4

De las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Indique su matriz transpuesta.

Resolución:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema 5

Sean las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halle las matrices:

I. $A+B$

II. $3A-2B$

III. $A+2B+3I$

Resolución:

$$\text{I. } A+B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 5-9 \\ 4+7 & -1+4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{II. } 3A-2B = 3 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-10 & 15-(-18) \\ 12-14 & -3-8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3A-2B = \begin{pmatrix} -4 & 33 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\text{III. } A+2B+3I = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 14 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+10+3 & 5-18+0 \\ 4+14+0 & -1+8+3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A+2B+3I = \begin{pmatrix} 15 & -13 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$$

Problema 6

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Halle:

I. A^2+B^2

II. AB

III. BA

IV. $(A+B)^2$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } A^2 + B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+12 & -4+8 \\ -3+6 & 12+4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+13 & 10+4 \\ 15+3 & 22+16 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow A^2 + B^2 &= \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 18 & 38 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II. } AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6 & 4+4 \\ -3+12 & 12+8 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow AB &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 20 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III. } BA &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+12 & -2+16 \\ 3+6 & 6+8 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow BA &= \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV. } (A+B)^2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+36 & 0+36 \\ 0+36 & 0+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 36 \\ 36 & 72 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow (A+B)^2 &= 36 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Problema 7

Resolver la ecuación:

$$3x - 2 \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - x \right] = 5 \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - x \right]$$

Resolución:Como observamos x es una matriz cuadrada de orden 2.

De la ecuación:

$$3x - 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 2x = 5 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 5x$$

$$(3+2+5)x = 5 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$10x = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$10x = \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ -3 & 23 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ -3 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \begin{pmatrix} 1,6 & 0,9 \\ -0,3 & 2,3 \end{pmatrix}$$

Problema 8

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x - y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e indicar la matriz $x^T y$ **Resolución:**

I. Sumando las matrices:

$$2x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Restando las matrices:

$$2y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 x^T y &= \begin{pmatrix} 5/2 & 2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -5/4+2 & -5/4-6 \\ -3/4+1 & -3/4-3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^T y = \begin{pmatrix} 3/4 & -29/4 \\ 1/4 & -15/4 \end{pmatrix}$$

Problema 9

Si $\{a; b; c; d\} \subset \mathbb{N}$ y además:

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \\ d & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+12 & 29 \\ 7d+4 & d+21 \end{pmatrix}$$

Calcular el valor de $a+b+c+d$

Resolución:

Multiplicando las matrices:

$$\begin{pmatrix} a^2+3+d & 2a+3b+2 \\ a+c+bd & 2+bc+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+12 & 29 \\ 7d+4 & d+21 \end{pmatrix}$$

De la igualdad de matrices:

$$a^2+3+d = d+12 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a=3$$

$$2a+3b+2=29 \Leftrightarrow 3b=27-2a=27-2(3)=21 \\ \Rightarrow b=7$$

$$a+c+bd=7d+2 \Leftrightarrow 3+c+d = d+2 \\ \Rightarrow c=1$$

$$2+bc+2b=d+21 \Leftrightarrow 2+7(1)+2(7)=d(21) \\ \Rightarrow d=2$$

Luego, el valor de $a+b+c+d$ es 13

Problema 10

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix}$$

tal que $AB=BA$

Calcular el valor de a y c

Resolución:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 \cdot c & 2 \cdot 1-5 \cdot 1 \\ 3a+1 \cdot c & 3 \cdot 1+1 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2a-c & -3 \\ 3a+c & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 2+1 \cdot 3 & -a+1 \cdot 1 \\ c \cdot 2+5 \cdot 3 & c(-1)+5 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2a+3 & -a+1 \\ 2c+15 & -c+5 \end{pmatrix}$$

De la condición: $AB=BA$

$$\begin{pmatrix} 2a-c & -3 \\ 3a+c & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 & 1-a \\ 2c+15 & 5-c \end{pmatrix}$$

$$\text{Se tiene: } 2a-c = 2a+3 \Rightarrow c=-3 \\ -3=1-a \Rightarrow a=4$$

$$\therefore a=4 \wedge c=-3$$

Problema 11

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, además el polinomio

$$F(x) = x^{34} - 2x^9 + 1.$$

Calcular la suma de los elementos de la matriz $F(B)$.

Resolución:

$$\text{La matriz } F(B) = B^{34} - 2B^9 + I / I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos las potencias $B^9 \wedge B^{34}$
Inductivamente:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que: $B^3 = -I$

$$\text{Luego: } B^9 = (B^3)^3 = (-I)^3 = -I$$

$$B^{34} = (B^3)^{11} \cdot B = (-I)^{11} \cdot B = -B$$

$$\text{Luego: } F(B) = -B - 2(-I) + I$$

$$F(B) = -B + 3I$$

de donde:

$$F(B) = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

\therefore La suma de elementos de la matriz $F(B)$ será:
 $3+1+(-1)+2=5$

Problema 12

Sea A una matriz de orden 2 cuyo determinante es 4 y la diferencia entre la suma de los elementos de la diagonal principal y los elementos de la diagonal secundaria es 8.

Si se suma x a cada elemento de la matriz A, su determinante resulta ser -4. Halle x.

Resolución:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de los datos:

$$\begin{aligned} ad - bc &= 4 \\ (a+d) - (c+b) &= 8 \end{aligned}$$

Además: $\begin{vmatrix} a+x & b+x \\ c+x & d+x \end{vmatrix} = -4$

$$\Rightarrow (x+a)(x+d) - (x+c)(x+b) = -4$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + (a+d)x + ad - \cancel{x^2} - (b+c)x - bc = -4$$

$$\left[\frac{(a+d) - (b+c)}{8} \right] x + \left(\frac{ad - bc}{4} \right) = -4$$

$$\Rightarrow x = -1$$

Problema 13

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2} \quad / \quad x \neq 2 \quad \text{y sea la matriz}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular el determinante f(M).

Resolución:

$$\text{Como } f(x) = (x+2)(x-2)^{-1}$$

$$\Rightarrow f(M) = (M+2I)(M-2I)^{-1}$$

$$(*) \quad M+2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M-2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

$$(*) \quad (M-2I)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow (M+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calculando la inversa:

$$(M-2I)^{-1} = \frac{1}{|M-2I|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (M-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

Luego de (1) y (2)

$$f(M) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & -3-1 \\ 0-4 & 1+4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(M) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |f(M)| = 5 - 16 = -11$$

Problema 14

Halle la traza de la matriz inversa tal que:

$$2A = |A| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Resolución:

Vemos que la matriz A será de orden 2 tomando determinante m.a.m:

$$|2A| = \left| |A| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right| \Rightarrow 2^2 |A| = |A|^2 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |A| = 8$$

$$\Rightarrow 2A = 8 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = 4 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{pero: } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

De donde se tendrá:

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Traz}A = 8 + 6 = 14$$

Problema 15

En un libro antiguo se encuentra la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \text{ y sólo se puede leer la segunda}$$

$$\text{columna } A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ de la operación } A^2 - A^T.$$

Hallar la matriz A si se observa que a, b y c son naturales.

Resolución:

De la matriz A

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac & a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & bc & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - A^T = \begin{pmatrix} 1 & ac & a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & bc & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & ac & a \\ 0 & b^2 - b & -c \\ -a & bc & 0 \end{pmatrix}$$

Por dato:

$$ac=3 \wedge b^2-b=2 \wedge bc=6$$

De donde: $b=2$; $c=3$; $a=1$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 16

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } A^2x = A^T$$

Hallar la matriz x.

Resolución:

De la matriz A

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+10 \\ 3+15 & 6+25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\text{en } A^2x = A^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, multiplicando por $(A^2)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7 \times 31 - 18 \times 12} \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}}_I x = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 31-12 & 93-60 \\ -18+14 & -54+35 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \begin{pmatrix} 7 & 33 \\ -4 & -19 \end{pmatrix}$$

Problema 17

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $A+A^T$ es simétrica para toda matriz A cuadrada.
- II. $A-A^T$ es antisimétrica para toda matriz A cuadrada.
- III. Si A y B son matrices cuadradas de orden n y $I+A+AB=0$, entonces A no es singular.

Resolución:

- I. Recordar que la matriz M es simétrica $M^T=M$.

$$\text{En el problema } (A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$$

$$\Leftrightarrow (A+A^T)^T = A+A^T \Rightarrow A+A^T \text{ es simétrica} \\ (\text{Verdadero})$$

- II. Recordar la matriz M es antisimétrica si $M^T=-M$.

$$\text{En el problema } (A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$$

$$\Rightarrow (A-A^T)^T = -(A-A^T) \Rightarrow A-A^T \text{ es antisimétrica} \\ (\text{Verdadero})$$

- III. De $I+A+AB=0$

$$\Rightarrow I = -A(I+B)$$

$$\text{tomando determinante } |I| = (-1)^n |A| \cdot |I+B|$$

donde n es el orden de las matrices

$$\Leftrightarrow (-1)^n |A| \cdot |I+B| = 1$$

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \wedge |I+B| = 1$$

$$\text{y como } |A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ es no singular}$$

(Verdadero)

Problema 18

Sean las matrices A y B tales que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

encontrar el valor de $u+v+w+x+y+z$

s. se cumple que $AB=I$ (I matriz identidad)

Resolución:

$$\text{De } AB=I \Leftrightarrow B=A^{-1}$$

Cálculo de B por (operaciones elementales)

$$A | B \xrightarrow{\text{O.E.}} I | A^{-1}$$

O.E. (operaciones elementales)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{f_2 \times 2 \\ f_3 \times 4}]{f_2 \times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_1+f_2 \\ f_2+2f_3}]{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B$$

$$\Rightarrow u=1; v=2; w=4; x=2; y=8; z=4$$

$$\therefore u+v+w+x+y+z \text{ es } 21$$

Problema 19

Dada la matriz $A=(a_{ij})_{4 \times 4}$ definido por:

$$a_{ij} = \begin{cases} i & ; i > j \\ 1 & ; i = j \\ j & ; i < j \end{cases}$$

Calcular $|A|$

Resolución:

Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

De acuerdo a su definición:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos su determinante por matrices equivalentes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 - f_2; f_2 - f_3 \\ f_3 - 4f_4}}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -13 & -13 & -15 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Por menores complementarios:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -13 & -13 & -15 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 + C_2}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ -26 & -13 & -15 \end{vmatrix} \text{ por menores complementarios}$$

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -26 & -15 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |A| = -(45 + 52) = -97$$

$$\therefore |A| = -97$$

Problema 20

Siendo n_0 una solución no racional de la ecuación:

$$n^4 - 3n + 2 = \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 & n+4 \\ n+2 & n+3 & n+4 & n+5 \\ n+3 & n+4 & n+5 & n+6 \\ n+4 & n+5 & n+6 & n+7 \end{vmatrix}$$

Determinar el valor de M si

$$M = \frac{n_0}{\left(1 + \frac{2}{n_0}\right) \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)}$$

Resolución:

Calculando el determinante:

$$\begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 & n+4 \\ n+2 & n+3 & n+4 & n+5 \\ n+3 & n+4 & n+5 & n+6 \\ n+4 & n+5 & n+6 & n+7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1}}$$

$$\begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 & n+4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ n+4 & n+5 & n+6 & n+7 \end{vmatrix} = 0$$

(dos filas de elementos son proporcionales)

Luego, queda: $n^4 - 3n + 2 = 0$

Factorizando por divisores binómicos.

$$\begin{array}{c|cccc|c} n=1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ & \downarrow & 1 & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n^3 + n^2 + n - 2) = 0$$

$$\Rightarrow n=1 \text{ ó } n^3 + n^2 + n - 2 = 0$$

Como $n^3 + n^2 + n - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales $\Rightarrow n_0$ es una solución de:

$$n^3 + n^2 + n - 2 = 0 \text{ entonces } n_0^3 + n_0^2 + n_0 - 2 = 0$$

De M multiplicando por n_0^2 .

$$M = \frac{n_0^3}{(n_0 + 2)(n_0 - 1)} = \frac{n_0^3}{n_0^2 + n_0 - 2}$$

$$\text{como } n_0^3 = -(n_0^2 + n_0 - 2)$$

$$\Rightarrow M = -1$$

Problema 21

Señale el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Si A es una matriz antisimétrica $\Rightarrow (A - A^T)^T$ es antisimétrica.
- II. Toda matriz cuadrada se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.
- III. Si A es una matriz involutiva. $\Rightarrow \frac{1}{2}(I - A)$ es idempotente.

Resolución:

- I. Si A es antisimétrica $\Rightarrow A^T = -A$
 $\Rightarrow ((A-A^T)^T)^T = (A^T - (A^T)^T)^T = (A^T - A)^T$
 $= -(A-A^T)^T \Rightarrow$ puede observarse
 que $(A-A^T)^T$ es antisimétrica (Verdadera)
- II. En el problema 17 se demostró que: $A+A^T$ es simétrica y $A-A^T$ es antisimétrica
 Luego:

$$A = \underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{\text{antisimétrica}}$$

\Rightarrow la proposición es Verdadera

- III. Si A es involutivo $A^2 = I$
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}(I-A)\right)^2 = \frac{1}{4}(I-2A+A^2)$
 $= \frac{1}{4}(I-2A+I) = \frac{1}{4}(2I-2A) = \frac{1}{2}(I-A)$
 $\Rightarrow \frac{1}{2}(I-A)$ es idempotente
 (Recordar que M es idempotente si $M^2 = M$)
 \Rightarrow La proposición es verdadera.

Problema 22

De las proposiciones:

- I. Sea A una matriz cuadrada y $B = aA + bI$, donde a y b son escalares $\Rightarrow A$ y B conmutan.
- II. Siendo A y B matrices cuadradas del mismo orden, si $A-kI$ conmutan, A y B conmutan.
- III. Si A y B son matrices antisimétricas y AB es simétrica $\Rightarrow AB=BA$.

Establezca el valor de verdad de ellas.

Resolución:

- I. Hay que demostrar que $AB=BA$
- $AB = A(aA + bI) = aA^2 + bA \dots\dots\dots(a)$
 - $BA = (aA + bI)A = aA^2 + bA \dots\dots\dots(b)$
- Vemos que $AB=BA$ u A y B conmutan

- II. Como $A-kI$ y $B-kI$ conmutan
 $(A-kI)(B-kI) = AB - kA - kB + k^2I \dots\dots\dots(1)$
 $(B-kI)(A-kI) = BA - kB - kA + k^2I \dots\dots\dots(2)$
 De (1) y (2): $AB=BA$ (proposición verdadera)
- III. Si A y B son matrices antisimétricas $A^T = -A$
 $\wedge B^T = -B$ pero como AB es simétrica,
 $AB = (AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A)$
 $\Rightarrow AB=BA$ (proposición verdadera)

Problema 23

De las proposiciones:

- I. Si B es una matriz diagonal y $AB=BA = AB^n = B^n A$
 Donde A es una matriz del mismo orden de B
- II. Sea A una matriz cuadrada no nula y $AB=kB$ donde $k \in \mathbb{R} \Rightarrow A^n B = k^n B$.
- III. Si dos matrices no son conmutables son anticonmutables
 Establezca su valor de verdad.

Resolución:

- I. Usando la demostración por inducción:
- a) Si $AB=BA$
- b) Si $n=2 \Rightarrow AB^2 = (AB)B = (BA)B = BAB = B(AB) = B(BA) = B^2A$
 \Rightarrow la proposición verdadera
- c) Si asumiendo que para $n=m$ sea verdadera; demostrar que es verdadera para $n=m+1$
 $AB^{m+1} = AB^m B = B^m(AB) = B^m(BA) = B^{m+1}A$
 \Rightarrow la proposición verdadera
- II. Igualmente por inducción:
- a) Si $n=2 \Rightarrow A^2 B = A(AB) = A(kB) = k(AB) = k(kB) = k^2 B$
- b) Asumiendo que para $n=m$ es cierto demostrar que se cumple para $n=m+1$
 $\Rightarrow A^{m+1} B = A^m A B = A^m (kB) = k(A^m B) = k(k^m B) = k^{m+1} B$
 \Rightarrow la proposición verdadera
- c) De la definición si no es conmutable no implica que sea anticonmutable.
 \Rightarrow la proposición falsa

Problema 24

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y sea S una matriz

triangular inferior / $A = SS^T$.

Halle la traza de la matriz S de elementos positivos.

Resolución:

Sea la matriz $S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$

efectuando SS^T

$$SS^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$SS^T = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ax \\ ba & b^2 + c^2 & bx + cy \\ ax & bx + cy & x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

De la igualdad de matrices:

$$a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

$$ab = 2 \Leftrightarrow b = 1$$

$$b^2 + c^2 = 4 \Leftrightarrow c = \sqrt{3}$$

$$ax = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$bx + cy = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{3}y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \sqrt{3}$$

Luego:

$$\text{Traz } S = a + c + z = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{Traz } S = 2(1 + \sqrt{3})$$

Problema 25

Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

Calcular el valor de S tal que:

$$S = \frac{2\det(BB^T)}{\det(B) + \det(B^T)} \quad \text{con: } \{a; b; c; d\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$$

Resolución:

Como $\det B = \det B^T \wedge \det(BB^T) = \det B \cdot \det B^T$

S se simplifica en:

$$S = \frac{2(\det B)^2}{2\det B} = \det B$$

Para hallar el det de B

Veamos BB^T

$$BB^T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Tomando determinante:

$$|B| |B^T| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

$$\Rightarrow |B| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

$$\text{Luego } S = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Problema 26

Sea $A = (a_{ij})_{m_1 \times m_1}$. Halle el determinante de la adjunta de A si $|A| = m_2$, donde m_1 y m_2 son raíces de $m^2 - m = 12$

Resolución:

Resolviendo la ecuación:

$$m^2 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow (m-4)(m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \text{ ó } m = -3$$

Como m_1 debe ser natural $\Rightarrow m_1 = -4$ y $|A| = -3$

pero: $\text{Adj } A = |A| A^{-1}$

Tomando determinante

$$|\text{adj } A| = |A|^{m_1} |A^{-1}| \Rightarrow |\text{adj } A| = |A|^{m_1-1}$$

Reemplazando datos:

$$|\text{adj } A| = (-3)^{4-1} \therefore |\text{adj } A| = -27$$

Problema 27

Dadas las matrices:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} / a_{ij} = (-1)^i + (-1)^j$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3} / b_{ij} = i + j$$

Calcular $c_{11} + c_{22} + c_{33} / C = A + B$

Resolución:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} = (-1)^1 + (-1)^1 + 1 + 1 = 0$$

$$c_{22} = a_{22} + b_{22} = (-1)^2 + (-1)^2 + 2 + 2 = 6$$

$$c_{33} = a_{33} + b_{33} = (-1)^3 + (-1)^3 + 3 + 3 = 4$$

$$\therefore c_{11} + c_{22} + c_{33} = 10$$

Problemas 28

Calcular la traza de $f(A)$ siendo $f(x) = x^2 + x - 2$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$f(A) = A^2 + A - 2I$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$= f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traz } (f(A)) = 6 + 24 = 30$$

Problema 29

Dado una matriz B de cuarto orden con $|B| = 4$ además $BA^{-1}B^T = AMM^T$ siendo M una matriz

diagonal $M = (m_{ij})_{4 \times 4}$ además $m_{ii} = \left(\frac{1+i}{i} \right)^{-1}$

Halle $|A|$, si $|A| > 0$

Resolución:

Hallando $M / M = (m_{ij})_{4 \times 4}$ diagonal con $m_{ii} = \frac{1+i}{i}$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Luego tomando determinante en:

$$BA^{-1}B^T = AMM^T$$

se tiene: $|B| \frac{1}{|A|} |B| = |A| |M| |M|$

$$\Rightarrow |A|^2 = \frac{|B|^2}{|M|^2} \Rightarrow |A|^2 = \frac{4^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 20^2$$

$$\Rightarrow |A| = 20 \vee |A| = -20$$

$$\therefore |A| = 20$$

Problema 30

Dada una matriz cuadrada A , se denomina valores propios de la matriz A a los números x que satisfacen la ecuación $|A - xI| = 0$. Halle los valores propios de la matriz A , si:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

La ecuación $|A-xI|=0$; $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2-x & -2 & -2 \\ -1 & -x & -2 \\ -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

Por operaciones elementales

$$\xrightarrow[\substack{f_1-f_2 \\ f_2-f_3}]{} \begin{vmatrix} 3-x & x-2 & 0 \\ 0 & 1-x & x-3 \\ -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 3-x & 2x-5 & 0 \\ 0 & 1-x & x-3 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y usando la regla de la estrella:

$$(3-x)(x-1)^2 - (x-3)(2x-5) = 0$$

$$(3-x)[(x-1)^2 + 2x-5] = 0$$

$$(3-x)(x^2-4) = 0$$

De donde: $x=3 \vee x=2 \vee x=-2$ \therefore Los valores propios son 3; 2; -2**Problema 31**

Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{pmatrix}$$

Halle el valor de $(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)$ **Resolución:**

Efectuando:

$$\begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices

$$ax_1 = a+b \Leftrightarrow a(x_1-1) = b \Leftrightarrow x_1-1 = \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$bx_2 = b+c \Leftrightarrow b(x_2-1) = c \Leftrightarrow x_2-1 = \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$cx_3 = c+a \Leftrightarrow c(x_3-1) = a \Leftrightarrow x_3-1 = \left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\therefore (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1) = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

Problema 32

Calcular:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Por operaciones elementales:

$$\xrightarrow{f_1+f_2+f_3+f_4+f_5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Como la primera fila tiene elementos nulos su determinante es cero.

Problema 33

Si se cumple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además:

$$mq - np = 35 \dots\dots\dots (1)$$

$$m+q = 12 \dots\dots\dots (2)$$

Calcular $m+n+p+q$ **Resolución:**

De la igualdad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2m & 2n \\ m+p & n+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+n & n \\ 2p+q & q \end{pmatrix}$$

De donde:

$$2m = 2m + n \Leftrightarrow n = 0$$

$$m + p = 2p + q \Leftrightarrow m = p + q \dots\dots (a)$$

Si $n = 0$ en (1): $mq = 35$

$$m + q = 12$$

De donde $m = 5$; $q = 7$ ó $m = 7$; $q = 5$

En (a) $p = -2$ ó $p = 2$

Entonces $m + p + q + n = 10$ ó 14

Problema 34

Si A es una matriz no singular. Calcular $\text{adj}(A^2 + 2A)$.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Además: $\text{adj } M = |M| M^{-1}$

$$\Rightarrow \text{adj}(A^2 + 2A) = |A^2 + 2A| (A^2 + 2A)^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = 9 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{adj}(A^2 + 2A) = \begin{pmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 35

Halle los valores de x para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x^2 - 3 & 1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \text{ tenga inversa.}$$

Resolución:

Para que tenga inversa $|A| \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x^2 - 3 & 1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 - 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 3 \vee x \neq -1$$

$$\therefore x \in \mathbb{R} - \{3; -1\}$$

Problema 36

Sean las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} n & 5 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} n-1 & 5 \\ 0 & n-2 \end{pmatrix}; \dots; A_k = \begin{pmatrix} n-k+1 & 5 \\ 0 & n-k \end{pmatrix}$$

Calcular el valor de n si

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2 = \begin{pmatrix} 55 & m \\ p & 30 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Hallemos A_k^2

$$A_k^2 = \begin{pmatrix} n-k+1 & 5 \\ 0 & n-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k+1 & 5 \\ 0 & n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-k+1)^2 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

De la igualdad de matrices sólo me interesa el elemento que será igual a 55.

$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2 = 55$, lo que equivale a

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 55$$

$$n(n+1)(2n+1) = 5 \times 6 \times 11$$

$$\therefore n = 5$$

Problema 37

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sea S una matriz triangular inferior de elementos positivos donde $A = SS^T$. Calcular la traza de la matriz S .

Resolución:

$$\text{Sea } S = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ m & n & p \end{pmatrix}$$

Luego:

$$SS^T = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ m & n & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & m \\ 0 & z & n \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 & xy & xm \\ xy & y^2 + z^2 & ym + nz \\ xm & my + nz & m^2 + n^2 + p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

De la igualdad de matrices:

$$x^2=4 \Leftrightarrow x=2$$

$$xy=2 \Leftrightarrow y=1$$

$$y^2+z^2=4 \Leftrightarrow z^2=3 \Leftrightarrow z=\sqrt{3}$$

$$xm=1 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

$$my+nz=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 + n\sqrt{3} = 2 \Leftrightarrow n = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m^2+n^2+p^2=4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + p^2 = 4 \Leftrightarrow p^2=3 \Leftrightarrow p=\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{Traz } S = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})$$

Problema 38

Halle la relación entre a, b y c de tal modo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & x & x^2 \\ c & b & a \end{vmatrix} = 0 \text{ tenga raíces iguales (a>c)}$$

Resolución:

Desarrollando el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & x & x^2 \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^2x + bcx^2 + bc - c^2x - abx^2 - ab = 0$$

reduciendo:

$$x^2(bc-ab) + x(a^2-c^2) + bc-ab=0$$

$$b(\cancel{c-a})x^2 - (c+a)(\cancel{c-a})x + b(\cancel{c-a}) = 0; c \neq a$$

$$\Leftrightarrow bx^2 - (c+a)x + b = 0$$

si tiene raíces iguales:

$$(a+c)^2 - 4b^2 = 0$$

$$[(a+c)+2b][(a+c)-2b] = 0$$

$$\therefore a+c+2b=0 \vee a+c-2b=0$$

Considere $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$; $|x| < 1$

Halle la traza de $f(A)$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow f(A) = (I-A)^{-1}; \text{ con } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{14-12} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f(A) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Traz } (f(A)) = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

Problema 40

Dadas las matrices A y B que cumplen:

$$A+2B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$$2A-B = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

Halle $|A| - |B|$

Resolución:

ec: (1) + 2(2)

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - 8 = -5$$

en (2):

$$B = 2A - \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -2 - 3 = -5$$

$$\therefore |A| - |B| = -5 - (-5) = 0$$

Problemas Propuestos

1. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

No es cierto que:

- A) $A+B = B+A$
- B) $A(A+B)=A^2+AB$
- C) $A(A-B)=A^2-AB$
- D) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
- E) $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$

2. De la igualdad de matrices:

$$\begin{pmatrix} x^2+5 & x \\ xy^2+2y & xy \\ (1-xy)(x+y) & xy^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -y \\ 2xy-y & -y \\ 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

Determine: $x-y$

- A) -5 B) -3 C) 3
- D) 2 E) 7

3. Dadas la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & y-2 \\ 3 & x+1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ x+3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A=B$. Calcular la suma de los elementos de la matriz A.

- A) 9 B) 6 C) 11
- D) 10 E) 12

4. Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la matriz

$$M=A+A^2+A^3+\dots+A^n / n \in \mathbb{N} \cdot n \geq 3$$

Establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Su traza es $2n$
- II. La suma de sus elementos es 0

III. La matriz M es: $A = \begin{pmatrix} n & \frac{-n(n+1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$

- A) VVV B) VFV C) VVF
- D) FVF E) FFV

5. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la suma de los elementos de la matriz $AB+I$

- A) 1 B) 2 C) 3
- D) 4 E) 5

6. En base a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, establezca el valor de cada una de lasproposiciones:

- I. $A^2=2A-I$ (I, matriz identidad)
- II. $A^3=3A-2I$ (I, matriz identidad)
- III. $|A+I|=4$
- IV. $|A+I|=|A|+1$

- A) VVVF B) VVFF C) VFFF
- D) VVVF E) VFVF

7. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden no se cumple que:

- A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
- B) $|A+B|=|B+A|$
- C) $|AB|=|A||B|$
- D) $|AB^{-1}| = \frac{|A|}{|B|} / |B| \neq 0$
- E) $(A+B)^2=A^2+B^2 \Leftrightarrow A$ y B son anticonmutables

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular la traza de la matriz A^{-4} .

- A) 30 B) 28 C) 32
D) 34 E) 36

9. Si A es una matriz que cumple:

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Halle la traza de la matriz A

- A) 2 B) 1 C) 4
D) 5 E) 6

10. Sean A y B dos matrices conmutables (del mismo orden), determine la tabla de verdad de:

I. $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

II. $(B^{-1}AB)^m = B^{-1}A^mB$, si $|B| \neq 0$; $m \in \mathbb{N}$

III. B^2 es invertible si B es invertible

- A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FFV

11. En base a la definición $A = (a_{ij})_{n \times n}$, donde $a_{ij} = |i-j| + j-i$, establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Su traza es cero

II. Si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

III. $\det A \neq 0$

- A) VVF B) VVV C) VFV
D) FVF E) FFF

12. Hallar la solución de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

- A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

13. Sea la matriz que cumple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ c & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ cuya traza es 7 y el producto}$$

de los elementos de su diagonal secundaria es -3, además su determinante es 10.

Calcular: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & c & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$

- A) 4 B) 2 C) -2
D) -4 E) 3

14. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & x & 3 \end{pmatrix} \text{ simétrica.}$$

Halle la traza de A^{-1}

- A) -11 B) -2 C) -1
D) -15 E) 16

15. Si A, B y C son matrices de orden "n". Decir el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Si $AB=AC \Rightarrow B=C$

II. Si $AB=0 \Rightarrow A=0$ ó $B=0$

III. Si $|A| \neq 0 \Rightarrow A$ tiene inversa

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) VFF

16. Si α , β y γ son las raíces de la ecuación $x^3 + 4x + 3 = 0$. Calcular el determinante de

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 4 E) 7

17. Calcular la determinante de la matriz A de orden 4 definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 5, & \text{si } i < j \\ 3, & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

- A) 5 B) 3 C) 15
D) -15 E) -24

18. Sean las matrices:

$$A = (a_{ij})_{23 \times 2} / a_{ij} = i + j$$

$$B = (b_{ij})_{2 \times 41} / b_{ij} = 2i + 3j$$

Si $C = AB$ de elementos c_{ij} . Halle el elemento c_{34}

- A) 136 B) 121 C) 114
D) 125 E) 134

19. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; i \text{ es la unidad imaginaria}$$

$$B = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}; w \text{ es la raíz cúbica no real}$$

de la unidad real

Hallar la traza de la matriz inversa de:

$$J = \sum_{k=1}^{40} [A^{4k} + B^{3k}]$$

- A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 0 & 80 \\ 80 & 0 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{pmatrix}$

20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, ella se puede expresar como la suma de una matriz simétrica B y otra antisimétrica C; luego la matriz C es:

A) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

21. Luego de calcular $(49A)^{-1}$ si existe. Halle la suma de todos sus elementos, si

$$A = |A| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

22. Halle A^{-1} e indique la suma de sus elementos si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

- A) -3 B) -4 C) -5
D) -6 E) 1

23. Halle la traza de la matriz A^{40}

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A) 0 B) 6 C) 36
D) 3 E) 7

24. Al calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \cos(\beta - \gamma) & \cos(\gamma - \alpha) \\ \cos(\alpha + \beta) & \cos(\beta + \gamma) & \cos(\gamma + \alpha) \\ \sin(\alpha + \beta) & \sin(\beta + \gamma) & \sin(\gamma + \alpha) \end{vmatrix}$$

Se obtiene: $\{\sin A + \sin B + \sin C\}$

Halle: "A+B+C"

- A) $\alpha + \beta + \gamma$ B) $2(\alpha + \beta + \gamma)$
 C) $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$
 D) 0 E) $\frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma)$

25. Halle: $\begin{vmatrix} m+3a & p+7b & q+11b \\ m+5a & p+9b & q+13b \\ m+7a & p+11b & q+15b \end{vmatrix}$

- A) $m+n+p$ B) $a+b$ C) mnp
 D) 0 E) ab

26. Calcular: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

- A) 0 B) $a+b+c$ C) abc
 D) 1 E) $\frac{a+b+c}{abc}$

27. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la traza de la matriz

$2^{-98}A^{100}$ es:

- A) 2 B) 0 C) 4
 D) 1 E) 6

28. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Halle la traza de la matriz $A+A^{-1}$

- A) $\frac{47}{6}$ B) $\frac{41}{6}$ C) $\frac{37}{6}$
 D) $\frac{57}{6}$ E) $\frac{43}{6}$

29. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de "a" es consistente el sistema $AC=B$?

Indique la suma de dichos valores

- A) -2 B) -1 C) 0
 D) 1 E) 2

30. Determinar "x" si $|A|I(\text{adj}(A))^{-1}x=A$.
 Además $|A| \neq 0$ con $A=(a_{ij})_{n \times n}$

- A) A B) A^T C) A^{-1}
 D) I_n E) $\text{adj } A$

31. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ satisface la ecuación

$$x^3 + 5x^2 + 10x + 10 = 0 \text{ donde } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si B y C son matrices de coeficientes enteros que satisfacen $5A=B^5+C^5$. Halle B-C.

- A) A B) 2A C) $A+2I$
 D) $A-2I$ E) I

32. Calcular:

$$\sum_{k=1}^{20} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix}$$

- A) 325 B) 2730 C) 2940
 D) 3320 E) 3248

33. Calcular $|A|$ si:

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{pmatrix}$$

es de orden "n"

- A) $b^n na$ B) $b^{n-1}(na+b)$
 C) $b^n(an+b)$
 D) $b^{n-1}(a+nb)$ E) $b^n(an-b)$

34. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $(rA)^t = rA^t$; $r \in \mathbb{R}$; A matriz cuadrada
 II. $|rA| = r^n |A|$; A matriz de orden n
 III. $(AB)^t = B^t A^t$; A y B matrices cuadradas del mismo orden
 IV. $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$; A matriz de orden n

- A) VVVV B) VVVF C) VVVF
 D) VVFF E) VFVV

35. Calcular

$$\frac{(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}}{3abc - (a^3 + b^3 + c^3)}$$

- A) 1 B) -1 C) abc
 D) $\frac{1}{abc}$ E) 0

36. Halle la traza de la matriz A^{-1}

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- A) 4 B) 6 C) 8
 D) 7 E) 9

37. Dada la matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3 - a_{ij}, & \text{si } i \neq j \\ -a_{ij}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

Calcular $|A|$

- A) 0 B) 1 C) $\frac{4}{27}$
 D) $\frac{27}{4}$ E) $\frac{9}{4}$

38. Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tal que:

$$|A| = 2 \wedge N = A^{10} A^T \wedge M = A^T A^2 |4A^{-1}|$$

Calcular $|MN| + |B^{100}|$ si B es una matriz nilpotente de grado 99.

- A) 2^{30} B) 2^{29} C) 2^{19}
 C) 2^{20} E) 2^{21}

39. Si $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$

$$\text{y definimos } f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Calcular la suma de elementos de $f(A)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- A) 3 B) 1 C) -3
 D) 4 E) 7

40. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

- A) 1 B) 2 C) -2
 D) -1 E) 0

41. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Si $A^{-1} = \frac{1}{m} (A^2 - nA + 180I)$. Halle $m+n$

- A) 297 B) 345 C) 361
D) 441 E) 257

42. Calcular

$$\begin{vmatrix} 47 & 26 & 12 \\ 119 & 68 & 33 \\ 191 & 110 & 54 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

- A) 0 B) 35 C) -12
D) 15 E) -5

43. Luego de resolver

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 2a+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

la suma de soluciones es:

- A) $-4/3$ B) $4/3$ C) $-3/4$
D) $3/4$ E) 1

44. Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} p \\ n-1 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 & \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} p \\ n-2 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 & \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} p+1 \\ n-1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & \begin{pmatrix} p+n-2 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} p+n-2 \\ n-2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

- A) 1 B) 0 C) -1
D) n E) $2n-p$

45. Calcular el determinante de la matriz.

$$\begin{bmatrix} -1 & m & m & \cdots & m \\ m & -1 & m & \cdots & m \\ m & m & -1 & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

- A) $(n-1)m-1$ B) $(m+1)^{n-1}$
C) $((n-1)m-1)(-(m+1))^{n-1}$
D) $(m-1)n-1$ E) $(n+1)m$

46. Sean A y B dos matrices de orden dos, simétricas tal que en cada una de ellas los elementos de su diagonal principal son iguales y además se cumple:

$$\text{Det}(A+B) + \text{Det}(A-B) = 2\text{Det}(A) - 2\text{Det}(B)$$

Calcule $\text{Det}(AB)$

- A) 2 B) 1 C) 6
D) 5 E) 0

47. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta & \sin\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

Entonces la matriz M^3 es igual a:

- A) M B) 2M C) 16M
D) 4M E) 8M

48. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz, entonces la

matriz A^{49} está representada por:

- A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 989 & 49 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1080 & 49 & 1 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1225 & 49 & 1 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1127 & 49 & 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1126 & 49 & 1 \end{pmatrix}$

Colección

Álgebra

1 **D**

2 **D**

3 **D**

4 **B**

5 **B**

6 **A**

7 **A**

8 **D**

9 **A**

10 **A**

11 **A**

12 **A**

13 **E**

14 **D**

15 **D**

16 **A**

17 **E**

18 **A**

19 **A**

20 **E**

21 **A**

22 **E**

23 **A**

24 **D**

25 **D**

26 **C**

27 **C**

28 **A**

29 **A**

30 **D**

31 **A**

32 **B**

33 **B**

34 **A**

35 **A**

36 **C**

37 **D**

38 **B**

39 **C**

40 **E**

41 **C**

42 **A**

43 **A**

44 **A**

45 **C**

46 **E**

47 **B**

48 **C**

Claves