

**FACULTE PLURIDISCIPLINAIRE - NADOR**  
**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

ANNEE : 2016-2017  
FILIERE : SMP 3  
SERIE : 1

TD de Mécanique du solide

**Exercice 1 :** Dans le repère  $R(O, x, y, z)$ , on considère les points de l'espace :  $A(2, 0, 0)$  et  $B(0, 2, -2)$ . Soit  $\vec{u}$  un champ de vecteur défini tel que :  $\vec{u}(O) = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{u}(A) = (1, -2, 0)$  et  $\vec{u}(B) = (2, 1, 2)$ .

- Déterminer la résultante  $\vec{R}$  du torseur associé au champ  $\vec{u}$ .
- Déterminer l'axe central du torseur.

**Exercice 2** Soit  $R(O, x, y, z)$  un repère orthonormé direct. On considère le champ de vecteurs  $\vec{u}$  qui, pour  $t$  réel fixe, associe tout point  $P(x, y, z)$  le vecteur  $\vec{u}$  de composantes :

$$\vec{u}(P) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2ty + tz \\ y &= -2tx + tz \\ z &= 2 - tx - t^3y \end{aligned}$$

- Pour quelles valeurs de  $t$ ,  $\vec{u}$  est-il le moment d'un torseur ?
- Donner pour chacune de ces valeurs la résultante et l'axe central.

**Exercice 3 : Le mouvement d'une tige**

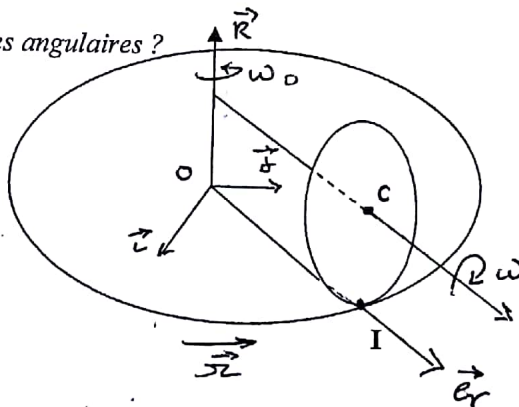
Une tige  $AB$  homogène de longueur  $2b$  et de centre  $C$ , est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle  $\alpha$  (voir figure) qui varie lorsque la tige glisse en  $A$  et  $B$ .

- Déterminer directement les composantes de la vitesse du point  $C$  en fonction de  $\alpha$
- En déduire le vecteur rotation de la tige

**Exercice 4 : mise en rotation d'un plateau**

Un disque de centre  $C$ , de rayon  $r$  roule sans glisser sur le plateau circulaire  $P$  de rayon  $R$ . Le Plateau  $P$  tourne autour de son axe vertical à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Soit  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation du disque autour de son axe. Ce dernier est parallèle au plan du plateau. Soit  $\omega_0$  la vitesse angulaire de rotation de l'axe du disque autour de l'axe vertical.

Quelle relation existe-t-il entre ces diverses vitesses angulaires ?



### Exercice I

Soit la Torseur  $\mathcal{C} : \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{U}(P) \end{pmatrix}$  et On a les points:  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, -2)$   
 $\vec{U}(O) = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{U}(A) = (1, -2, 0)$ ,  $\vec{U}(B) = (2, 1, 2)$

a) On suppose que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les coordonnées de la résultante  $\vec{R}$ .

On a  $\mathcal{C}$  est une Torseur, Donc  $\vec{U}$  est un champ antisymétrique.

$$\vec{U}(A) = \vec{U}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OA} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta \\ -2\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 0 \\ \alpha = -1/2 \end{matrix}$$

$$\vec{U}(B) = \vec{U}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta - 2\gamma \\ 2\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Donc } \vec{R}(1, 0, -1/2)$$

b) On a la Relations générale de l'axe Central du Torseur

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{U}(O)}{R^2} + \lambda \vec{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{5}{4}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5} + \lambda \\ y = -\frac{2}{5} \\ z = -\frac{4}{5} - \frac{\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{5} \\ z = -\frac{x}{2} - 1 \end{cases}$$

L'axe Central est Donc la droite qui supporte sur le plan parallèle  $(O, x, y)$  et passe par le point  $(0, -\frac{2}{5}, 0)$ .

Exercice II Soit  $R(O, x, y, z)$  un repère orthonormé direct,

soit le champ  $\vec{U}(P) = (x', y', z')$  Donc  $\vec{U}(P) = \begin{pmatrix} 1 + 2ty + tz \\ -2 + x + tz \\ 2 - tx + t^3y \end{pmatrix}$

On a Champ antisymétrique.

$$\vec{U}(P) = \vec{U}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2ty + tz \\ -2 + x + tz \\ 2 - tx + t^3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} 2ty + tz = -2y + 8z \\ -2tx + tz = 2x - 4z \\ -tx - t^2y = -px + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ t = 0 \\ -2t = 2 \\ t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$t - t^3 = 0 \Rightarrow t(1 - t^2) = 0$$

Donc l'ensemble des solutions de cette équation  
 $t = \{-1, 0, 1\}$

b) pour  $t = 0$   
 $O \rightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  l'axe Central n'est pas

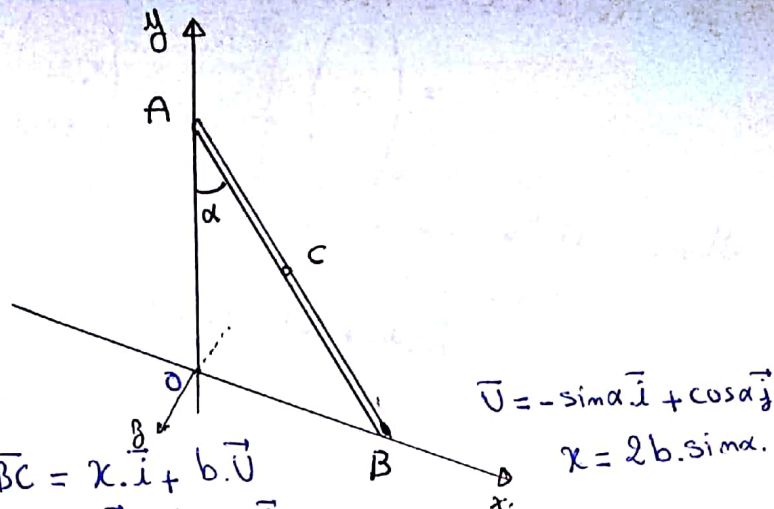
pour  $t = 1$   
 $\vec{R} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  l'axe Central.  $\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M(0)}}{R^2} + \lambda \vec{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - 2\lambda \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} - x = y = -\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{2}\right)$$

# Exercice III



a On a  $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = x \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{U}$   
 $\vec{OC} = (2b \cdot \sin \alpha - b \sin \alpha) \vec{i} + b \cdot \cos \alpha \vec{j}$   
 $\vec{OC} = (b \cdot \sin \alpha) \vec{i} + (b \cdot \cos \alpha) \vec{j}$   
 $\vec{V}(C) = \frac{d\vec{OC}}{dt} \Big|_R = b \frac{d \sin \alpha}{dt} \vec{i} + b \frac{d \cos \alpha}{dt} \vec{j}$

$\vec{V}(C) = b \cdot \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{i} - b \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{j}$   
 $\vec{V}(C) = b \dot{\alpha} (\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j})$   $\dot{\theta} = \dot{\alpha}$

b On a  $\vec{V}$  est une Champ antisymétrique.

Donc  $\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{\omega}(S/R) \wedge \vec{AB}$   
 $\Rightarrow 2b \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{i} = -2b \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{j} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2b \sin \alpha \\ -2b \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2b \dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2b \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\gamma b \cos \alpha \\ 2\gamma b \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \gamma$

$\Rightarrow \vec{\omega}(S/R) = \dot{\alpha} \vec{k}$

## Exercice IV

(S<sub>1</sub>) le disque, (S<sub>2</sub>) le Plateau P.

On a le mouvement sans glissement

$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$

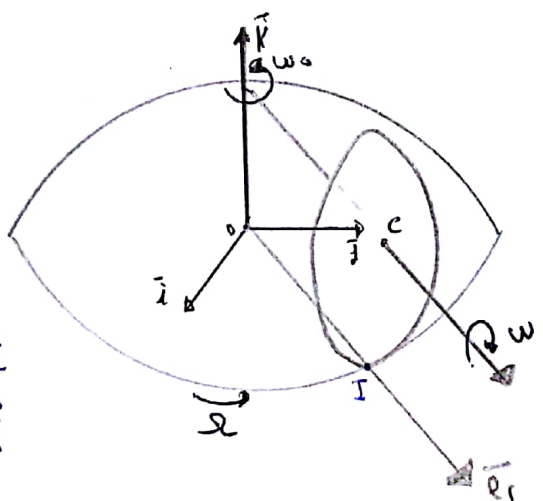
$\vec{V}_R(I \in S_1) = \vec{V}_R(I \in S_2)$

$\vec{V}_R(I \in S_1) = \vec{V}(C) + \vec{\omega}(S_1/R) \wedge \vec{CI}$

Or  $\vec{OC} = \vec{OI} + \vec{IC} = R \vec{e}_r + r \cdot \vec{k}$

$\vec{V}_R(I) = R \omega_0 \vec{e}_\theta$

$\vec{V}_R(I \in S_1) = R \omega_0 \vec{e}_\theta + \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \omega_0 - r \omega \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\text{et } \bar{V}_R(I \in S_2) = \bar{V}_R(0) + \Omega(S_2/R) + OI.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autors  $((Rw_0 - rw) + R\Omega)\bar{e}_0 = \bar{0}$

$$R(w_0 + \Omega) - rw = 0$$

$$R(w_0 + \Omega) - rw = 0$$





Mécanique du solide

Exercice 1

Déterminer la matrice d'inertie des solides suivants (en leur centre d'inertie et par rapport à la base principale d'inertie) :

- Barre de masse  $m$  et de longueur  $l$
- Carré de côté  $a$
- Sphère pleine de masse  $m$  et de rayon  $R$

Exercice 2

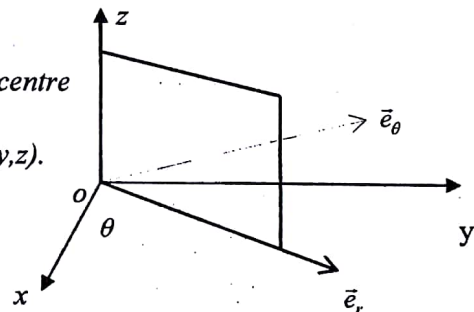
Déterminer le centre de masse des solides suivants

- Demi-sphère creuse, ( $\sigma = \text{const}$ )
- Demi-disque, ( $\sigma = \frac{r}{\cos \theta}$ )
- 

Exercice 3

Soit une plaque homogène (S) carré de côté  $a$ , d'épaisseur négligeable, de masse  $m$ . Par rapport à un référentiel  $R(Oxyz)$ , la plaque est en rotation autour de l'axe  $Oz$  coïncidant avec l'un de ses côtés. Le point  $O$  est l'un de ses sommets de la plaque (voir figure)

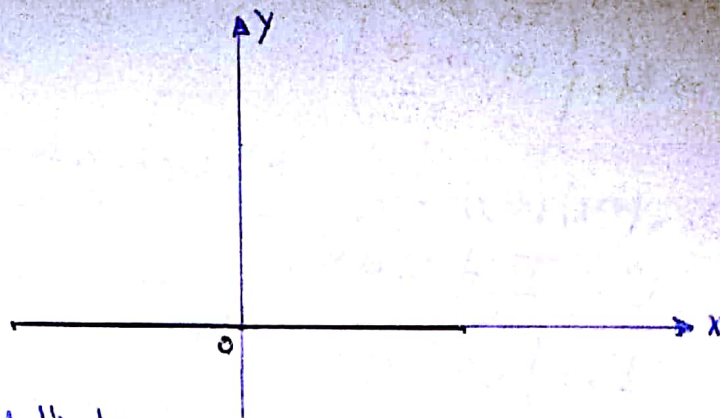
- Déterminer le centre d'inertie  $G$  de la plaque
- Déterminer la matrice d'inertie de la plaque en son centre d'inertie  $G$  par rapport au repère principal  $R_G(G, x, y, z)$ .
- Déterminer le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe  $OZ$
- Déterminer la quantité du mouvement de la plaque.
- Déterminer le moment cinétique de la plaque au point  $O$
- En déduire le moment dynamique de la plaque au point  $O$
- Déterminer l'énergie cinétique de la plaque.



TD2.

## Exercice I

a- barre de longueur  $l$ .



O est le Centre de symétrie.

Donc  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  repère principal d'inertie.

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \cdot dm = 0$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \cdot dm = \int x^2 \cdot dm = \lambda \int x^2 \cdot dx = \lambda \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{\lambda l^3}{12}$$

$$\text{Or } \lambda = \frac{m}{l} \Rightarrow I_{yy} = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

$$\text{De même } I_{zz} = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m \cdot l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m \cdot l^2}{12} \end{pmatrix} = \frac{m \cdot l^2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b- carré de côté  $a$ .

O, Centre de Symétrie.

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  repère Principal d'inertie.

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \cdot dm.$$

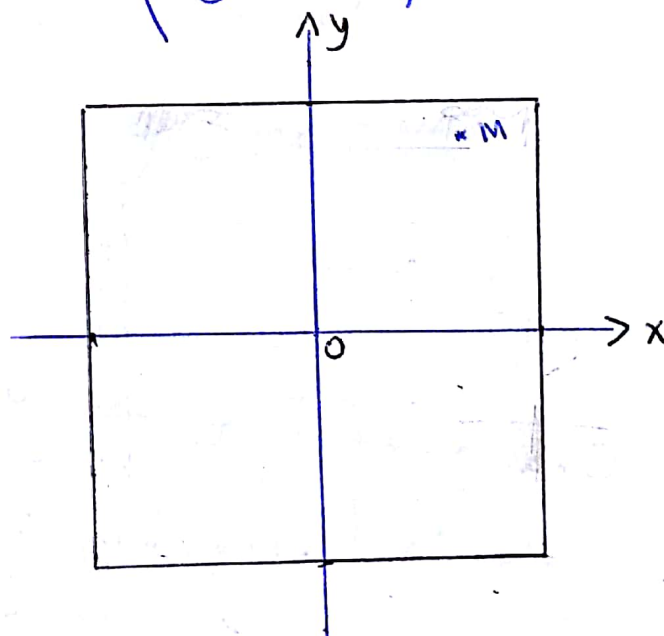
$$I_{xx} = \int y^2 \cdot dm = \sigma \int y^2 \cdot dx \cdot dy.$$

$$I_{xx} = \sigma \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} \cdot \left[ x \right]_{-a/2}^{a/2} = \sigma \left( \frac{a^3}{12} \right) \cdot a = \frac{m \cdot a^4}{12} = I_{yy}.$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \cdot dm = I_{xx} + I_{yy} = \frac{m \cdot a^4}{6}$$

$$\lambda = \frac{m \cdot a^2}{6}$$

$$\text{Donc } M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$





C - sphère pleine.

$R(0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  repère principal d'inertie.

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$O_n a(ox)(oy)(oz)$  jouent le même rôle  $\Rightarrow I_{ox} = I_{oy} = I_{oz}$ .

Or  $I_o = \int r^2 \cdot dm$ .

$$I_o = \int (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm$$

$$2I_o = \int (x^2 + y^2) \cdot dm + \int (y^2 + z^2) \cdot dm + \int (x^2 + z^2) \cdot dm$$

$$\Rightarrow 2I_o = 3 I_{ox} \Rightarrow I_{ox} = \frac{2}{3} \cdot I_o$$

Or  $I_o = \int r^2 \cdot dm = \int \rho \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

$$I_o = \rho \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$I_o = \rho \frac{R^5}{5} \cdot 4\pi \quad \text{Or } \rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Donc  $I_o = \frac{3M \cdot R^2}{5}$

Alors  $I_{ox} = I_{oy} = I_{oz} = \frac{2}{5} M \cdot R^2$

$$M_o = \frac{2}{5} M R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d-

$O_n a \quad \eta = 0 \Rightarrow I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

d'où  $M = \begin{pmatrix} I_{ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{oz} \end{pmatrix}$

Or  $I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dm = \int \sigma \cdot r^3 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot dr \cdot d\theta$

$$= \sigma \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi = \frac{\sigma R^4}{8} \quad \text{Or } \rho = \frac{4M}{\pi R^3}$$

d'où  $I_{xy} = \frac{M R^2}{2\pi}$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ dm = \sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \end{cases}$$

LIBRAIRIE ALOMRAHE

ANNEE .....



# Exercise II

$$a \quad \bar{\sigma}_G = \frac{1}{m} \int \bar{\sigma}_m dm.$$

On a (0, g) axe de symétrie  $\Rightarrow G \in (Oz)$ .

Donc  $X_G = Y_G = 0$

Donc  $B_G = \frac{1}{m} \int (y) dm, O_r B_G = \cos \theta R$

$$\Rightarrow B_G = \frac{1}{m} \int R \cos \theta dm, O_r dm = \lambda ds$$

$$dm = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$B_G = \frac{1}{m} \int R \cos \theta \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$B_G = \frac{\sigma}{m} \int_0^{\pi} R^3 \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi} \cdot \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{\sigma R^3 \pi}{m}$$

$$O_r \sigma = \frac{m}{S} = \frac{2m}{4\pi R^2} \Rightarrow B_G = \frac{R^3 \pi}{m} \cdot \frac{2m}{4\pi R^2} = R/2$$

$$B_G = R/2$$

$$b \quad \bar{\sigma}_G = \frac{1}{m} \int \bar{\sigma}_m dm.$$

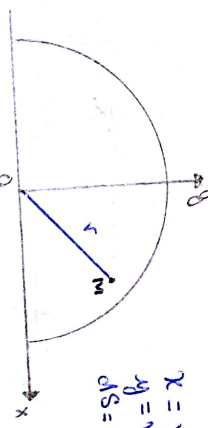
$$O_r B_G = 0 \Rightarrow B_G = 0$$

$$-X_G = \frac{1}{m} \int X dm = \frac{1}{m} \int r \cos \theta \cdot \frac{\sigma}{r} \cdot r dr d\theta$$

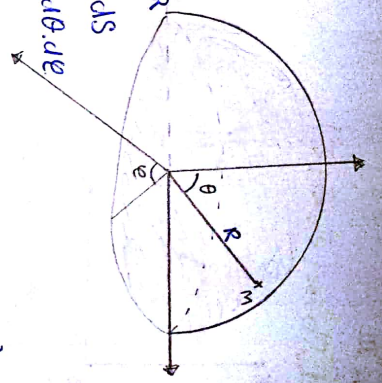
$$X_G = \frac{1}{m} \int r^3 dr d\theta = \frac{1}{m} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot \left[ \theta \right]_0^{\pi} = \frac{R^4 \pi}{4m}$$

$$-Y_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int r \sin \theta \cdot \frac{\sigma}{r} \cdot r dr d\theta$$

$$Y_G = \frac{1}{m} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot \left[ \sin \theta \right]_0^{\pi} = 0$$

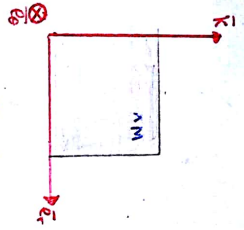


$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ ds &= r dr d\theta \end{aligned}$$



### Exercice III

Dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .



$$O_m a y_m = 0 \Rightarrow y_i = 0$$

$$\Rightarrow \vec{O_G} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad O_m a x_i = \frac{1}{m} \int x_i \cdot dm \quad / \quad dS = dx \cdot dy$$

$$x_i = \frac{1}{m} \int x \cdot dx \cdot dy = \frac{a}{m} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a \cdot [y]_0^a = \frac{a}{m} \left( \frac{a^2}{2} \right) \cdot a = \frac{a}{m} \cdot \frac{a^3}{2}$$

$$O_r \vec{e} = \frac{M}{S} = \frac{M}{a^2}$$

$$D_{axe} \quad X_G = \frac{a}{2}$$

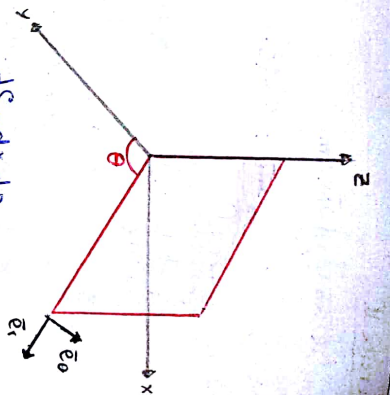
$$J_G = \frac{1}{m} \int y^2 \cdot dm = \frac{1}{m} \int y^2 \cdot \rho \cdot dx \cdot dy = \frac{\rho}{m} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^a \cdot [x]_0^a = \frac{\rho}{m} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$O_r \vec{e} = \frac{M}{S} = \frac{M}{a^2}$$

$$D_{axe} \quad X_G = \frac{a}{2} = Z_G$$

$$D_{axe} \quad \vec{O_G} = \frac{a}{2} \cdot \vec{e}_r + \frac{a}{2} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{O_G} = \frac{a}{2} (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_z) + \frac{a}{2} \vec{e}_z$$





$$b) M_G = \frac{m a^2}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

$$c) I_{Gz} = \bar{K} \cdot M_G \bar{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{m a^2}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{Gz} = \frac{m a^2}{\lambda^2}$$

$$d) \vec{P}_R(s) = m \vec{V}_R(s) = m \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{2} \cdot (\vec{e}_r + \vec{e}_z) \right) = \frac{a m}{2} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$e) \vec{\sigma}_{G/R} = \vec{\sigma}_{G/R} + m \vec{V}_R(s) \wedge \vec{G} \vec{O}$$

$$\text{at } O \text{ on } \vec{\sigma}_{G/R} = \vec{\sigma}_{G/R} + (\vec{G} \vec{O} \wedge \vec{V}_R(s))$$

$$\text{D'ore } \vec{\sigma}_{G/R} = M_G \vec{\omega} + m \vec{V}_R(s) \wedge \vec{G} \vec{O}$$

$$\vec{\sigma}_{G/R} = \frac{m a^2}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + m \frac{1}{2} \cdot \dot{\theta} \vec{e}_\theta \wedge \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ -a/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m a^2}{\lambda^2} \dot{\theta} \vec{K} + \frac{m a^2}{4} \dot{\theta} \vec{K} - \frac{m a^2}{4} \dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$\vec{\sigma}_{G/R} = \frac{m a^2}{3} \dot{\theta} \vec{K} - \frac{m a^2}{4} \dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$f) \vec{\sigma}_{G/R} = \frac{d \vec{\sigma}_G}{dt} + m \vec{V}_R(s) \wedge \vec{V}_R(s)$$

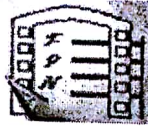
$$\vec{\sigma}_{G/R} = \frac{m a^2}{3} \dot{\theta} \vec{K} - \frac{m a^2}{4} \dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$g) \vec{T}_R = \vec{T}_{R_G} + \frac{1}{2} m \vec{V}_R^2(s) = \frac{1}{2} \lambda M_G \vec{\omega} + \frac{1}{2} m \vec{V}_R^2(s)$$

$$\vec{T}_R = \frac{1}{2} \dot{\theta} \vec{K} \left( \frac{m a^2}{4} \dot{\theta} \vec{K} - \frac{m a^2}{4} \dot{\theta} \vec{e}_r \right)$$

$$\vec{T}_R = \frac{m a^2}{6} \dot{\theta}^2$$

Mécanique



FACULTE PLURIDISCIPLINAIRE - NADOR

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

ANNEE : 2016-2017

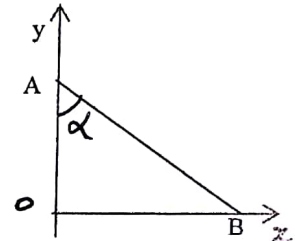
FILIERE : SMP3

SERIE : 3

**TD de Mécanique du Solide**

**Exercice 1** Une barre AB homogène de longueur  $2l$ , et de centre G, est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Les contacts en A et B sont supposés sans frottements.

- Déterminer la vitesse du point G.
- Déterminer le vecteur vitesse de rotation de la barre.
- Déterminer la matrice d'inertie de la tige dans son repère principal d'inertie.
- Déterminer le moment cinétique de la barre au point G.
- En déduire le moment cinétique de la barre au point A.
- Déterminer le moment dynamique de la barre au point G.
- Déterminer l'énergie cinétique de la barre.
- Déterminer l'équation du mouvement de la barre.



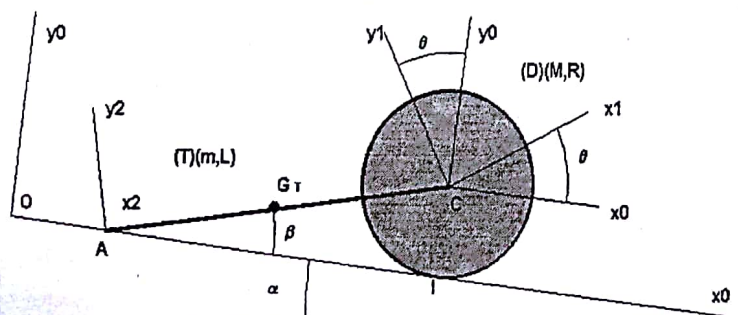
**Exercice 2** On considère un demi-disque S homogène de centre C, de centre de masse G de rayon  $r$  et de masse  $m$ . Tout en restant dans le plan vertical ( $xoy$ ), S roule sans glisser sur le plan horizontal ( $xoz$ ) et on désigne par I le point de contact entre le sol et S. On donne  $CG = \frac{4R}{3\pi}$  et  $I_{GZ} = \frac{1}{2}mR^2 - mb^2$

- Déterminer la vitesse du point G.
- Déterminer la matrice d'inertie de S dans sa base principale d'inertie.
- Déterminer le moment cinétique de S au point G.
- En déduire le moment cinétique de S au point C.
- Déterminer le moment dynamique de S au point G.
- Déterminer l'énergie cinétique de S.
- Déterminer l'équation du mouvement de S.

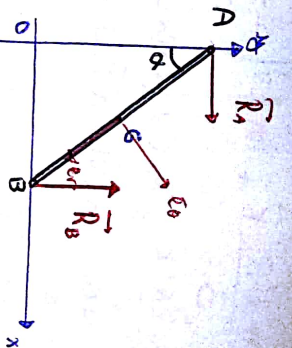
**Exercice 3** Soit un solide constitué d'une tige (T) liée à un disque (D). La tige (T) de masse  $m$  de longueur  $L$  est liée au disque (D) de masse  $M$  de rayon  $R$  en son centre C par une liaison pivot d'axe Cz. Ce solide se trouve posé sur un plan (P), incliné d'un angle fixe  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. L'extrémité A de la tige repose sur le plan. Nous supposons que le solide se déplace le long du plan incliné. Nous supposons qu'il y a roulement sans glissement en I entre le disque (D) et le plan (P). Soit le repère de référence lié au plan (P), soit un repère mobile lié à (D). Soit lié à la tige (T). On suppose que le mouvement de (T) est un mouvement de translation.

On note  $\vec{OC} = x(t)\vec{x}_0 + R\vec{y}_0$

- Donner la matrice d'inertie de la tige (T) au point GT.
- Calculer le moment cinétique de la tige au point GT.
- Calculer le moment dynamique de la tige au point C.
- Calculer l'énergie cinétique de la tige (T).
- Exprimer la condition de roulement sans glissement au point I.
- Calculer le moment cinétique du disque (D) au point C.
- Calculer l'énergie cinétique du disque (D).
- Déterminer l'équation du mouvement de (D).







$$\frac{d}{dt} \vec{OG} = \frac{d}{dt} (\vec{OB} + \vec{BG}) = \vec{v}_B + \vec{v}_G = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BG}$$

$$\vec{OG} = (l - l \sin \alpha) \vec{e}_x + l \cos \alpha \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{OG} &= (l - l \sin \alpha) \dot{\vec{e}}_x + l \dot{\vec{e}}_y \\ &= (l - l \sin \alpha) \dot{\alpha} \vec{e}_x - l \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_y \\ &= (l \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha} l \cos \alpha) \vec{e}_x - l \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_y \\ &= l \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_x - l \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_y \end{aligned}$$

b.

$$\vec{M}_G = \vec{V}(A) + \vec{R}(S/R) \wedge \vec{AG}$$

$$\text{ou } \vec{V}(G) = \vec{V}(A) + \vec{R}(S/R) \wedge \vec{AG}$$

$$\text{ou } \vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{R}(S/R) \wedge \vec{AB}$$

$$2l \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_x = -2l \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2l \sin \alpha \\ -2l \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2l \dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2l \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2l^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 2l^2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\alpha} = \alpha$$

$$\vec{R}(S/R) = \dot{\alpha} \vec{K}$$

c. On a (G) le Centre d'inertie de la barre [AB] Dans  $R(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  Repère.

Principe d'inertie.

$$M_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{m l^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.

$$\text{On a } \vec{G} \text{ fixe dans } R \text{ et } G \in S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{G}_G = M_G \vec{R} = \frac{m l^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}_G = \frac{m l^2 \alpha}{3} \vec{R}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad \vec{S}_c &= \vec{S}_c + m \vec{V}(G) \wedge \vec{G}\vec{A} \\
 &= \frac{m l^2 \ddot{\alpha}}{3} \vec{k} + m l \dot{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{m l^2 \ddot{\alpha}}{3} \vec{k} + m l \dot{\alpha} (\cos \alpha - \sin^2 \alpha) \vec{k} \\
 f) \quad \vec{S}_c &= \frac{d \vec{S}_c}{dt} + m \vec{V}(G) \wedge \vec{V}(C) = \frac{d \vec{S}_c}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \quad \vec{T}_R^S &= \frac{1}{2} \vec{J}_R \cdot \vec{\omega}_R + \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \frac{m l^2 \ddot{\alpha}}{3} + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2
 \end{aligned}$$

$$T_R^S = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\alpha}^2$$

$$\begin{aligned}
 h) \quad D_{aprv} P F D^T &= O_{m \times 2} \quad [S] = [F^e] \\
 [S]: \quad \vec{S}_c &= [F] \quad \vec{M}_c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i) \quad m \vec{V}(G) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + m l \dot{\alpha}^2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = m \vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B \\
 \Rightarrow m l \ddot{\alpha} \cos \alpha - m l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \vec{i} &= \vec{0} + R_A \vec{i} + \vec{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (-m l \ddot{\alpha} \sin \alpha - m l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \vec{j} = -m g \vec{j} + R_B \vec{j} \\ [m l \ddot{\alpha} \cos \alpha - m l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha = R_A] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [m l \ddot{\alpha} \sin \alpha + m l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha = m g - R_B] \\ [m l \ddot{\alpha} \cos \alpha - m l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha = R_A] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{S}_c &= \vec{M}_c \Rightarrow \frac{m l^2 \ddot{\alpha}}{3} \vec{k} = \vec{M}_c(\vec{m} \vec{g}) + M_c(\vec{R}_A) + M_c(\vec{R}_B) \\
 \Rightarrow \frac{m l^2 \ddot{\alpha}}{3} \vec{k} &= \vec{0} + \frac{3}{2} R_A \wedge \vec{R}_A + \vec{G} \vec{B} \wedge \vec{R}_B \\
 &= \begin{pmatrix} -l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \sin \alpha \\ -l \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m l^2 \ddot{\alpha}}{3} \vec{k} &= -l R_A \cos \alpha \vec{k} + l R_B \sin \alpha \vec{k} \\
 \frac{m l \ddot{\alpha}}{3} &= -R_A \cos \alpha + R_B \sin \alpha
 \end{aligned}$$



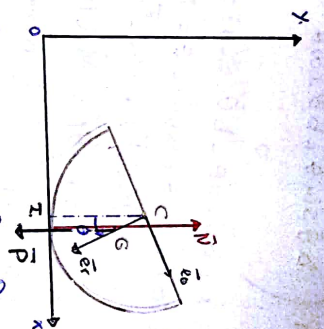
## Exercice II

a)  $\vec{OG} = \vec{OR} + \vec{CG}$

$= R\vec{i} + R\vec{j} + (-b \cos \theta + b \sin \theta \vec{i})$

$\vec{OG} = \begin{pmatrix} R + b \sin \theta \\ R - b \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} / (I, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{N}(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{R} + b\dot{\theta} \sin \theta \\ b\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} / (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



b) On a (G) le centre de masse de (S) Donc  $R_G(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  Régne Principale d'inertie.

$M_G = \begin{pmatrix} I_{Gxx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gyy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gzz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Gxx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gxx} - I_{Gyy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gzz} \end{pmatrix}$

c)  $\vec{S}_G^{(S)} = M_G \vec{\pi}$   
 $= \begin{pmatrix} I_{Gxx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gyy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gzz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = I_{Gzz} \dot{\theta} \vec{k} = \left( \frac{1}{2} m R^2 - m b^2 \right) \dot{\theta} \vec{k}$

d) On a  $\vec{S}^{(S)}$  soit une Champ d'inertie.  
 Donc  $\vec{S}_C = \vec{S}_G + m \vec{V}(G) \wedge \vec{GC}$   
 $\vec{S}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m R^2 - m b^2 \end{pmatrix} \dot{\theta} \vec{k} + m \begin{pmatrix} \dot{R} + b\dot{\theta} \sin \theta \\ b\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -b \sin \theta \\ b \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \left( \frac{1}{2} m R^2 - m b^2 \right) \dot{\theta} \vec{k} + m b \cos \theta (\dot{R} + b\dot{\theta} \sin \theta) \vec{k} + m b^2 \dot{\theta} \sin \theta \vec{k}$   
 $\vec{S}_C = \left[ \left( \frac{1}{2} m R^2 - m b^2 \right) \dot{\theta} + m b^2 \dot{\theta} + m b \cos \theta \dot{R} \right] \vec{k}$

e) On a  $\vec{S}_C = \frac{d\vec{S}_C}{dt} + m \vec{V}(G) \wedge \vec{V}(G)$   
 $= \left( \frac{1}{2} m R^2 - m b^2 \right) \ddot{\theta} \vec{k}$

f)  $T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot M_G \vec{\omega} + \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G)$   
 $= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{Gzz} + \frac{1}{2} m \left[ (\dot{R} + b\dot{\theta} \sin \theta)^2 + b^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right]$   
 $= \frac{1}{2} I_{Gzz} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[ \dot{R}^2 + 2\dot{R}b\dot{\theta} \sin \theta + b^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right]$

g) PFD  $\Rightarrow [S] = [F^e]$

h)  $\vec{S}_G = \vec{M}_G(\vec{F})$

$$1 \Rightarrow m \begin{pmatrix} \ddot{x} + b\ddot{\theta} \cos \theta - b\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ b\ddot{\theta} \sin \theta + b\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg + N \\ 0 \end{pmatrix}$$

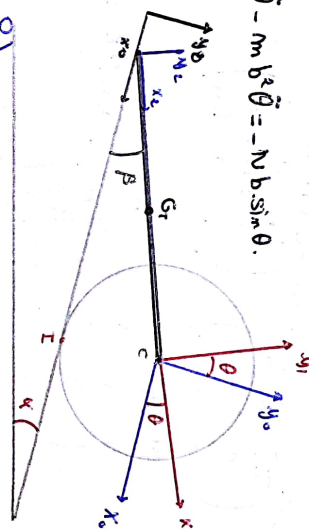
$$\begin{cases} \ddot{x} + b\ddot{\theta} \cos \theta - b\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \\ m b \ddot{\theta} \sin \theta + m b \dot{\theta}^2 \cos \theta = N - mg \end{cases}$$

$$\ddot{S}_c = \ddot{M}_c(\vec{P}) + M_c(\vec{N})$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{2} m R^2 - m b^2 \right) \ddot{\theta} \vec{k} = \ddot{M}_c(\vec{P}) + \ddot{M}_c(\vec{N}) = \vec{G}_c \wedge m \vec{g} + \vec{G}_I \wedge \vec{N}$$

$$\vec{G}_c = -N b \sin \theta \vec{k}$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} - m b^2 \ddot{\theta} = -N b \sin \theta$$



### Exercice III

$$a) M_c = \frac{m L^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k})$$

$$b) \vec{S}_c' = M_c \ddot{\alpha}(\vec{TIR}) = \vec{0} \quad \text{car } \ddot{\alpha}(\vec{TIR}) = 0$$

$$c) \vec{S}_c = \vec{S}_c + m \vec{r}(G) \wedge \vec{G}_c = m \vec{r}(G) \wedge \vec{G}_c$$

$$\vec{O}_G = \vec{O}_C + \vec{CO} = x \vec{i}_0 + R \vec{j}_0 - y_2 \vec{i}_2 \quad \text{Or } \vec{i}_2 = |\vec{i}_2| \cos \beta \vec{i}_0 + |\vec{i}_2| \sin \beta \vec{j}_0$$

$$= \cos \beta \vec{i}_0 + \sin \beta \vec{j}_0$$

$$\text{Donc } \vec{O}_G = \begin{pmatrix} x - y_2 \cos \beta \\ R - y_2 \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} (i_0, j_0, k)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(G) = \frac{d^2 \vec{O}_G}{dt^2} = \ddot{x} \vec{i}_0$$

$$\vec{S}_{c/G} = m \ddot{x} \vec{i}_0 \wedge (y_2 \cos \beta \vec{i}_0 + y_2 \sin \beta \vec{j}_0)$$

$$\vec{S}_{c/G} = \frac{m \ddot{x} L \sin \beta}{2} \vec{k}$$



$$d) \vec{T}_R = \frac{1}{2} \vec{\omega} (T/R) \cdot M_0 \vec{r} + \frac{1}{2} m \vec{v}_0^2 \quad \text{or } \vec{\omega} (T/R) = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \vec{T} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$$e) 0 \text{ m}^2 \text{ Rotation du disque sans glissement } \vec{V}_G(D/\rho_{\text{ice}}) = \vec{0}$$

$$\vec{V}_R(I \in D) - \vec{V}_R(I \in P) = \vec{0}$$

$$-\vec{V}_R(I \in P) = \vec{0} \quad \text{car P fixe de } R_0$$

$$-\vec{V}_R(I \in D) = \vec{V}(C) + \vec{\omega} (D/R) \wedge \vec{CI} = \vec{0}$$

$$= \dot{x} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge (-R \vec{j}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \dot{x} + R \dot{\theta} = 0$$

$$f) \vec{\sigma}_c = M_c \vec{\omega} (D/R) = \frac{m R^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_c = \frac{m R^2}{2} \dot{\theta} \vec{k}$$

$$g) \vec{T}_R^D = \frac{1}{2} \vec{\omega} (D/R) M_c \vec{r} + \frac{1}{2} m \vec{V}_R(C)$$

$$= \frac{1}{2} I_{CG} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$\vec{T}_R^D = \frac{M R^2 \dot{\theta}^2}{4} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$h) \text{ Degrés de Liberté, } [S] = [F^q]$$

$$w) m \vec{r}_R(\vec{F}) = \vec{F}^*$$

$$e) \begin{cases} \vec{\sigma}_c = M_c(\vec{F}^q) \end{cases}$$

$$w) m \ddot{x} \vec{i} = -m g \cos \alpha \vec{j}_0 + m g \sin \alpha \vec{i}_0 + N \vec{j}_0 - f \vec{i}_0$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = m g \sin \alpha - f \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -m g \cos \alpha + N \end{cases}$$

$$(2) : \vec{\sigma}_c = \frac{d \vec{\sigma}_c}{dt} + m \vec{V}(C) \wedge \vec{V}(C) = \frac{m R^2}{2} \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\text{d'au } \frac{M R^2}{2} \ddot{\theta} \vec{k} = M_c(\ddot{m} g) + M_c(\ddot{R}_0) + M_c(\ddot{f})$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + (-R \vec{j}_0) \wedge (-f \vec{i}_0)$$

$$\frac{m R^2 \ddot{\theta}}{2} = -R f$$

$$\frac{M R}{2} \ddot{\theta} = -f$$

Rechercher

<https://sites.google.com/site/saborpcmath/>

Mécanique du solide

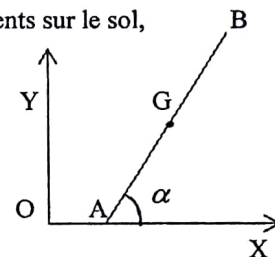
Exercice 1

Une tige AB, de centre G et de longueur  $2L$ , est posée sur le sol, verticalement sans vitesse initiale. Sous l'action d'un léger déséquilibre,

elle tombe (voir Fig.). En supposant que l'extrémité A glisse sans frottements sur le sol,

On donne  $\vec{OA} = x\vec{i}$  et  $I_{GZ} = \frac{1}{3}mL^2$

- Calculer la vitesse du point G
- Calculer le moment cinétique de la tige au point A
- En déduire le moment cinétique de la tige au point A
- Calculer l'énergie cinétique de la tige
- Déterminer l'équation du mouvement de la tige



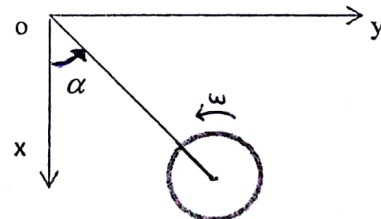
Exercice 2

Une tige homogène de longueur  $L$  et de masse  $m$  peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal (oz). A l'autre extrémité de la tige est fixé, en son centre, un disque homogène, de masse  $M$  et de rayon  $R$ . Ce disque peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal passant par son centre

d'inertie G. le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe de rotation est  $J_1 = \frac{1}{3}mL^2$ , alors que

celui du disque par rapport à son axe est  $J_2 = \frac{1}{2}MR^2$ . Les liaisons sont supposées parfaites.

- Déterminer l'énergie potentielle du système (tige + disque)
- Déterminer l'énergie cinétique du système
- Déterminer l'équation du mouvement
- En déduire la période des oscillations de petites amplitudes du système



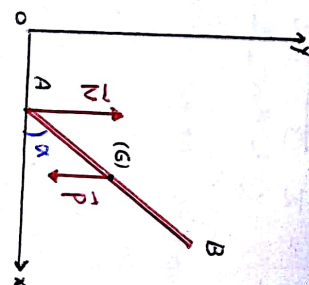
## Exercice I

a)  $O_m A \quad \vec{OG} = \vec{OA} + A\vec{G}$   
 $\vec{OG} = r\vec{i} + L\vec{j}$

$$= (r + L \cos \alpha)\vec{i} + (L \sin \alpha)\vec{j}$$

$$\vec{V}(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt} = (\dot{r} - \dot{\alpha}L \sin \alpha)\vec{i} + (\dot{\alpha}L \cos \alpha)\vec{j}$$

$$\vec{V}(G) = \begin{pmatrix} \dot{r} - L\dot{\alpha} \sin \alpha \\ L\dot{\alpha} \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_r)$$



b)

Le moment cinétique est quelque chose d'abstrait. Donc:

$$\vec{S}_A = \vec{S}_G + m\vec{V}(G) \wedge \vec{GA}$$

$$= M_G \vec{\Omega}(T/R) + m \begin{pmatrix} \dot{r} - L\dot{\alpha} \sin \alpha \\ L\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L \cos \alpha \\ -L \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega}(T/R) = ?$$

$$O_m A \quad \vec{V}(A) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega}(T/R) \wedge \vec{GA}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{r} - L\dot{\alpha} \sin \alpha \\ L\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L \cos \alpha \\ -L \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L\dot{\alpha} \sin \alpha \\ -L\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\Omega \sin \alpha \\ -L\Omega \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega = \dot{\alpha}$$

$$\text{Donc } \vec{\Omega}(T/R) = \dot{\alpha} \vec{k}$$

$$\text{Donc } \vec{S}_A = \frac{mL^2 \dot{\alpha}}{3} \vec{k} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \sin \alpha (\dot{r} - L\dot{\alpha} \sin \alpha) + L^2 \dot{\alpha} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{S}_A = \left[ \frac{1}{3} mL^2 \dot{\alpha} - mL \dot{r} \sin \alpha \right] \vec{k}$$

d)  $O_m A \quad \vec{S}_A = \frac{d\vec{S}_A}{dt} + m\vec{V}(A) \wedge \vec{V}(G)$

$$\vec{S}_A = \left( \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\alpha} - mL \ddot{r} \sin \alpha - mL \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \right) \vec{k} + m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} - L\dot{\alpha} \sin \alpha \\ L\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[ \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\alpha} - mL \ddot{r} \sin \alpha - mL \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \right] \vec{k} + mL \dot{r} \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{k}$$

$$\vec{S}_A = \left( \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\alpha} - mL \dot{r} \dot{\alpha} \sin \alpha \right) \vec{k}$$



$$d) \quad T_R^T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot M_G \bar{\omega} (T/R) + \frac{1}{2} m \bar{V}_R^T(G)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\alpha} m l^2}{3} + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2 - 2 l \dot{x} \dot{\alpha} \sin \alpha)$$

$$T_R^T = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - 2 l \dot{x} \dot{\alpha} \sin \alpha)$$

e) On applique le principe fondamental de la dynamique.  $[S] = [F^e]$

$$(1) \quad \begin{bmatrix} m \ddot{x}(G) \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^e \\ \vec{M}_G(F^e) \end{bmatrix}$$

$$2: \Rightarrow \quad m \begin{pmatrix} \ddot{x} - l \ddot{\alpha} \sin \alpha - l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ l \ddot{\alpha} \cos \alpha - l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m g + N \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} - l \ddot{\alpha} \sin \alpha - l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha = 0$$

$$m l \ddot{\alpha} \cos \alpha - m l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha = -m g + N$$

$$2: \Rightarrow \quad \left[ \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\alpha} - m l \dot{x} \sin \alpha \right] \vec{k} = \vec{M}_G(\vec{m}g) + M_G(\vec{N})$$

$$= A_G \wedge (m g l \cdot \vec{j})$$

$$= \begin{pmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\alpha} - m l \dot{x} \sin \alpha = -l m g \cos \alpha$$

a)  $E_p = E_p(T) + E_p(D)$

On sait que  $\vec{F}_e = -\vec{\nabla} E_p \Rightarrow E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$E_p(T) = \int \vec{p} \cdot d\vec{\theta} = -m g \cdot \vec{i} \cdot \vec{O} \vec{C} = -m g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} L \cos \alpha \\ \frac{1}{2} L \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{m g L \cos \alpha}{2}$

$E_p(T) = -\frac{m g L \cos \alpha}{2}$

et  $O \rightarrow A$   $E_p(D) = -\int \vec{p} \cdot d\vec{OC}$

$E_p(D) = -M g \cdot \vec{i} \cdot \vec{O} \vec{C}$

$E_p(D) = -M g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_p(D) = -M g L \cos \alpha$

$E_p = -\left(\frac{m g L}{2} \cos \alpha + M g L \cos \alpha\right)$

$E_p = -g L \cos \alpha \left(\frac{m}{2} + M\right)$

b)  $O \rightarrow C$   $E_c = E_c(T) + E_c(D)$

$E_c(T) = \frac{1}{2} \vec{v}(T/R) \cdot M_C \vec{v}(T/R) + \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2$

$= \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 J_1 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\alpha}^2$

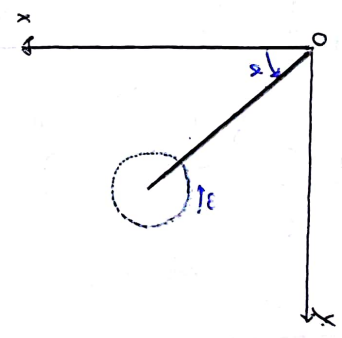
$E_c(T) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \frac{m L^2}{12} + \frac{m L^2 \dot{\alpha}^2}{4} = \frac{m L^2 \dot{\alpha}^2}{6}$

$E_c(D) = \frac{1}{2} \vec{v}(D/R) \cdot M_C \vec{v}(D/R) + \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2$

$= \frac{1}{2} \omega^2 J_2 + \frac{1}{2} M L^2 \dot{\alpha}^2$

$E_c(D) = \frac{\omega^2 M R^2}{4} + \frac{1}{2} M L^2 \dot{\alpha}^2$

$E_c = \frac{m L^2 \dot{\alpha}^2}{6} + \frac{M L^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{M R^2 \omega^2}{4}$



$$c) \quad 0_{na} \quad K_m = K_p + K_c$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{mL^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{ML^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{MR^2 \omega^2}{4} - \frac{mgh \cos \alpha}{2} - \frac{Mg \cdot L \cos \alpha}{2}$$

Comme le système est conservatif. Alors  $E_m = Cte$ .

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{mL^2 \ddot{\alpha}}{2} + ML^2 \ddot{\alpha} + \frac{MR^2 \omega \dot{\omega}}{2} + \frac{mgh \cdot L \dot{\alpha} \sin \alpha}{2} + Mg \cdot L \dot{\alpha} \sin \alpha$$

$$d) \quad \text{si } \omega = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$$

et  $\sin \alpha \sim \alpha$

$$\text{Donc } \left[ \frac{mL^2}{3} + ML \right] \ddot{\alpha} + \left( \frac{mgh \cdot L}{2} + Mgl \right) \alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\frac{mgh \cdot L}{2} + 2Mgl}{\frac{mL^2}{3} + 3ML} = \frac{mgh + 2Mgl}{mL^2 + 3ML} \cdot \left( \frac{3}{2} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{3gl(m+2M)}{2L(mL+3M)} = \frac{3g(m+2M)}{2(mL+3M)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(m+2M)}{2(mL+3M)}}^{-1/2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left( \frac{2(mL+3M)}{3g(m+2M)} \right)^{1/2}$$

$$\rightarrow e) \quad \text{Déterminer que } \omega = cte.$$

$$\text{D'après DFD On a } \vec{S}_c = M_c(\vec{F}^i)$$

$$\vec{S}_c = \frac{dM_c \vec{r}(D/R)}{dt} = \frac{1}{4} \left( \frac{mR^2 \dot{\omega}}{R} \right) = \frac{mR^2 \dot{\omega}}{4} \vec{k}$$

$$M_c(\vec{F}^i) = M_c(\vec{m}g) + M_c(\vec{T}) = 0$$

$$\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = cte.$$