

## أسئلة مفيدة في الرياضيات للأولمبياد الوطني

١ - أراد فلاح حرث أرض زراعية . حرث نصفها في اليوم الأول ، وثالث ما بقي منها في اليوم الثاني ، وربع ما بقي منها في اليوم الثالث ، وخمس الباقي في اليوم الرابع . ما هو الكسر الدال على ما بقي من الأرض دون حراثة ؟

- A)  $\frac{1}{5}$       B)  $\frac{1}{6}$       C)  $\frac{1}{10}$       D)  $\frac{1}{12}$       E)  $\frac{1}{15}$

٢ - مجموعة  $X$  مؤلفة من شبان وفتيات ، غادر هذه المجموعة خمس عشر فتاة فبقي في المجموعة شبان مقابل كل فتاة ، ثم غادر خمسة وأربعون شاباً فصار كل شاب في المجموعة الأخيرة يقابل خمس فتيات . كم عدد الفتيات في المجموعة  $X$  ؟

- A) 25      B) 30      C) 35      D) 40      E) 45

٣- خزان ماء مليء ، استهلك منه ٣٠% من مخزونه فبقي في الخزان ٣٠ ليتر أكثر من ٣٠% من مخزونه. إن سعة الخزان:

- A) 60      B) 75      C) 90      D) 105      E) 120

٤- إذا كانت  $a, b, c$  ثلاثة أعداد حقيقية تحقق  $a < b < c$  . أي من المتراجحات التالية التي لا يمكن أن تكون محققة ؟

- A)  $a^2 < b^2 < c^2$       B)  $b^2 < c^2 < a^2$       C)  $b^2 < a^2 < c^2$       D)  $a^2 < c^2 < b^2$       E)  $c^2 < b^2 < a^2$

٥- إن حل المعادلة  $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2009}$  هو

- A) 667      B) 669      C) 1004      D) 1005      E) 2002

٦ - كم عدداً من بين الأعداد 11, 7, 5, 3, 2 يقسم العدد  $41^4 - 371^4$  .

- A) one      B) two      C) three      D) four      E) five

٧ - يريد طالب صنع مجسم ورقي منتظم وجهه مخمس فإن عدد الوجوه اللازمة :

- A) 10      B) 11      C) 12      D) 15      E) لا يوجد مجسم منتظم وجهه مخمس

٨ - فريق كرة سلة مؤلف من ثمانية لاعبين متوسط أطوالهم ٢٠١ cm ما هو أكبر عدد ممكن للاعبين الذين طول كل منهم أقل من ١٩٨ cm .

- A) 1      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

٩ -  $ABCD$  مربع مساحته ١ . لتكن  $P, Q$  منتصفين كل من الضلعين  $AD, AB$  على الترتيب ، ولتكن  $O$  نقطة تقاطع  $AC$  مع  $PQ$  . إن مساحة المثلث  $AQO$  تساوي :

- A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{8}$       C)  $\frac{1}{16}$       D)  $\frac{1}{18}$       E)  $\frac{1}{20}$

١٠ -  $ABC$  مثلث .  $D$  نقطة تلاقي منصف الزاوية  $\hat{A}$  مع الضلع  $BC$  . إذا كان  $DC = 1$  ،  $AC = BD = 2$  فإن  $\cos \hat{ABC}$  يساوي :

- A)  $\frac{3}{8}$       B)  $\frac{4}{8}$       C)  $\frac{5}{8}$       D)  $\frac{6}{8}$       E)  $\frac{7}{8}$

١١- إن الأعداد الخمس  $\frac{5}{33}$  ,  $\frac{17}{101}$  ,  $\frac{13}{97}$  ,  $\frac{1}{7}$  ,  $0.16$  تُحقق واحدة فقط من المتراجحات الآتية ، ما هي :

- A)  $0.16 < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < \frac{5}{33}$   
 B)  $\frac{17}{101} < 0.16 < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < \frac{13}{97}$   
 C)  $\frac{5}{33} < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < 0.16$   
 D)  $\frac{1}{7} < 0.16 < \frac{5}{33} < \frac{17}{101} < \frac{13}{97}$   
 E)  $\frac{13}{97} < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < 0.16 < \frac{17}{101}$

١٢- إذا كان  $x + \frac{1}{x} = 5$  فإن العدد  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  يساوي :

- A) 105      B) 110      C) 115      D) 120      E) 125

١٣- من أجل كل عددين صحيحين  $a, b$  نعرف العدد  $a \Theta b$  بحيث يكون

$$a \Theta a = a + 2 \quad ; \quad a \Theta b = b \Theta a \quad ; \quad \frac{a \Theta (a+b)}{a \Theta b} = \frac{a+b}{b}$$

فإن العدد  $5 \Theta 3$  يساوي :

- A) 45      B) 50      C) 55      D) 60      E) 65

١٤- إذا كان  $a, b$  جذرين حقيقيين للمعادلة  $x^2 - x - 2009 = 0$  فإن العدد  $a^2 + 2b^2 - b + 2ab$  يساوي :

- A) 2009      B) -2009      C) 2008      D) -2008      E) 2010

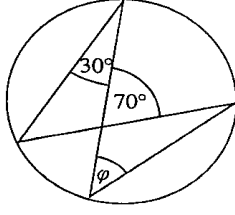
١٥- بفرض أن  $a, b, c$  ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة مثلى تحقق  $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2009$  فإن العدد  $c^2(a+b)$  يساوي :

- A) 2009      B)  $(2009)^2$       C)  $(2009)^3$       D) 4018      E) 1005

١٦-  $ABC$  مثلث . لتكن  $D$  نقطة على الضلع  $AB$  بحيث  $AD = \frac{1}{3}AB$  ، ولتكن  $E$  نقطة على الضلع  $AC$  بحيث

$AE = \frac{1}{3}AC$  . إذا علمت أن مساحة المثلث  $ADE$  تساوي ٥ فإن مساحة الرباعي  $BCED$  تساوي :

- A) 30      B) 35      C) 40      D) 45      E) 50

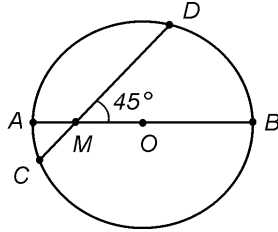


١٧ - أمعن النظر في الشكل المجاور .  
إن قياس الزاوية  $\varphi$

- A)  $35^\circ$       B)  $40^\circ$       C)  $45^\circ$       D)  $50^\circ$       E)  $55^\circ$

١٨ -  $ABCD$  مربع طول ضلعه يساوي ٣. لتكن  $E$  نقطة على الضلع  $AB$  بحيث  $AE = 1$  ، ولتكن  $H$  نقطة تقاطع  $AC$  مع  $DE$  . عندئذ مساحة المثلث  $CDH$  تساوي :

- A) 1      B)  $\frac{9}{8}$       C) 2      D)  $\frac{21}{8}$       E)  $\frac{27}{8}$



١٩ - أمعن النظر في الشكل المجاور حيث  $O$  مركز دائرة نصف قطرها ١  
إن  $CM^2 + DM^2$  يساوي :

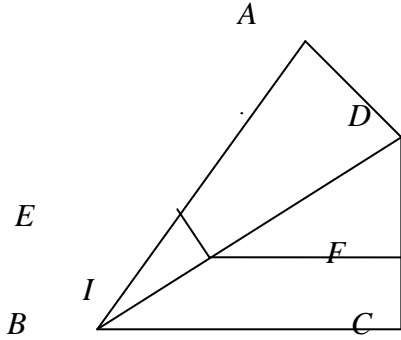
- A) 1.5      B) 2      C)  $\frac{9}{4}$       D) 3      E) إن المعطيات غير كافية

٢٠ -  $ABCD$  شبه منحرف فيه  $AB \parallel CD$  مساحته تساوي ١ ، فيه  $AB = 2CD$  . لتكن  $L, K$  منتصفي الضلعين  $BC, CD$  على الترتيب . إن مساحة المثلث  $AKL$  تساوي :

- A)  $\frac{1}{6}$       B)  $\frac{1}{5}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{5}{12}$       E)  $\frac{7}{12}$

٢١ -  $ABCD$  شبه منحرف متساوي الساقين فيه  $AB \parallel DC$  . لتكن  $O$  نقطة تقاطع القطرين تحقق  $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{3}$  إذا علمت أن مساحة المثلث  $BOC$  تساوي ١٥ فإن مساحة شبه المنحرف  $ABCD$  تساوي :

- A) 55      B) 60      C) 65      D) 80      E) 90



٢٢ - في الشكل المجاور  $DA \perp BA$  ،  $BC \perp CD$   
 $IF \parallel BC$  ،  $IE \parallel DA$   
 إن  $\frac{IF}{BC} + \frac{IE}{AD}$  تساوي

- A)  $\frac{1}{2}$       B) 1      C)  $\frac{3}{2}$       D) 2      E) المطيات غير كافية  
 ٢٣ -  $ABCD$  مستطيل مساحته تساوي ١. لتكن  $P, Q, R, S$  منتصفات الأضلاع  $AB, BC, CD, DA$  على الترتيب ، ولتكن  $T$  منتصف  $RS$  . إن مساحة المثلث  $PQT$  تساوي :  
 A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{2}{5}$       C)  $\frac{5}{16}$       D)  $\frac{3}{8}$       E)  $\frac{1}{3}$

٢٤ - كم عدداً أولياً أقل من ٢٠٠١ بحيث يكون مجموع أرقامه يساوي ٢ ؟  
 A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) أكثر من أربعة أعداد

٢٥ - إذا كانت  $a, b, c$  ثلاثة أعداد حقيقية تحقق  $b + 3c \geq 5$  ;  $a + 2b \geq 3$  . إن أصغر قيمة ممكنة للعدد  $a + b + c$  تساوي :

- A)  $\frac{4}{3}$       B)  $\frac{5}{3}$       C) 2      D)  $\frac{7}{3}$       E)  $\frac{8}{3}$

٢٦ - إذا كانت  $a, b, c$  ثلاثة أعداد حقيقية تحقق  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$  ;  $a + b + c = 7$  . إن العدد

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$  يساوي :

- A)  $\frac{19}{10}$       B)  $\frac{17}{10}$       C)  $\frac{9}{7}$       D)  $\frac{3}{2}$       E)  $\frac{10}{9}$

٢٧ - بفرض  $m$  عدد مكون من ٢٠٠٧ أرقام ( منزلة ) كل رقم من أرقامه هو العدد ١ أي أن  $m = 111.....11111$  .  
 إن مجموع أرقام منازل العدد  $m$  ٢٠٠٧ يساوي :

- A) 2007      B) 18036      C) 18063      D) 18048      E) 18084

٢٨ - عدد الثنائيات الصحيحة الموجبة  $(a, b)$  التي تحقق الشرطين  $a + \frac{1}{b} = 13(b + \frac{1}{a})$  و  $a + b < 100$  يساوي :

- A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

٢٩ - بفرض  $k > 2$  عدد طبيعي . إن عدد الثنائيات  $(a, b)$  التي تحقق  $a^2 + b^2 = k ab$  (حيث  $a, b$  أعداد طبيعية) هو :  
 عدد غير منته  $E)$  يتعلق بالعدد  $k$   $D)$  0  $C)$  1  $B)$  4  $A)$  4

٣٠ - بفرض  $a, b, c, d$  جذور حقيقية للمعادلة  $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1$  . إن العدد  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$  يساوي :

- A) 1      B) -2      C) -7      D) 2      E)  $\frac{7}{2}$

٣١ -  $ABCD$  مربع طول ضلعه يساوي 3 . لتكن  $E, F$  نقطتان داخل المربع  $ABCD$  ( $F$  الأقرب إلى الضلع  $BC$ ) بحيث  $EF \parallel AB$  و  $EF = 1$  . عندئذ مساحة السداسي  $ABFCDE$  تساوي :

- A) 3      B) 4      C) 5      D) 6      E) 7

٣٢ -  $ABCD$  متوازي الأضلاع فيه  $AD = 6$  ,  $AB = 8$  . يصنع قطراه زاوية قياسها  $60^\circ$  . إن مساحة متوازي الأضلاع  $ABCD$  تساوي :

- A) 12      B)  $12\sqrt{3}$       C) 14      D)  $14\sqrt{3}$       E) المعطيات غير كافية

٣٣ -  $ABC$  مثلث فيه  $AB = 2$  ,  $BC = \sqrt{3}$  وقياس الزاوية  $ABC$  يساوي  $150^\circ$  . ولتكن  $P$  نقطة في مستوي المثلث بحيث  $\hat{BPC} = 120^\circ$  ,  $\hat{APB} = 45^\circ$  . إن طول  $BP$  يساوي :

- A) 2      B)  $\sqrt{3}$       C)  $\sqrt{2}$       D) 3      E)  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

٣٤ - بفرض  $x, y, z$  ثلاثة أعداد حقيقية تحقق  $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = \frac{3}{2}$  فإن العدد

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$$

يساوي :

- A)  $\frac{3}{2}$       B)  $\frac{9}{4}$       C) 3      D)  $\frac{5}{2}$       E) 4

٣٥ - لتكن  $a_0, a_1, a_2, \dots$  متتالية عددية بحيث :

$$a_0 = 19, \quad a_1 = 25, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad n \geq 0$$

إن أصغر دليل  $i > 0$  من أجله يكون  $a_i$  من مضاعفات العدد ١٩ هو :

- A) 19                      B) 38                      C) 47                      D) 66                      E) 85

٣٦ - ليكن  $x, y$  عددين حقيقيين يحققان  $\frac{x+22}{y} + \frac{290}{xy} = \frac{26-y}{x}$  . إن العدد  $xy$  يساوي :

- A) 143                      B) -143                      C) 125                      D) 25                      E) 9

٣٧ - ليكن  $x, y$  عددين صحيحين غير سالبين بحيث  $69x + 54y \leq 2008$  . إن أكبر قيمة ممكنة للعدد  $xy$  هي :

- A) 270                      B) 280                      C) 290                      D) 300                      E) 310

٣٨ - بفرض  $n$  عدد صحيح موجب بحيث  $n^6 + 206$  يقبل القسمة على  $n^2 + 2$  . إن مجموع كل القيم الممكنة للأعداد  $n$  يساوي :

- A) 24                      B) 28                      C) 30                      D) 32                      E) 34

٣٩ - بفرض  $a, b, c$  ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة مثلى بحيث كل من الأعداد  $a+b, b+c, c+a$  هو مربع كامل . إن أصغر قيمة ممكنة للعدد  $a+b+c$  هي :

- A) 40                      B) 50                      C) 55                      D) 50                      E) 65

٤٠ - بفرض  $n, m$  عدنان صحيحان موجبان بحيث  $\frac{72}{487} < \frac{n}{m} < \frac{18}{121}$  . إن أصغر قيمة ممكنة للعدد  $m$  هي :

- A) 72                      B) 27                      C) 18                      D) 81                      E) 121

المسألة الأولى :

أوجد أصغر عددين صحيحين موجبين  $x, y$  بحيث يكون :  
 $12x = 25y^2$

#### المسألة الثانية :

أوجد جميع الأعداد الصحيحة  $n$  بحيث يكون :  
 من أجل أي عددين صحيحين موجبين  $x, y$  تتحقق المعادلتين :

$$x + y = n^2$$

$$10x + y = n^3$$

#### المسألة الثالثة :

إذا كان  $x, y$  عددين حقيقيين يحققان  $|x + y| + |x - y| = 1$  . أوجد أصغر قيمة وأكبر قيمة  
 للمقدار  $M = x^2 - 6x + y^2 - 6y$  .

#### المسألة الرابعة :

بفرض  $x_1, x_2, \dots, x_n$  أعداد حقيقية ( $n \geq 1$ ) تحقق الشرطان التاليان :

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$$

أثبت أن

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$$

#### المسألة الخامسة :

$ABCD$  متوازي الأضلاع ، نمدد الضلع  $BC$  إلى نقطة  $K$  بحيث يكون المثلث  $CDK$  متساوي الساقين  
 قاعدته  $CK$  . نمدد الضلع  $DC$  إلى نقطة  $L$  بحيث يكون المثلث  $CBL$  متساوي الساقين قاعدته  $CL$  . منصفا  
 الزاويتين  $L\hat{B}C$  و  $L\hat{D}K$  يتقاطعان في نقطة  $Q$  . أثبت أن النقط  $A, B, L, Q, K, D$  تقع على دائرة  
 واحدة ، عين مركزها .

#### المسألة السادسة :

بفرض  $P$  نقطة داخل مستطيل  $ABCD$  تحقق :

$$AP = 6, \quad BP = 7, \quad CP = 5$$

احسب طول  $DP$  .

عضو اللجنة العلمية العليا للأولمبياد الوطني  
 د . عبد اللطيف هنانو