

Valós analízis előadások II.

Valós analízis előadások II.

Komornik Vilmos

TypoT_EX ♦ Budapest 2003



Ez a könyv az illetékes kuratórium döntése alapján az Oktatási Minisztérium támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított Tankönyvtámogatási Program keretében jelent meg.

A mű megjelenését az MTA Matematikai Tudományok osztálya is támogatta.

© Title of the original French edition: Précis d'analyse réelle, tome II – published by Ellipses – copyright 2001 Édition Marketing S. A.

© Hungarian edition Komornik Vilmos, Typotex, 2003

ISBN 963 9548 20 0 ö

ISBN 963 9548 22 7

Témakör: felsőfokú matematika

Kedves Olvasó! Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított

Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

Szerkesztette és tördelte: Gerner József

Borítóterv: Tóth Norbert

Terjedelem: 24,2 (A/5) ív

Készült a Naszály Print Kft. nyomdájában

Felelős vezető: Hemela Mihályné

Előszó

Könyvünk első kötete három féléves előadás anyagát tartalmazta, amelyeket a szerző matematikus és matematika tanári szakos hallgatók számára tartott a Strasbourg-i Louis Pasteur Egyetemen a *Topológia*, *Differenciálszámítás* és a *Közelítő módszerek* témakörében. A jelen kötet három további előadást tartalmaz: *Funkcionálanalízis*, *Integrálszámítás* és *Függvényterek*. Az első két rész lényegében egymástól független, és az első kötetből csak a *Topológia* alaperedményeit használja fel rendszeresen. A befejező *Függvényterek* előadás mintegy szintézise az egész munkának, és valamennyi korábbi előadásra épít.

A *Funkcionálanalízis* tárgyalása eltér a szokásostól: az anyag jobb motiválása érdekében négy egyszerű síkgeometriai tételt igyekszünk tetszőleges dimenziós terekre általánosítani. Ez a megközelítés természetes módon vezet el a legtöbb fontos fogalomhoz és tételhez. Egy másik rendhagyó vonás, hogy az egyszerűség kedvéért nem építünk itt a Lebesgue-integrál ismeretére, hanem legtöbb eredményt a kis ℓ^p terekben szemléltetjük.

Az *Integrálszámítás* részben a Lebesgue-integrált Riesz Frigyes rendkívül elegáns tárgyalásában ismertetjük, néhány azóta talált egyszerűsítéssel. A lépcsős függvényekre vonatkozó két „ártatlan” segédteletből kiindulva 15 oldalon egyszerűen és világosan felépíthető az általános elmélet. A mérhetőség Riesz-féle *konstruktív* definíciója gyorsan elvezet a klasszikus nagy tételek (Fubini–Tonelli, Radon–Nikodým) optimális változataihoz.

A befejező *Függvényterek* részben részletesen szemléltetjük a *Funkcionálanalízis* tételeit a folytonos függvények és a Lebesgue-integrálható függvények tereiben.

Akárcsak az első kötetben, most is megadjuk a legtöbb fogalom és eredmény eredeti forrását. Első olvasáskor célszerű kihagyni a csillaggal jelölt részeket. Sok példa és megjegyzés feladatként is tárgyalható. (Lásd a 325. oldali megjegyzéseket is.)

A ix. oldalon felsorolt cikkek tanulmányozása elősegítheti az olvasó általános matematikai kultúrájának a megszilárdítását.

Ezt a kötetet édesapám emlékének ajánlom.

Strasbourg, 2003. június 23.

Tartalom

Előszó	v
Irodalom	ix
4. rész. Funkcionálanalízis	1
13. fejezet. Hilbert-terek	3
13.1. Definíciók és példák	3
13.2. Ortogonalitás	9
13.3. Konvex halmazok szétválasztása	14
13.4. Ortonormált bázisok	19
13.5. Gyenge konvergencia. Kiválasztási tétel	24
13.6. Folytonos és kompakt operátorok	29
13.7. Hilbert spektráltétele	33
13.8. * A komplex eset	39
14. fejezet. Banach-terek	42
14.1. Normált terek	42
14.2. Konvex halmazok szétválasztása	47
14.3. Kiterjesztési tétel	54
14.4. Az ℓ^p terek duálisai	56
14.5. Gyenge konvergencia. Banach–Steinhaus tétel	60
14.6. Reflexív terek. Kiválasztási tétel	67
14.7. Reflexív terek. Geometriai alkalmazások	71
14.8. * Nyílt leképezések és zárt gráfok	76
14.9. * Folytonos és kompakt operátorok	80
14.10. * Fredholm–Riesz elmélet	84
14.11. * A komplex eset	92
15. fejezet. Lokálisan konvex terek	94
15.1. Félnormacsaldók	95
15.2. Szétválasztási és kiterjesztési tételek	98
15.3. Krein–Milman tétel	101
15.4. * Gyenge topológia. Farkas–Minkowski lemma	104
15.5. * Gyenge csillag topológia. Banach–Alaoglu tétel	109
15.6. * Reflexív terek	115
15.7. * Topologikus vektorterek	117

5. rész. Integrálszámítás	121
16. fejezet. * Monoton függvények	123
16.1. * Folytonosság. Megszámlálható halmazok	123
16.2. * Differenciálhatóság. Nullahalmazok	126
16.3. * Ugrófüggvények	130
16.4. * A Lebesgue-tétel bizonyítása	133
16.5. * Korlátos változású függvények	137
17. fejezet. Lebesgue-integrál \mathbb{R} -en	139
17.1. Lépcsős függvények	140
17.2. Integrálható függvények	144
17.3. Beppo Levi tétele	147
17.4. Lebesgue, Fatou és Riesz–Fischer tételei	151
17.5. * Mérték függvények és halmazok	157
18. fejezet. * Általánosított Newton–Leibniz formula	165
18.1. * Abszolút folytonosság	166
18.2. * Primitív függvény	171
18.3. * Parciális és helyettesítéses integrálás	175
19. fejezet. Integrál mértékterekben	178
19.1. Mértékek	178
19.2. Véges mértékhez rendelt integrál	184
19.3. Szorzatterek: Fubini és Tonelli tételei	188
19.4. * Lebesgue-felbontás	193
19.5. Előjeles mértékek. Hahn- és Jordan-felbontás	195
19.6. Radon–Nikodým tétel	200
19.7. * Mértékek kiterjesztése σ -algebrákra	207
6. rész. Függvényterek	213
20. fejezet. Folytonos függvények terei	215
20.1. Weierstrass approximációs tételei	218
20.2. * Stone–Weierstrass tétel	223
20.3. Kompakt halmazok. Arzelà–Ascoli tétel	227
20.4. Fourier-sorok divergenciája	228
20.5. Fourier-sorok szummációja. Fejér tétele	232
20.6. * Korovkin tételei. Bernstein-polinomok	234
20.7. * Harsiladze–Lozinszkij, Nyikolajev és Faber tételei	239
20.8. * Duális tér. Riesz-féle reprezentációs tétel	243

20.9. Gyenge konvergencia	252
21. fejezet. Integrálható függvények terei	254
21.1. Az L^p terek, $1 \leq p \leq \infty$	254
21.2. * Kompakt halmazok	264
21.3. * Konvolúció	267
21.4. Egyenletesen konvex terek	271
21.5. Reflexivitás	276
21.6. Az L^p terek duálisai	278
21.7. Gyenge és gyenge csillag konvergencia	282
22. fejezet. Majdnem mindenütt való konvergencia	286
22.1. Az L^p terek, $1 \leq p \leq \infty$	286
22.2. Az L^p terek, $0 < p \leq 1$	289
22.3. Az L^0 terek	295
22.4. Mértékben való konvergencia	299
Irodalom	307
Oktatási megjegyzések	325
Tárgymutató	327
Névmutató	331
Idézett matematikusok	334

Irodalom

- [1] G. D. Birkhoff, *What is the ergodic theorem?*, Amer. Math. Monthly 49 (1942), 222–226.
- [2] J. A. Clarkson és Erdős Pál, *Approximation by polynomials*, Duke Math. J. 10 (1943), 5–11.
- [3] R. Courant, *Reminiscences from Hilbert's Göttingen*, Math. Intelligencer 3 (1980/81), 154–164.
- [4] J. L. Doob, *What is martingale?*, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 451–463.
- [5] L. E. Dubins és E. H. Spanier, *How to cut a cake fairly*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 1–4.
- [6] Erdős Pál, *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Sci. Math (Szeged), 5 (1930–32), 194–198.
- [7] Erdős Pál, *Über die Reihe $\sum 1/p$* , Mathematica, Zutphen B. 7 (1938), 1–2.
- [8] Fejér Lipót, *On some characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points*, Amer. Math. Monthly 41 (1934), 1–14; lásd: *Fejér Lipót összegyűjtött munkái I-II*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970, II, 527–539.
- [9] W. Feller, *The problem of n liars and Markov chains*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), 606–608.
- [10] P. R. Halmos, *The foundations of probability*, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 493–510.
- [11] P. R. Halmos, *The legend of John von Neumann*, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 382–394.
- [12] P. R. Halmos, *The heart of mathematics*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 519–524.
- [13] R. W. Hamming, *An elementary discussion of the transcendental nature of the elementary transcendental functions*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 294–297.
- [14] G. H. Hardy, *An introduction to the theory of numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929), 778–818.
- [15] G. H. Hardy, *The Indian mathematician Ramanujan*, Amer. Math. Monthly 44 (1937), 137–155.
- [16] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten, 1900, 253–297, és Archiv der Mathematik und Physik (3) 1 (1901), 44–63 és 213–237. Angol fordítás: *Mathematical Problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437–479.
- [17] H. Hochstadt, *Eduard Helly, father of the Hahn–Banach theorem*, Math. Intelligencer 2 (1979), 3, 123–125.
- [18] J. Horváth, *An introduction to distributions*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 227–240.
- [19] D. K. Kazarinoff, *A simple derivation of the Leibnitz–Gregory series for $\pi/4$* , Amer. Math. Monthly 62 (1955), 726–727.
- [20] K. M. Kendig, *Algebra, geometry, and algebraic geometry: some interconnections*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 3, 161–174.
- [21] J. Milnor, *Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 521–524.
- [22] Neumann János, *A társasjátékok elméletéhez*, [25], 121–156.
- [23] Neumann János, *A matematikus*, [25], 11–27.

- [24] Neumann János, *A matematika szerepe a tudományokban és a társadalomban*, [25], 28–43.
- [25] Neumann János, *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [26] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693–696.
- [27] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859; lásd *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1876, 135–144. Angol fordítás: *On the number of primes less than a given magnitude*, lásd H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press, New York, 1974, 299–305.
- [28] Riesz Frigyes, *Sur les valeurs moyennes des fonctions*, J. London Math. Soc. 5 (1930), 120–121; [31] I, 230–231.
- [29] Riesz Frigyes, *Lebesgue integrálfogalmának fejlődése*, Matematikai Lapok 1 (1950), 79–90; [31] I, 341–352.
- [30] Riesz Frigyes, *Nullalhalmazok és szerepük az analízisben*, Az I. Magyar Mat. Kongr. Közl. (1952), 204–214; [31] I, 353–362.
- [31] *Riesz Frigyes összegyűjtött munkái I-II*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.
- [32] C. A. Rogers, *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 525–527.
- [33] S. Russ, *Bolzano's analytic programme*, 14 (1992), Math. Intelligencer 3, 45–53.
- [34] A. Seidenberg, *A simple proof of a theorem of Erdős and Szekeres*, J. London Math. Soc. 34 (1959), 352.
- [35] S. Smale, *What is global analysis?*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 4–9.
- [36] K. Stromberg, *The Banach–Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 151–161.
- [37] Szegő Gábor, *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 23 (1924), 50–64, lásd *Collected papers I-III*, Birkhäuser, Basel, 1982.
- [38] F. Trèves, *Applications of distributions to PDE theory*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 241–248.
- [39] E. M. Wright, *A prime-representing function*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), 616–618.
- [40] F. B. Wright, *The recurrence theorem*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 247–248.
- [41] D. Zagier, *A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ is a sum of two squares*, Amer. Math. Monthly 97 (1990), 144.
- [42] L. Zalcman, *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 115–137.

4. rész

Funkcionálanalízis

Geometriai és fizikai kérdések vezettek a funkcionálanalízis megszületéséhez a XIX. század végén. Dini, Ascoli, Peano, Arzelà, Volterra és Hadamard munkáit Fredholm, Hilbert, Riesz, Fréchet látványos felfedezései, majd Helly, Hahn, Banach, Neumann és mások alapvető dolgozatai követték. A funkcionálanalízis a mai matematika egyik legélőbb ágazata. Belső harmóniáján túlmenően eredményei hasznosnak bizonyultak a variációszámításban, a parciális differenciálegyenletek elméletében, a kvantummechanikában, ...

A történeti fejlődés követése helyett ¹ az elemi geometria néhány közismert eredményét kíséreljük meg végtelen dimenziós terekre általánosítani:

- ha K nem-üres konvex, zárt halmaz \mathbb{R}^N -ben és $x \in \mathbb{R}^N$, akkor létezik x -től minimális távolságra lévő pont K -ban;
- \mathbb{R}^N minden M valódi alteréhez van olyan x , hogy $\text{dist}(x, M) = |x| = 1$ (ebben a részben altéren mindig *lineáris* alteret értünk);
- két \mathbb{R}^N -beli nem-üres diszjunkt konvex halmaz mindig szétválasztható affin hipersíkkal;
- bármely \mathbb{R}^N -beli korlátos konvex poliéder a csúcsainak a konvex burka;
- bármely \mathbb{R}^N -beli korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Ezen az úton haladva természetes módon jutunk el számos mély tételhez, de sok meglehetősen ellenpéldához is.

Minél általánosabb tereket tekintünk, annál inkább megsaporodnak a meglepő, véges dimenziós intuíciónknak ellentmondó jelenségek. Ezért didaktikai szempontból az \mathbb{R}^N -hez legközelebb álló *Hilbert-tereket* vizsgáljuk meg először. Ezt követően tárgyaljuk a *Banach-terek* gazdagabb osztályát, majd rövid betekintést adunk a *(lokálisan) konvex terek* elméletébe: ezek a terek még sok kedvező tulajdonsággal rendelkeznek, és fontos szerepet játszanak a lineáris parciális differenciálegyenletek alapjául szolgáló disztribúcióelméletben. Végül röviden megismerkedünk az általános *topologikus vektorterek* furcsa tulajdonságaival.

További tanulmányokhoz a hatalmas irodalomból kiemeljük Banach [23], valamint Riesz és Szőkefalvi-Nagy [340] klasszikus monográfiáit: a megírásuk óta eltelt 50–70 év mit sem ártott frissességüknek és eleganciájuknak. Sok elméleti kiegészítés található az [2], [31], [33], [38], [80], [97], [99], [217], [225], [240], [263], [274], [302], [317], [344], [349], [351], [355] művekben, izgalmas történeti elemzéseket tartalmaznak a [42], [87], [97], [168], [270], [280], [317], [340], [372] munkák, és végül nagy számú feladatot közölnek az alábbi könyvek: [15], [97], [153], [212], [302], [317], [349], [351], [394].

¹ A könyv hátralévő részében szinte kizárólag a Lebesgue-integrált tanulmányozzuk.

13. fejezet

Hilbert-terek

Végtelen! Soha más kérdés nem kavarta fel ilyen mélyen az emberi elmét.

D. Hilbert

A Hilbert-terek teljes normált terek, amelyek normáját skaláris szorzat segítségével definiáljuk. Bevezethető bennük az ortogonalitás fogalma, és általánosítható rájuk az euklideszi síkgeometria sok eredménye, például a Pitagorasz-tétel. Neumann János alapvető munkája óta¹ a Hilbert-terek képezik a kvantummechanika matematikai keretét.

13.1. Definíciók és példák

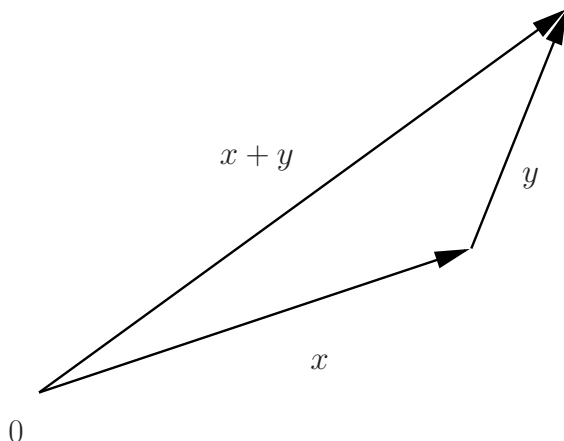
Legyen X valós vektortér. Emlékeztetünk néhány definícióra és alaptulajdonságra.² X -beli *normán*³ olyan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, amely minden $x, y, z \in X$ -re és $\lambda \in \mathbb{R}$ -re eleget tesz a következő négy tulajdonságnak:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

¹ Neumann 1927, 1932.

² *Topológia*, 3.1 szakasz, 60. o. A Topológia rész a jelen könyv első kötetében található.

³ Riesz 1917. Schmidt 1908 jelölése.



13.1. ábra. Háromszög-egyenlőtlenség

Az utolsó tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségnek* hívjuk (lásd a 13.1 ábrát).

Normált téren normával ellátott vektorteret értünk. A norma-függvény folytonos a megfelelő topológiára nézve.

X -beli *skaláris szorzaton* olyan $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, amely minden $x, y, z \in X$ -re és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -re eleget tesz a következő négy tulajdonságnak:

- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
- $(x, y) = (y, x)$,
- $(x, x) \geq 0$,
- $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Euklideszi vagy *prehilbert téren* skaláris szorzattal ellátott vektorteret értünk.

Minden euklideszi tér rendelkezik egy természetes normával: $\|x\| := (x, x)^{1/2}$. Ez a norma eleget tesz a *Cauchy–Schwarz egyenlőtlenségnek*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

és a *paralelogramma-azonosságnak*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Végezetül a skaláris szorzás folytonos a megfelelő topológiára nézve:

$$\text{ha } x_n \rightarrow x \text{ és } y_n \rightarrow y, \text{ akkor } (x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

Definíció. *Hilbert-téren*⁴ teljes euklideszi teret értünk.

Példák.

- A topológiából tudjuk, hogy \mathbb{R}^N euklideszi tér a szokásos

$$(x, y) := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_Ny_N$$

skaláris szorzatra nézve. Minthogy minden véges dimenziós normált tér teljes⁵, \mathbb{R}^N Hilbert-tér.

- A $\sum |x_n|^2 < \infty$ tulajdonságú valós $x = (x_n)$ számsorozatok ℓ^2 halmaza Hilbert-tér az

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_ny_n$$

skaláris szorzatra nézve. Először is a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_ny_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty,$$

valamint a tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -re érvényes

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n + \beta y_n|^2 \leq 2|\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2|\beta|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy ℓ^2 vektortér, és hogy (x, y) korrektül definiált skaláris szorzat.

Legyen $(x_n^1), (x_n^2), \dots \ell^2$ -beli Cauchy-sorozat. Minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan k_0 , hogy $k, \ell \geq k_0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n^\ell|^2 < \varepsilon. \quad (13.1)$$

Speciálisan (x_n^ℓ) Cauchy-sorozat minden rögzített n -re, tehát konvergál valamely x_n számhoz.

Az $\ell \rightarrow \infty$ határátmenettel (13.1)-ből minden $k \geq k_0$ -ra és $N \geq 1$ -re a

$$\sum_{n=1}^N |x_n^k - x_n|^2 \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ebből következik, hogy $(x_n) \in \ell^2$, és $(x_n^k) \rightarrow (x_n)$ ℓ^2 -ben.

⁴ Hilbert 1904, Neumann 1927, Löwig 1934, Rellich 1935.

⁵ *Topológia*, 3.9 tétel, 75. o.

- A topológiában láttuk azt is, hogy ha I nem-degenerált kompakt intervallum, akkor $C(I)$ euklideszi tér az $(f, g) := \int_I fg \, dx$ skaláris szorzatra nézve. Ez a tér nem teljes. Legyen ugyanis az egyszerűség kedvéért $I = [0, 2]$, és tekintsük a következő függvényeket (lásd a 13.2 ábrát):

$$x_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq t \leq 1, \\ n(t-1) & \text{ha } 1 \leq t \leq (n+1)/n, \\ 1 & \text{ha } (n+1)/n \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Ha $m > n \rightarrow \infty$, akkor

$$\|x_m - x_n\|^2 = \int_1^{(n+1)/n} |x_m(t) - x_n(t)|^2 dt \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

tehát (x_n) Cauchy-sorozat. Ha konvergálna valamely $x \in C(I)$ függvényhez, akkor az

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt = \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^2 dt \leq \|x - x_n\|^2 \rightarrow 0$$

becslés alapján $x = 0$ volna $[0, 1]$ -ben. Másrészt az ugyancsak érvényes

$$\begin{aligned} \int_1^2 |x(t) - 1|^2 dt &\leq 2 \int_1^2 |x(t) - x_n(t)|^2 dt + 2 \int_1^2 |x_n(t) - 1|^2 dt \\ &\leq 2\|x - x_n\|^2 + 2 \int_1^{(n+1)/n} |x_n(t) - 1|^2 dt \\ &\leq 2\|x - x_n\|^2 + \frac{2}{n} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

becslés szerint $x = 1$ lenne $[1, 2]$ -ben, és így $x(1)$ -re két különböző érték adódna.

Utolsó példánk mutatja a következő eredmény jelentőségét:

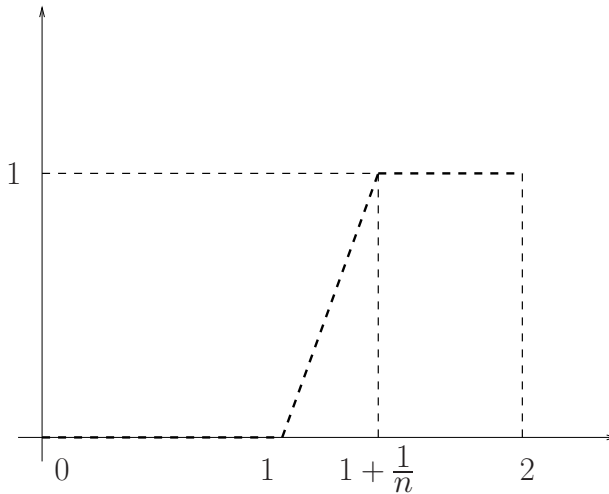
13.1. Állítás. Minden euklideszi tér teljessé tehető, vagyis alkalmas Hilbert-tér sűrű alterének tekinthető.

Bizonyítás. Minden E euklideszi tér metrikus tér is a

$$d(x, y) := \|x - y\|_E = (x - y, x - y)^{1/2}$$

távolságra nézve, és így alkalmas (H, d) teljes metrikus tér sűrű (metrikus) alterének tekinthető.⁶

⁶ Topológia, 1.15 állítás, 23. o.

13.2. ábra. x_n gráfja

Tetszőlegesen rögzített $x, y \in H$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén válasszunk olyan E -beli (x_n) és (y_n) sorozatokat, hogy $d(x, x_n) \rightarrow 0$ és $d(y, y_n) \rightarrow 0$, majd definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$x + y = \lim x_n + y_n,$$

$$cx = \lim cx_n,$$

$$(x, y) = \lim (x_n, y_n).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

- ezek a határértékek léteznek;
- a határértékek nem függenek (x_n) és (y_n) speciális választásától;
- H euklideszi és így Hilbert-tér a most bevezetett skaláris szorzatra nézve;
- $d(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2}$ minden $x, y \in H$ -ra.

□

Definíció. Jelöljük $L^2(I)$ -vel a $C(I)$ teljessé tételével kapott Hilbert-teret.

***Megjegyzés.** A Lebesgue-integrál lehetővé fogja tenni $L^2(I)$ konkrétabb interpretációját.⁷

⁷ Lásd a 21.5 állítás (b) részét, 260. o.

Látni fogjuk, hogy \mathbb{R}^N számos hasznos tulajdonsága minden Hilbert-térben érvényben marad. De a következő példák óvatosságra intenek:

***Példák.** Tekintsük a $H := \ell^2$ Hilbert-teret.

- A H -beli

$$F := \{(\overbrace{0, \dots, 0}^{k-1}, 1 + k^{-1}, 0, \dots) : k = 1, 2, \dots\}$$

halmaz nem-üres, korlátos és zárt, mégis *minimális* normájú eleme. Más szóval a 0 pont F -től való távolsága nem vétetik fel: $\text{dist}(0, F) = 1$, de $\|y\| > 1$ minden $y \in F$ -re. Ebből következik, hogy F korlátos és zárt, de *nem kompakt*. Valóban, emlékeztetünk arra⁸, hogy metrikus térbeli nem-üres kompakt halmazok távolsága mindig felvétetik.

- A H -beli

$$K := \left\{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 |x_n|^2 \leq 1\right\}$$

halmaz nem-üres, konvex, korlátos és zárt, de nincs *maximális* normájú eleme. Továbbá a halmaz átmérője sem vétetik fel: $\text{diam } K = 2$, de $\|x - y\| < 2$ minden $x, y \in K$ -ra. Ebből következik, hogy K konvex, korlátos és zárt, de *nem kompakt*. Valóban, emlékeztetünk arra⁹, hogy metrikus térbeli nem-üres kompakt halmaz átmérője mindig felvétetik.

- Az

$$M := \left\{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\right\}$$

halmaz valódi, sűrű altere H -nak. Speciálisan nem létezik olyan $y \in H$ pont, amelyre $\text{dist}(y, M) > 0$. Ilyen szituáció nem fordulhat elő véges dimenzióban, mert abban minden altér teljes, tehát zárt is.¹⁰

Az M altér sűrűségének az igazolására rögzítsünk egy tetszőleges $B_r(x)$ gömböt. Adott, később megválasztandó $m \geq 1$ és

⁸ *Topológia*, 1.22 állítás, 27. o.

⁹ Lásd újra az említett 1.22 állítást.

¹⁰ *Topológia*, 3.9 tétel és 1.10 állítás, 75. és 18. o.

$k \geq 1$ egészekhez tekintsük az

$$y := \left(x_1, \dots, x_m, \overbrace{-\frac{c}{k}, \dots, -\frac{c}{k}}^k, 0, 0, \dots \right), \quad c = x_1 + \dots + x_m$$

sorozatot. Akkor $y \in M$, és

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \sum_{n=m+1}^{m+k} \left| x_n + \frac{c}{k} \right|^2 + \sum_{n>m+k} |x_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{m+k} \left(2|x_n|^2 + 2\left| \frac{c}{k} \right|^2 \right) + \sum_{n>m+k} |x_n|^2 \\ &\leq \frac{2c^2}{k} + 2 \sum_{n>m} |x_n|^2. \end{aligned}$$

Válasszuk m -et olyan nagyra, hogy az utolsó összeg $r^2/4$ -nél kisebb legyen, majd válasszuk k olyan nagyra, hogy $c^2/k < r^2/4$ is teljesüljön. Akkor $y \in B_r(x)$.

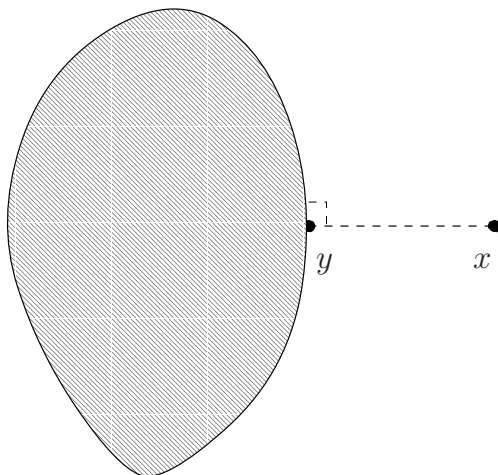
Mostantól kezdve a fejezet végéig a H betűvel mindig Hilbert-teret jelölünk.

13.2. Ortogonalitás

Definíció. Legyen $x, y \in H$ és $A, B \subset H$. Azt mondjuk, hogy

- x és y *ortogonálisak*, jelben $x \perp y$, ha $(x, y) = 0$;
- x és A *ortogonálisak*, jelben $x \perp A$, ha $(x, y) = 0$ minden $y \in A$ -ra;
- A és B *ortogonálisak*, jelben $A \perp B$, ha $(x, y) = 0$ minden $x \in A$ -ra és $y \in B$ -re.

Rátérünk a bevezetésben említett első probléma megoldására:



13.3. ábra. Merőleges vetítés

13.2. Tétel. (Merőleges vetítés¹¹) Legyen $K \subset H$ nem-üres konvex, zárt halmaz, és $x \in H$. Létezik egyetlen x -től minimális távolságra lévő K -beli y pont. Ez a pont a következő tulajdonsággal jellemezhető:

$$y \in K, \quad \text{és} \quad (x - y, v - y) \leq 0 \quad \text{minden} \quad v \in K\text{-ra.} \quad (13.2)$$

A $P_K x := y$ képlettel értelmezett $P_K : H \rightarrow K$ leképezés Lipschitz-folytonos valamely $L \leq 1$ konstanssal.

Ha K altér, akkor (13.2) ekvivalens az

$$x - y \perp K \quad (13.3)$$

ortogonalitási tulajdonsággal, és P_K legfeljebb 1 normájú folytonos lineáris leképezés.

Definíció. Az $y = P_K(x)$ pontot az x pont K -ra vonatkozó merőleges vetületének hívjuk (lásd a 13.3 ábrát).

Bizonyítás. Létezés. Legyen $d = \text{dist}(x, K)$, és tekintsünk egy olyan $(y_n) \subset K$ sorozatot, amelyre $\|x - y_n\| \rightarrow d$. Akkor (y_n) Cauchy-sorozat.

¹¹ Levi 1906, Schmidt 1908, Nikodym 1931 (tételkimondás), 1935 (bizonyítás), Riesz 1934–35.

Valóban, a paralelogramma-azonosság szerint

$$\|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 + \|(x - y_n) + (x - y_m)\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2,$$

és innen d definíciója alapján

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\|x - 2^{-1}(y_m + y_n)\|^2 \\ &\leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2, \end{aligned}$$

mert $2^{-1}(y_m + y_n)$ a konvex K halmazhoz tartozik. Elegendő ezek után észrevennünk, hogy a jobboldal $m, n \rightarrow \infty$ esetén nullához tart.

E sorozat határértékére $y \in K$, hiszen K zárt, és $\|x - y\| = d$ a norma folytonossága miatt.

Jellemzés és egyértelműség. Legyen $y \in K$ minimális d távolságra x -től. Tetszőlegesen rögzített $v \in K$ -ra az $(1 - t)y + tv = y + t(v - y)$ vektorok minden $0 < t < 1$ -re a konvex K halmazhoz tartoznak, úgyhogy

$$0 \geq t^{-1}(\|x - y\|^2 - \|x - y - t(v - y)\|^2) = 2(x - y, v - y) - t\|v - y\|^2.$$

Innen $t \rightarrow 0$ mellett (13.2) adódik.

Megfordítva, ha (13.2) teljesül, akkor

$$\begin{aligned} \|x - v\|^2 &= \|x - y\|^2 + \|y - v\|^2 - 2(x - y, v - y) \\ &\geq \|x - y\|^2 + \|y - v\|^2 \\ &> \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

minden y -től különböző $v \in K$ -ra.

Lipschitz-tulajdonság. Ha $x, x' \in H$, akkor az $y = P_K(x)$ és $y' = P_K(x')$ jelöléssel

$$(x - y, y' - y) \leq 0 \quad \text{és} \quad (x' - y', y - y') \leq 0.$$

Összeadva őket

$$(x - x' + y' - y, y' - y) \leq 0$$

adódik; innen

$$\|y' - y\|^2 \leq (x' - x, y' - y) \leq \|x' - x\| \cdot \|y' - y\|,$$

és így

$$\|y' - y\| \leq \|x' - x\|.$$

A K altér esete. Legyen $w \in K$. Alkalmazzuk (13.2)-t $v = \pm tw$ -vel, ahol $t > 0$; t -vel osztva

$$\pm(x - y, w) \leq t^{-1}(x - y, y)$$

adódik. Innen $t \rightarrow \infty$ mellett a keresett $(x - y, w) = 0$ relációt kapjuk.

Megfordítva, (13.3)-ból $(x - y, v - y) = 0$ következik, mert $v - y \in K$.

P_K linearitása az egyértelműségből következik. Ha ugyanis $y = P_K(x)$, $y' = P_K(x')$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a $x - y \perp K$ és $x' - y' \perp K$ relációk maguk után vonják az

$$(x + x') - (y + y') \perp K \quad \text{és} \quad \lambda x - \lambda y \perp K$$

összefüggéseket. □

***Példa.** Az előző szakasz végén bevezetett F halmaz példája mutatja, hogy a konvexitási feltétel a merőleges vetület *létezéséhez is* szükséges.

Mielőtt levezetnénk a most igazolt tétel néhány fontos következményét, vezessünk be két új fogalmat:

Definíciók.

- A H -beli D halmaz *ortogonális komplementumán* a

$$D^\perp := \{x \in H : x \perp D\}$$

halmazt értjük.

- A H -beli D halmaz által *generált zárt altér*en a D -t tartalmazó H -beli zárt alterek metszetét értjük. Világos, hogy ez a D -t tartalmazó legszűkebb zárt altér.

Vegyük észre, hogy D^\perp zárt altére H -nak, és hogy

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp, \quad (A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp.$$

Jegyezzük meg azt is, hogy a D által generált zárt altér a D -beli pontok véges lineáris kombinációi által alkotott halmaz lezárása. A következő eredmény (b) része megoldja a bevezetőben említett második problémát:

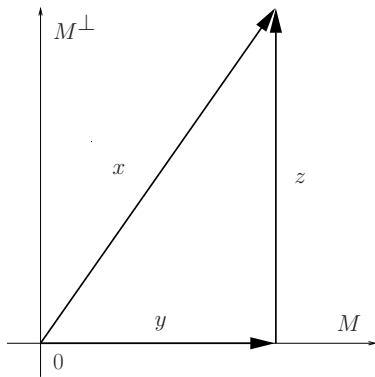
13.3. Következmény.

- (a) (Riesz¹²) Legyen $M \subset H$ nem-üres zárt altér. Minden $x \in H$ vektor egyértelműen felírható $x = y + z$ alakban, ahol $y \in M$ és $z \in M^\perp$.
- (b) Legyen $M \subset H$ nem-üres valódi zárt altér. Létezik olyan $x \in H$ vektor, hogy

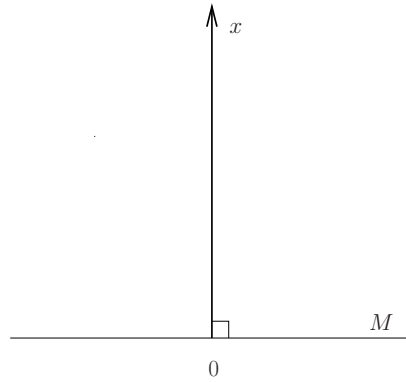
$$\text{dist}(x, M) = \|x\| = 1.$$

- (c) A $D \subset H$ halmaz által generált zárt altér megegyezik $D^{\perp\perp}$ -sel. Következésképpen

- ha $D^\perp = \{0\}$, akkor D generálja H -t;
- ha $M^\perp = \{0\}$ valamely $M \subset H$ altérre, akkor M sűrű H -ban.



13.4. ábra. Merőleges felbontás

13.5. ábra. $\text{dist}(x, M) = \|x\|$

Lásd a 13.4 és 13.5 ábrákat.

Bizonyítás.

(a) *Létezés.* Definíció szerint $y := P_M x \in M$, és $z := x - y \in M^\perp$ a (13.3) tulajdonság alapján.

Egyértelműség. Ha $x = y + z$ és $x = y' + z'$ két olyan felbontás, amelyre $y, y' \in M$ és $z, z' \perp M$, akkor

$$w := y - y' = z' - z \in M \cap M^\perp.$$

Így $(w, w) = 0$, ahonnan $w = 0$, tehát $x = x'$ és $y = y'$.

(b) Tetszőlegesen választott $y \in H \setminus M$ -re $x := (y - P_M y) / \|y - P_M y\|$ megfelel a kívánalmaknak.

(c) Könnyen látható, hogy $D^{\perp\perp}$ a D -t tartalmazó zárt altér, és így tartalmazza a D által generált M zárt alteret. Meg kell még mutatnunk, hogy $D^{\perp\perp} \subset M$.

Ha $x \in D^{\perp\perp}$, akkor (a) miatt $x = y + z$ alkalmas $y \in M$ és $z \in M^\perp$ vektorokkal. Innen következik, hogy $z = x - y \in D^{\perp\perp} - M = D^{\perp\perp}$. Másrészt $z \in D^\perp$, mert $D \subset M$ folytán $M^\perp \subset D^\perp$. Így $z \in D^{\perp\perp} \cap D^\perp = \{0\}$, ahonnan $x = y \in M$. \square

¹² Riesz 1934–35.

13.3. Konvex halmazok szétválasztása

Véges dimenziós X vektortérben két diszjunkt nem-üres konvex halmaz mindig szétválasztható *affin hipersíkkal*, vagyis

$$\{x \in X : \varphi(x) = c\}$$

alakú halmazzal, ahol $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ nem-nulla folytonos lineáris funkcionál, és $c \in \mathbb{R}$. Pontosabban:

13.4. *Állítás. (Minkowski¹³) Legyenek A és B diszjunkt nem-üres konvex halmazok a véges dimenziós X vektortérben. Létezik olyan φ nem-nulla lineáris funkcionál X -en, hogy alkalmas c valós számra

$$\varphi(a) \leq c \leq \varphi(b) \quad \text{minden } x \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén.} \quad (13.4)$$

Először egy gyengébb, de minden Hilbert-térben érvényes változatot bizonyítunk. Emlékeztetünk arra ¹⁴, hogy X' -szel jelöljük az X normált tér duálisát, vagyis az X -en értelmezett folytonos lineáris funkcionálok normált terét.

13.5. Tétel. (Tukey¹⁵) Legyenek A és B diszjunkt nem-üres konvex, zárt halmazok H -ban. Ha legalább az egyikük kompakt, akkor létezik olyan $\varphi \in H'$, hogy alkalmas c_1, c_2 valós számokra

$$\varphi(a) \leq c_1 < c_2 \leq \varphi(b) \quad \text{minden } x \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén.} \quad (13.5)$$

(Lásd a 13.6 ábrát.) Speciálisan különböző $a, b \in H$ pontokhoz mindig található olyan $\varphi \in H'$, hogy $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Bizonyítás. A

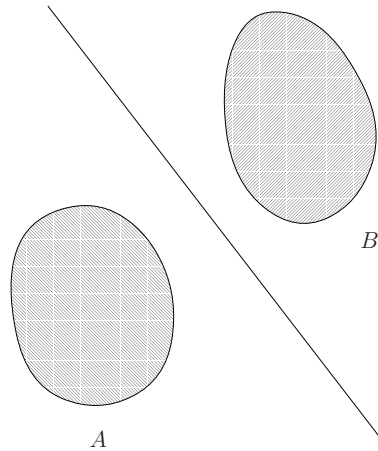
$$C := B - A = \{b - a : a \in A, b \in B\}$$

halmaz nem-üres konvex, zárt, és nem tartalmazza 0-t. Az egyetlen nem-trivális tulajdonság C zártsága: meg kell mutatnunk, hogy ha egy C -beli $b_n - a_n$ alakú sorozat konvergál valamely x ponthoz X -ben, akkor $x \in C$.

¹³ Minkowski 1910, 1911.

¹⁴ *Topológia*, 3.5 szakasz, 81. o.

¹⁵ Tukey 1942.



13.6. ábra. Konvex halmazok szétválasztása

Tegyük fel például, hogy A kompakt, akkor létezik egy konvergens $a_{n_k} \rightarrow a \in A$ részsorozat. Innen következik, hogy

$$b_{n_k} = (b_{n_k} - a_{n_k}) + a_{n_k} \rightarrow x + a.$$

Mivel B zárt, $x + a \in B$, és így $x = (x + a) - a \in B - A = C$.

Jelöljük y -nal 0 merőleges vetületét C -re; akkor $y \neq 0$ (hiszen $0 \notin C$), és

$$(0 - y, b - a - y) \leq 0 \quad \text{minden } x \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén,}$$

vagyis

$$\|y\|^2 + (a, y) \leq (b, y) \quad \text{minden } x \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén.}$$

A $\varphi(x) := (x, y)$ képlet egy $\varphi \in H'$ funkcionált definiál a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség miatt. Minthogy A és B nem üresek, az imént kapott egyenlőtlenség alapján az

$$c_1 := \sup_{a \in A} (a, y), \quad \text{és} \quad c_2 := \inf_{b \in B} (b, y)$$

számok végesek, és (13.5) teljesül.

Az utolsó tulajdonság az $A := \{a\}$ és $B := \{b\}$ választással következik az eddigiekből. \square

***A 13.4 állítás bizonyítása.** Lássuk el X -et egy euklideszi normával; véges dimenziós lévén X szeparábilis, így A és B is szeparábilisak.¹⁶ Rögzíthetünk tehát egy A -ban sűrű (a_n) sorozatot és egy B -ben sűrű (b_n) sorozatot. Jelöljük minden n természetes számra A_n -nel és B_n -nel az a_1, \dots, a_n , illetve b_1, \dots, b_n pontok konvex burkát.

Az A_n, B_n halmazok kompaktak, mert a kompakt¹⁷

$$\{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0, t_1 + \dots + t_n = 1\}$$

szimplex folytonos képei az

$$f(t_1, \dots, t_n) := t_1 a_1 + \dots + t_n a_n \quad \text{és} \quad g(t_1, \dots, t_n) := t_1 b_1 + \dots + t_n b_n$$

képletekkel definiált $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ folytonos (lineáris) leképezésekre nézve.

Mintthogy $A_n \subset A$ és $B_n \subset B$ diszjunktak, a 13.5 tétel szerint van olyan nem-nulla $\varphi_n \in X'$ funkcionál, hogy

$$\varphi_n(a) \leq \varphi_n(b) \quad \text{minden } x \in A_n \text{ és } b \in B_n \text{ esetén.} \quad (13.6)$$

Alkalmas konstanssal megszorozva feltehetjük, hogy $\|\varphi_n\| = 1$.

Mintthogy X' véges dimenziós, létezik konvergens $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ részsorozat.¹⁸ Akkor $\|\varphi\| = 1$, tehát φ nem-nulla. Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\varphi(a) \leq \varphi(b) \quad \text{minden } x \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén;}$$

ebből az állítás

$$c := \inf \{\varphi(b) : b \in B\}$$

választással következni fog.

Az $(a_n), (b_n)$ sorozatok sűrűsége miatt elég igazolnunk, hogy

$$\varphi(a_k) \leq \varphi(b_m)$$

minden $k, m = 1, 2, \dots$ -re. Tetszőlegesen rögzített k, m -re ez $n \rightarrow \infty$ esetén adódik a (13.6) miatt minden $n \geq \max \{k, m\}$ -re érvényes

$$\varphi_n(a_k) \leq \varphi_n(b_m)$$

relációból. □

¹⁶ *Topológia*, 1.28 állítás és 3.9 tétel, 32. és 75. o.

¹⁷ Emlékeztetünk arra, hogy véges dimenzióban minden korlátos zárt halmaz kompakt: *Topológia*, 3.9 tétel, 75. o.

¹⁸ *Topológia*, 3.9 tétel, 75. o.

A 13.5 tétel bizonyításában konstruált φ funkcionált egy $y \in H$ vektor reprezentálta. Megmutatjuk, hogy valójában minden $\varphi \in H'$ ilyen alakú. Ha $y \in H$, akkor a

$$\varphi_y(x) := (x, y)$$

formula olyan $\varphi_y \in H'$ funkcionált definiál, amelyre $\|\varphi_y\| \leq \|y\|$, mert

$$|\varphi_y(x)| \leq \|y\| \cdot \|x\|$$

minden $x \in H$ -ra a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség miatt. A $j(y) := \varphi_y$ jelöléssel így egy $j : H \rightarrow H'$ lineáris leképezést kapunk.

13.6. Tétel. (Riesz–Fréchet¹⁹) A j leképezés izometrikus izomorfizmus H -ról H' -re.

A tételből következik, hogy H' is Hilbert-tér; a tétel alapján H' -t gyakran azonosítják H -val.

Bizonyítás. Már tudjuk, hogy $\|\varphi_y\| \leq \|y\|$ minden y -ra. Az $|\varphi_y(y)| = \|y\|^2$ egyenlőség maga után vonja a fordított $\|\varphi_y\| \geq \|y\|$ egyenlőtlenséget is. Így j izometria, és csak a szuperjektivitás igazolása marad hátra.

Tetszőlegesen rögzített $\varphi \in H'$ funkcionál

$$M = N(\varphi) := \{x \in H : \varphi(x) = 0\}$$

magja zárt altér. Ha $M = H$, akkor $y = 0$ választással $\varphi = \varphi_y$.

Ha $M \neq H$, akkor a 13.3 következmény (12. o.) alapján rögzíthetünk egy M -re merőleges e egységvektort. Megmutatjuk, hogy $y = \varphi(e)e$ választással $\varphi = \varphi_y$. Valóban, tetszőleges $x \in H$ -ra legyen $\lambda = \varphi(x)/\varphi(e)$ és $z = x - \lambda e$. Akkor $\varphi(z) = 0$, tehát $z \in M$, és így $z \perp e$. Következésképpen

$$\varphi(x) = \varphi(\lambda e + z) = \lambda \varphi(e)$$

és

$$(x, y) = \varphi(e)(x, e) = \varphi(e)(\lambda e + z, e) = \lambda \varphi(e). \quad \square$$

Befejezésül ismertetünk két érdekes ellenpéldát.

***Példák.**

- A 13.4 állításban a véges dimenzió feltétele lényeges.²⁰ Tekintsük ugyanis azon valós (x_n) számsorozatok X vektorterét, amelyekben legfeljebb véges sok nem-nulla elem van. Jelöljük A -val azon nem-nulla sorozatok halmazát, amelyek utolsó nem-nulla eleme pozitív,

¹⁹ Riesz 1907 és Fréchet 1907 (két cikk az L^2 esetre), Riesz 1934–35 (általános eset).

²⁰ Dieudonné 1941.

és legyen $B = \{0\}$. Akkor A és B diszjunkt nem-üres konvex halmazok X -ben.

Megmutatjuk, hogy ha (13.4) teljesül, akkor szükségképpen $\varphi \equiv 0$. Válasszunk e célból tetszőlegesen rögzített $x \in X$ -hez olyan k indexet, hogy $x_n = 0$ minden $n \geq k$ -ra, és tekintsük az

$$e_k := (\overbrace{0, \dots, 0}^{k-1}, 1, 0, \dots)$$

vektort. Akkor $\pm x + te_k \in A$ minden $t > 0$ -ra, tehát

$$\pm \varphi(x) + t\varphi(e_k) \leq c \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Ebből $t \rightarrow 0$ mellett $|\varphi(x)| \leq c$ adódik. De egy korlátos lineáris leképezés szükségképpen azonosan nulla.

- A 13.5 tételben a kompaktság feltétele nem hagyható el.²¹ Tekintsük ugyanis $H := \ell^2$ -ben az

$$A := \{(x_n) \in \ell^2 : n|x_n - n^{-2/3}| \leq x_1 \quad \text{minden } n \geq 2\text{-re}\}$$

és

$$B := \{(x_n) \in \ell^2 : x_n = 0 \quad \text{minden } n \geq 2\text{-re}\}$$

nem-üres konvex, zárt halmazokat. A és B diszjunktak, hiszen egy $(x_n) \in A \cap B$ sorozatnak teljesítenie kellene minden $n \geq 2$ -re az $x_1 \geq n^{1/3}$ egyenlőtlenséget, márpedig $n^{1/3} \rightarrow \infty$.

Ha szét lehetne választani A -t és B -t zárt hipersíkkal, akkor $A - B$ egy zárt féltérhez tartozna. Ez azonban lehetetlen, mert $A - B$ sűrű ℓ^2 -ben. Ez az

$$A - B = \{(x_n) \in \ell^2 : x_n - n^{-2/3} = O(1/n)\}$$

összefüggés segítségével igazolható. Tetszőlegesen rögzített $(z_n) \in \ell^2$ és $\varepsilon > 0$ esetén válasszunk olyan m -et, hogy

$$\sum_{n>m} |z_n|^2 < \varepsilon^2/4 \quad \text{és} \quad \sum_{n>m} n^{-4/3} < \varepsilon^2/4.$$

Akkor az

$$x_n := \begin{cases} z_n & \text{ha } n \leq m, \\ n^{-2/3} & \text{ha } n > m \end{cases}$$

²¹ Tukey 1942.

képlet olyan $(x_n) \in A - B$ sorozatot definiál, amelyre

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n>m} n^{-4/3} \right)^{1/2} + \left(\sum_{n>m} |z_n|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

13.4. Ortonormált bázisok

A Hilbert-terek ideális keretet nyújtanak a Fourier-sorok tanulmányozására.

Definíció. Páronként ortogonális egységvektorokból álló sorozatot *ortonormált sorozatnak* hívunk.²²

Példák.

- Az ℓ^2 -beli

$$e_k = (\overbrace{0, \dots, 0}^{k-1}, 1, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

vektorok ortonormált sorozatot alkotnak.

- (*Trigonometrikus rendszer*) Tetszőleges 2π hosszúságú I intervallumra az

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{és} \quad e_{2k-1} = \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2k} = \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

függvények ortonormált sorozatot alkotnak $L^2(I)$ -ben.

- A $\sqrt{2/\pi} \sin kt$ ($k = 1, 2, \dots$) függvények ortonormált sorozatot alkotnak az $L^2(0, \pi)$ térben.
- Az $1/\sqrt{\pi}$ és $\sqrt{2/\pi} \cos kt$ ($k = 1, 2, \dots$) függvények ortonormált sorozatot alkotnak $L^2(0, \pi)$ -ben.

13.7. Állítás. Legyen (e_j) ortonormált sorozat H -ban.

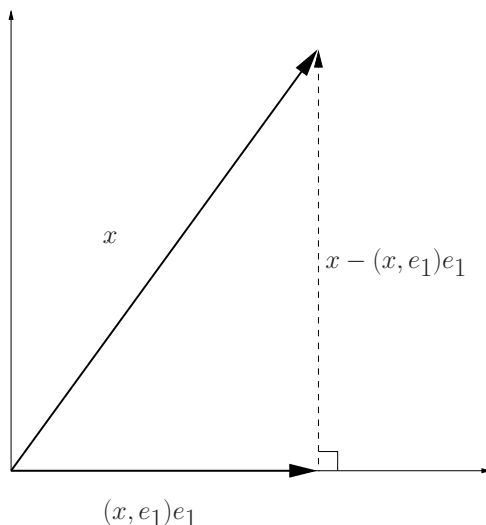
(a) (*Bessel-egyenlőség*²³) Minden $x \in H$ -ra és $m = 1, 2, \dots$ -re fennáll az

$$\left\| x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^m |(x, e_j)|^2 \quad (13.7)$$

egyenlőség. (Lásd a 13.7 ábrát.)

²² Gram 1879, Schmidt 1908.

²³ Bessel 1815, 1828. A 13.7 ábra mutatja, hogy a Pitagorasz-tétel általánosításáról van szó.

13.7. ábra. Bessel-egyenlőség $m = 1$ -re

(b) (Bessel-egyenlőtlenség²⁴) Minden $x \in H$ -ra érvényes a

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (13.8)$$

egyenlőtlenség. Speciálisan a baloldali sor mindig konvergens.

(c) Tetszőleges valós (c_j) számsorozatra

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \text{ konvergál } H\text{-ban} \iff \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty.$$

Megjegyzések.

- A Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség levezetésekor már igazoltuk a Bessel-egyenlőséget $m = 1$ -re.
- Az (x, e_j) mennyiségeket x Fourier-együtthatóinak²⁵ nevezzük.

²⁴ Bessel 1815, 1828.

²⁵ Clairaut 1757 (546–547. o.), Euler 1777, Fourier 1822.

Bizonyítás.

(a) Az egyenlőség közvetlen számolással adódik:

$$\begin{aligned}
 \left\| x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j \right\|^2 &= \left(x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j, x - \sum_{k=1}^m (x, e_k) e_k \right) \\
 &= (x, x) - \left(\sum_{j=1}^m (x, e_j) (e_j, x) \right) - \left(\sum_{k=1}^m (x, e_k) (x, e_k) \right) \\
 &\quad + \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (x, e_j) (x, e_k) (e_j, e_k) \right) \\
 &= (x, x) - 2 \left(\sum_{j=1}^m |(x, e_j)|^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^m |(x, e_k)|^2 \right) \\
 &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^m |(x, e_j)|^2,
 \end{aligned}$$

mert $(e_j, e_k) = 0$ ha $j \neq k$, és $(e_j, e_j) = 1$ minden j -re.

(b) A nem-negatív tagú sor részletösszegeinek $\|x\|^2$ felső korlátja (a) miatt.

(c) Minthogy

$$\left\| \sum_{j=n+1}^m c_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |c_j|^2$$

minden $n > m$ -re, a Cauchy-kritérium azonos a két sorra. □

Megjegyzés. Tetszőleges $x \in H$ -re

$$\sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j$$

az x -hez legközelebbi pont az e_1, \dots, e_m által generált M_m altérben, mert bármely M_m -beli pont esetén

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{j=1}^m c_j e_j \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2 \left(\sum_{j=1}^m c_j (x, e_j) \right) + \sum_{j=1}^m |c_j|^2 \\ &= \left(\|x\|^2 - \sum_{j=1}^m |(x, e_j)|^2 \right) + \sum_{j=1}^m |c_j - (x, e_j)|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^m |c_j - (x, e_j)|^2. \end{aligned}$$

Következésképpen²⁶

$$\text{dist}(x, M_m) = \left\| x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j \right\|. \quad (13.9)$$

Vizsgáljuk meg az egyenlőség esetét a Bessel-egyenlőtlenségben:

13.8. Állítás. Legyen (e_j) ortonormált sorozat H -ban. A következő négy tulajdonság ekvivalens:

- (a) az (e_j) által generált M altér sűrű H -ban;
- (b) (Fourier-sor²⁷) $\sum (x, e_j) e_j = x$ minden $x \in H$ -ra;
- (c) (Parseval-egyenlőség²⁸) $\sum |(x, e_j)|^2 = \|x\|^2$ minden $x \in H$ -ra;
- (d) ha $x \in H$ és $(x, e_j) = 0$ minden j -re, akkor $x = 0$.

Bizonyítás.

(a) \iff (b). Jelöljük M_m -mel az e_1, \dots, e_m által generált alteret. Akkor (a) és (b) azzal ekvivalens, hogy

$$\text{dist}(x, M_m) \rightarrow 0 \quad \text{illetve} \quad \left\| x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j \right\| \rightarrow 0$$

minden $x \in H$ -ra. Elég tehát alkalmazni a fenti (13.9) egyenlőséget.

(b) \iff (c) a Bessel-egyenlőségből adódik, mert (13.7) két oldala egyszerre tart nullához.

(b) \implies (d) nyilvánvaló.

²⁶ Toeplitz 1876.

²⁷ Fourier 1822.

²⁸ Parseval 1805.

(d) \implies (a). (Csak itt használjuk H teljességét.) A feltevésünk szerint $M^\perp = \{0\}$, úgyhogy alkalmazható a 13.3 következmény (12. o.). \square

Definíció. A H Hilbert-térbeli (e_j) ortonormált sorozat *teljes*, ha az egymással ekvivalens (a), (b), (c), (d) tulajdonságok teljesülnek. Azt is mondjuk ilyenkor, hogy (e_j) *ortonormált bázis*.

Példák.

- A fent definiált ℓ^2 -beli (e_j) ortonormált sorozat teljes, hiszen bármely ℓ^2 -beli $x = (x_j)$ esetén $(x, e_j) = x_j$ minden j -re, úgyhogy a Parseval-egyenlőség a norma *definíciójából* következik.
- Később megmutatjuk²⁹, hogy a fent definiált három másik ortonormált sorozat is teljes. Alkalmazva a Parseval-egyenlőséget a trigonometrikus rendszerre az $I = [-\pi, \pi]$ intervallumban az $x(t) \equiv t$ függvényre, megkapjuk Euler egyik nevezetes eredményét³⁰:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ha (e_j) ortonormált bázis H -ban, akkor az e_j vektorok *racióális* együtthatókkal vett véges lineáris kombinációi megszámlálható, sűrű halmazt alkotnak H -ban, tehát H *szeparábilis*. Megfordítva:

13.9. Állítás. Minden szeparábilis Hilbert-térnek van ortonormált bázisa.

Bizonyítás. Legyen (y_n) sűrű sorozat a Hilbert-térben. Legyen n_k az első olyan index, amelyre y_1, \dots, y_{n_k} k dimenziós alteret generál. Az y_{n_1}, y_{n_2}, \dots sorozat *lineárisan független*, továbbá

$$y_1, \dots, y_{n_k} \quad \text{és} \quad y_{n_1}, \dots, y_{n_k}$$

minden k -ra azonos alteret generálnak.

Az $x_k := y_{n_k}$ egyszerűsített jelöléssel élve az

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad \text{és} \quad e_n := \frac{x_n - \sum_{k < n} (x_n, e_k) e_k}{\|x_n - \sum_{k < n} (x_n, e_k) e_k\|}, \quad n = 2, 3, \dots$$

képletek könnyen ellenőrizhetően ortonormált sorozatot értelmeznek.³¹ Mi-
vel

$$x_1, \dots, x_n \quad \text{és} \quad e_1, \dots, e_n$$

²⁹ Lásd a 21.6 következményt, 262. o.

³⁰ Euler 1734/5 (heurisztikus bizonyítás), 1748 (§167).

³¹ Gram-Schmidt ortogonalizáció: első kötet, 9.1 állítás, 192. o.

nyilván azonos alteret generálnak minden n -re, az (e_n) sorozat által generált altér sűrű H -ban. \square

***Megjegyzés.** A fenti fejtegetésekben az elemek sorrendje nem játszik szerepet. Ezért a jelen szakasz eredményei kiterjeszthetők nem-szeparábilis Hilbert-terekre is, ha ortonormált sorozatok helyett tetszőleges *ortonormált családokat* tekintünk. ³²

13.5. Gyenge konvergencia. Kiválasztási tétel

A 13.1 szakasz végén szereplő példák mutatják, hogy a Bolzano–Weierstrass tétel nem érvényes végtelen dimenziós Hilbert-terekben: a korlátos, zárt halmazok nem mindig kompaktak. A következő példa azt is mutatja, hogy a végtelen dimenziós Hilbert-terek zárt gömbjei, bár korlátosak és zártak, *sohasem* kompaktak.

Példa. Minden (e_n) ortonormált sorozat korlátos, de nem tartalmaz konvergens részsorozatot, mert $\|e_n - e_m\| > 1$ minden $n \neq m$ -re.

Nevezetes eredmény, hogy a Bolzano–Weierstrass tétel kiterjeszthető minden Hilbert-térre a konvergenciafogalom alkalmas gyengítésével:

Definíció. Az (x_n) sorozat *gyengén* konvergál x -hez H -ban ³³, jelben $x_n \rightharpoonup x$, ha $(x_n, y) \rightarrow (x, y)$ minden rögzített $y \in H$ -ra.

Példák.

- *Véges* dimenzióban a gyenge konvergencia ekvivalens a normakonvergenciával (komponensenkénti konvergencia).
- *Végtelen* dimenzióban minden (e_n) ortonormált sorozat gyengén nullához tart. Ugyanis a $\sum |(x, e_n)|^2$ sor tetszőleges $x \in H$ -re konvergál a Bessel-egyenlőtlenség szerint (13.7 állítás, 19. o.), és így az általános tagja nullához tart: $(x, e_n) \rightarrow 0 = (x, 0)$. Emlékeztetünk arra, hogy (e_n) nem konvergál normában.

Íme a gyenge konvergencia elemi tulajdonságai:

13.10. Állítás.

(a) Egy sorozatnak legfeljebb egy gyenge határértéke lehet.

³² Lásd például Halmos 1957.

³³ Hilbert 1906.

- (b) Ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor $x_{n_k} \rightharpoonup x$ minden (x_{n_k}) részsorozatra is.
- (c) Ha $x_n \rightharpoonup x$ és $y_n \rightharpoonup y$, akkor $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$.
- (d) Ha $x_n \rightharpoonup x$ H -ban és $\lambda_n \rightarrow \lambda$ \mathbb{R} -ben, akkor $\lambda_n x_n \rightharpoonup \lambda x$ H -ban.
- (e) Legyen $K \subset H$ konvex zárt halmaz. Ha $x_n \in K$ minden n -re, és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $x \in K$.
- (f) Ha $\|x_n\| \leq L$ minden n -re, és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $\|x\| \leq L$.³⁴
- (g) Fennáll a következő ekvivalencia:

$$x_n \rightarrow x \iff x_n \rightharpoonup x \text{ és } \|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

Bizonyítás.

(a), (b) és (c) a definíció egyenes következményei.

(d) ugyanúgy igazolható, mint a skaláris szorzat folytonossága.³⁵

(e) Jelöljük y -nal x merőleges vetületét K -ra, akkor

$$(x_n - y, x - y) \leq 0$$

minden n -re a 13.2 tétel alapján (10. o.). Minthogy $x_n \rightharpoonup x$, innen határátmenettel $(x - y, x - y) \leq 0$ adódik. Így $\|x - y\|^2 \leq 0$, tehát $x = y \in K$.

(f) Alkalmazzuk (e)-t $K := \{z \in H : \|z\| \leq L\}$ -ra.

(g) Ha $x_n \rightarrow x$, vagyis ha $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, akkor

$$|(x_n, y) - (x, y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0$$

minden $y \in H$ -ra a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség szerint, és

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

a háromszög-egyenlőtlenség alapján.

A fordított irányban, ha $x_n \rightharpoonup x$ és $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, akkor az

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2(x_n, x)$$

azonosság jobboldala nullához tart, úgyhogy $x_n \rightarrow x$. □

Megjegyzések.

- A konvexitás feltétele nem hagyható el (e)-ben: minden ortonormált sorozat a zárt egységömb-felülethez tartozik, gyenge határértéke, a nullvektor azonban nem.

³⁴ Ekvivalens módon $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

³⁵ Topológia, a 3.4 állítás (h) része, 68. o.

- A norma-konvergenciát *erős* konvergenciának is hívják, mert (g) szerint maga után vonja a gyenge konvergenciát.

A gyenge sorozatok korlátossága mélyebb tulajdonság. A bizonyításhoz emlékeztetünk a Baire-lemma következő alakjára³⁶:

13.11. Állítás. *Ha egy teljes metrikus tér előáll megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként, akkor ezek közül legalább egynek van belső pontja.*

13.12. Állítás.

(a) Minden gyengén konvergens sorozat korlátos.

(b) Ha $x_n \rightarrow x$ és $y_n \rightarrow y$, akkor $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Példa. Ha (e_n) ortonormált sorozat, akkor az $x_n = y_n := e_n$ példa mutatja, hogy a skaláris szorzás folytonossága nem gyengíthető tovább: az $x_n \rightarrow x$ és $y_n \rightarrow y$ összefüggésekből általában nem következik, hogy $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Bizonyítás.

(a) Ha $x_n \rightarrow x$ H -ban, akkor az $n \mapsto (x_n, y)$ számsorozat minden $y \in H$ -ra konvergens, és így korlátos. Következésképpen az

$$F_k := \{y \in H : |(x_n, y)| \leq k \text{ minden } n\text{-re}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

zárt halmazok befedik H -t. Alkalmazva a Baire-lemmát, valamelyik F_k halmaz tartalmaz egy $B_{2r}(y)$ gömböt.

Ha $x_n \neq 0$, akkor

$$y + r\|x_n\|^{-1}x_n \in B_{2r}(y) \subset F_k,$$

és innen

$$|(x_n, y + r\|x_n\|^{-1}x_n)| \leq k.$$

Mínthogy $y \in F_k$, ebből következik, hogy

$$r\|x_n\| = |(x_n, r\|x_n\|^{-1}x_n)| \leq k + |(x_n, y)| \leq 2k.$$

Tehát az (x_n) sorozat korlátos.

(b) Az (y_n) sorozat korlátossága miatt

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + |(x, y_n) - (x, y)| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

³⁶ *Topológia*, 1.12 állítást, 20. o. A Baire-lemma funkcionálanalízisbeli hasznosságára Saks hívta fel a figyelmet: lásd Banach és Steinhaus 1927.

ha $n \rightarrow \infty$. □

A következő segédteétel egyszerűsíti a gyenge konvergencia ellenőrzését:

13.13. Lemma. *Legyen (x_n) korlátos H -beli sorozat, $x \in H$ és $\Delta \subset H$. Jelöljük M -mel a Δ által generált zárt alteret.*

Ha $(x_n, y) \rightarrow (x, y)$ minden $y \in \Delta$ -ra, akkor $(x_n, y) \rightarrow (x, y)$ minden $y \in M$ -re is.

Speciálisan, ha Δ generálja H -t, akkor $x_n \rightarrow x$.

Bizonyítás. Tetszőlegesen rögzített $z \in M$ -hez és $\varepsilon > 0$ -hoz olyan N természetes számot kell találnunk, hogy $|(x_n, z) - (x, z)| < \varepsilon$ minden $n \geq N$ -re.

Legyen L olyan nagy szám, hogy $\|x\| < L$, és $\|x_n\| < L$ minden n -re. A skaláris szorzat bilinearitása miatt $(x_n, y) \rightarrow (x, y)$ a Δ -beli vektorok bármely y véges lineáris kombinációjára. Válasszunk olyan y -t, amelyre $\|z - y\| < \varepsilon/(3L)$, majd olyan N -et, hogy $|(x_n, y) - (x, y)| < \varepsilon/3$ minden $n \geq N$ -re. Akkor minden $n \geq N$ -re fennáll a következő becslés is:

$$\begin{aligned} |(x_n, z) - (x, z)| &= |(x_n, z - y) + (x_n - x, y) + (x, y - z)| \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|z - y\| + |(x_n, y) - (x, y)| + \|x\| \cdot \|y - z\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Példa. Az ℓ^2 -beli $x^1 = (x_k^1)$, $x^2 = (x_k^2)$, ... sorozat pontosan akkor konvergál gyengén $x = (x_k)$ -hoz, ha korlátos, és ha $x_k^n \rightarrow x_k$ minden rögzített k -ra (komponensenkénti konvergencia).

Mínthogy az $x_k^n \rightarrow x_k$ konvergencia $(x^n, e_k) \rightarrow (x, e_k)$ alakban is írható, a feltétel szükségessége az előző állításból következik. A feltétel elégségessége a 13.13 lemmából adódik, mert (e_k) generálja ℓ^2 -t.

Általánosítsuk végül a Bolzano–Weierstrass tételt:

13.14. Tétel. *(Kiválasztási tétel³⁷) Hilbert-térben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen (x_n) korlátos sorozat H -ban, és L olyan konstans, hogy $\|x_n\| < L$ minden n -re. Jelöljük M -mel az (x_n) által generált zárt alteret. Vegyük észre, hogy M szeparábilis.

³⁷ Hilbert 1906, Schmidt 1908, Neumann 1929–30.

Ha M véges dimenziós, akkor (x_n) -nek van erősen konvergens részsorozata a szokásos Bolzano–Weierstrass tétel szerint³⁸, és ez maga után vonja a gyenge konvergenciát is (valójában ekvivalens vele). Tegyük fel ezért, hogy M végtelen dimenziós, és vegyünk fel benne egy (e_k) ortonormált bázist a 13.9 állítás alapján (23. o.).

Az $n \mapsto (x_n, e_1)$ számsorozat korlátos. A Bolzano–Weierstrass tétel szerint van tehát olyan $(x_n^1) \subset (x_n)$ részsorozat és c_1 valós szám, hogy $(x_n^1, e_1) \rightarrow c_1$.

Ezt követően, minthogy az $n \mapsto (x_n^1, e_2)$ számsorozat is korlátos, található olyan $(x_n^2) \subset (x_n^1)$ részsorozat és c_2 valós szám, hogy $(x_n^2, e_2) \rightarrow c_2$.

Rekurzióval folytatva egymást követő részsorozatoknak olyan végtelen

$$(x_n) \supset (x_n^1) \supset (x_n^2) \supset \dots$$

sorozatot és olyan c_k valós számokat kapunk, hogy

$$(x_n^k, e_k) \rightarrow c_k \quad (13.10)$$

minden rögzített $k = 1, 2, \dots$ -re. Alkalmazva a *Cantor-féle átlós módszert*³⁹ a $z_n := x_n^n$ képlet olyan $(z_n) \subset (x_n)$ részsorozatot definiál, amely gyengén $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ -hoz tart.

Ennek a bizonyítására jegyezzük meg először, hogy $(z_n, e_k) \rightarrow c_k$ minden rögzített k -ra, mert z_k, z_{k+1}, \dots részsorozata $(x_n^k)_{n=1}^{\infty}$ -nek.

Vegyünk most észre, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ sor erősen konvergál valamely, legfeljebb L normájú $z \in M$ ponthoz. A konvergenciához a 13.7 állítás alapján csak azt kell belátnunk, hogy $\sum_{k=1}^m |c_k|^2 \leq L^2$ minden rögzített m -ra. Minthogy

$$\sum_{k=1}^m |(z_n, e_k)|^2 \leq \|z_n\|^2 < L^2$$

minden n -re a Bessel-egyenlőtlenség miatt, ez az $n \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik. A $\|z\| \leq L$ egyenlőtlenség a norma folytonosságából következik.

Az eddigiek alapján $(z_n, e_k) \rightarrow c_k = (z, e_k)$ minden k -ra. Alkalmazva a 13.13 lemmát, innen $(z_n, y) \rightarrow (z, y)$ minden $y \in M$ -re.

Mutassuk meg végül, hogy $(z_n, y) \rightarrow (z, y)$ minden $y \in H$ -ra is. Jelöljük e célból u -val y merőleges vetületét M -re, akkor az előzőek szerint $(z_n, u) \rightarrow (z, u)$. Továbbá $y - u \perp M$, úgyhogy $(z_n - z, y - u) = 0$ minden n -re. Végeredményben tehát

$$(z_n, y) - (z, y) = (z_n - z, u) + (z_n - z, y - u) = (z_n - z, u) \rightarrow 0. \quad \square$$

³⁸ Topológia, 3.9 tétel, 75. o.

³⁹ Cantor 1890–91.

13.6. Folytonos és kompakt operátorok

A rövidség kedvéért egy $L : H \rightarrow H$ lineáris leképezést *operátornak* is nevezünk. Az operátorok folytonossága a gyenge konvergencia segítségével is jellemezhető:

13.15. Állítás. Az $A : H \rightarrow H$ operátorra a következő tulajdonságok ekvivalensek:

- (a) van olyan M konstans, hogy $\|Ax\| \leq M\|x\|$ minden $x \in H$ -ra;
- (b) korlátos halmazokat A korlátos halmazokba visz át;
- (c) teljesen korlátos halmazokat A teljesen korlátos halmazokba visz át;
- (d) ha $x_n \rightarrow x$, akkor $Ax_n \rightarrow Ax$;
- (e) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor $Ax_n \rightharpoonup Ax$;
- (f) ha $x_n \rightarrow x$, akkor $Ax_n \rightharpoonup Ax$.

Megjegyzés. A linearitása miatt elegendő (d)-t, (e)-t és (f)-et csak $x = 0$ -ra megkövetelni. Ugyanez a megjegyzés tehető a későbbi 13.17 állításra is.

A bizonyításhoz vezessük be az *adjungált operátor* fogalmát.

13.16. Állítás. Minden $A \in L(H, H)$ operátornak létezik pontosan egy olyan $A^* \in L(H, H)$ adjungáltja⁴⁰, hogy

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \text{minden } x, y \in H\text{-ra.} \quad (13.11)$$

Megjegyzés. Az állításból következik, hogy $A^{**} = A$ minden A -ra.

Bizonyítás. Tetszőlegesen rögzített $y \in H$ -ra a $\psi_y(x) := (Ax, y)$ képlet folytonos lineáris $\psi_y \in H'$ funkcionált definiál. Alkalmazva a Riesz–Fréchet tételt létezik pontosan egy olyan $y^* \in H$ vektor, hogy

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad \text{minden } x, y \in H\text{-re.}$$

Ez mutatja, hogy A^*y egyetlen lehetséges értéke y^* . Másrészt az $A^*y := y^*$ értelmezéssel (13.11) valóban teljesül.

Tetszőleges $y_1, y_2 \in H$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén y_1^*, y_2^* definíciójából és a skaláris szorzat bilinearitásából következik, hogy

$$(Ax, y_1 + y_2) = (x, A^*y_1 + A^*y_2) \quad \text{és} \quad (Ax, \lambda y) = (x, \lambda A^*y)$$

minden $x, y \in H$ -ra. Az $A^*(y_1 + y_2)$ és $A^*(\lambda y)$ vektorok unicitása folytán innen A^* linearitása adódik.

⁴⁰ Lagrange 1762–65 (471. o.), Riesz 1910, 1913 (L^2 -ben és ℓ^2 -ben).

Alkalmazva (13.11)-et $x = A^*y$ -nal minden $y \in H$ -ra az

$$\|A^*y\|^2 = (AA^*y, y) \leq \|AA^*y\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|A^*y\| \cdot \|y\|$$

becslés adódik; ez mutatja, hogy A^* folytonos, és $\|A^*\| \leq \|A\|$. \square

A 13.15 állítás bizonyítása.

Az (a) \iff (b), (a) \iff (c), (a) \implies (d) és (e) \implies (f) következtetések a definíciókból adódnak.

(d) \implies (e). Tetszőlegesen rögzített $y \in H$ -ra

$$(Ax_n - Ax, y) = (x_n - x, A^*y) \rightarrow 0,$$

mert $x_n \rightharpoonup x$.

(f) \implies (a). Ha (a) nem teljesül, akkor található olyan (y_n) sorozat, hogy $\|y_n\| = 1/n$ és $\|Ay_n\| > n$ minden n -re. Akkor $x_n \rightarrow 0$, de (Ax_n) nem konvergál gyengén, hiszen még csak nem is korlátos. \square

Vezessük be a folytonosság egy erősebb változatát:

13.17. Állítás. Az $A : H \rightarrow H$ operátorra a következő tulajdonságok ekvivalensek:

- (a) ha $(x_n) \subset H$ korlátos sorozat, akkor, (Ax_n) -nek van (erősen) konvergens részsorozata;
- (b) korlátos halmazokat A teljesen korlátos halmazokba visz át;
- (c) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor $Ax_n \rightarrow Ax$.

A bizonyításhoz felhasználjuk Cantor következő tételét, amelyet metrikus terekre már korábban⁴¹ igazoltunk:

13.18. Lemma. (Cantor⁴²) Topologikus térben x_n pontosan akkor tart x -hez, ha (x_n) bármely (x'_n) részsorozatának van x -hez tartó (x''_n) részsorozata.

Bizonyítás. Ha $x_n \rightarrow x$, akkor $x''_n \rightarrow x$, mert (x''_n) részsorozata (x_n) -nek is. Ha viszont $x_n \not\rightarrow x$, akkor van x -nek olyan V környezete és (x_n) -nek olyan (x'_n) részsorozata, amely teljes egészében V -n kívül fekszik. Akkor (x'_n) egyetlen részsorozata sem tarthat x -hez. \square

⁴¹ Topológia, 1.2 állítás, 9. o.

⁴² Cantor 1871, 89. o.

A 13.17 állítás bizonyítása.

(a) \iff (b) Elég emlékeztetnünk arra ⁴³, hogy egy H -beli B halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha bármely B -beli sorozatnak van (erősen) konvergens részsorozata.

(a) \implies (c) A fenti lemma miatt elegendő megmutatnunk, hogy (Ax_n) bármely (Ax_{n_k}) részsorozatának van Ax -hez tartó $(Ax_{n_{k_\ell}})$ részsorozata.

Mint hogy a teljesen korlátos halmazok korlátosak is, A folytonos a 13.15 állítás miatt, és így $x_n \rightarrow x$ maga után vonja az $Ax_n \rightarrow Ax$ relációt.

Az (x_{n_k}) sorozat korlátos lévén, (a) miatt létezik konvergens $Ax_{n_{k_\ell}} \rightarrow y \in H$ részsorozata. Meg kell még mutatnunk, hogy $y = Ax$. Az $Ax_n \rightarrow Ax$ és $Ax_{n_{k_\ell}} \rightarrow y$ relációkból következik, hogy $Ax_{n_{k_\ell}} \rightarrow Ax$ és $Ax_{n_{k_\ell}} \rightarrow y$; innen $y = Ax$ a gyenge határérték egyértelmősége miatt.

(c) \implies (a) Minden korlátos (x_n) sorozatnak van gyengén konvergens $x_{n_k} \rightarrow x$ részsorozata a 13.14 tétel szerint. Akkor $Ax_{n_k} \rightarrow Ax$ (c) miatt. \square

Definíció. Az $A : H \rightarrow H$ operátor *kompakt* vagy *teljesen folytonos* ⁴⁴, ha a 13.17 állításbeli ekvivalens tulajdonságok valamelyike teljesül.

Íme néhány alaperedmény:

13.19. Állítás.

- (a) Minden kompakt operátor folytonos.
- (b) Minden véges rangú ⁴⁵, folytonos operátor kompakt.
- (c) Ha $A, B \in L(H, H)$ és A kompakt, akkor AB és BA is kompakt.
- (d) A kompakt operátorok zárt alteret alkotnak $L(H, H)$ -ban.

Bizonyítás.

(a) és (b) a 13.15 és 13.17 állításokból adódik, ha figyelembe vesszük, hogy véges dimenziós terekben a gyenge és erős konvergencia egybeesik.

(c) a definíciók azonnali következménye.

(d) Csak a zártság nem nyilvánvaló. Legyenek A_1, A_2, \dots olyan kompakt operátorok, hogy $A_n \rightarrow A$ $L(H, H)$ -ban. Meg kell mutatnunk, hogy A is kompakt. Ha (x_k) korlátos sorozat H -ban, akkor a 13.14 tétel bizonyítását megismételve konstruálható olyan (z_k) részsorozat, hogy $(A_n z_k)$ minden

⁴³ Topológia, 1.27 következmény, 32. o. Jegyezzük meg azt is, hogy teljes metrikus térbeli teljesen korlátos halmaz lezárása (is teljesen korlátos, és így) kompakt.

⁴⁴ Hilbert 1906, Riesz 1917.

⁴⁵ Egy operátor véges rangú, ha az értékkészlete véges dimenziós.

rögzített n -re konvergens. Elég megmutatnunk, hogy akkor (Az_k) Cauchy-sorozat.

Legyen $\|x_n\| < L$ minden n -re. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk olyan n -et, hogy

$$\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3L},$$

majd olyan N -et, hogy

$$\|A_n z_k - A_n z_\ell\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{minden } k, \ell \geq N\text{-re.}$$

Akkor

$$\|Az_k - Az_\ell\| \leq \|(A - A_n)z_k\| + \|A_n z_k - A_n z_\ell\| + \|(A_n - A)z_\ell\| < \varepsilon$$

minden $k, \ell \geq N$ -re. \square

Példák.

- Ha H véges dimenziós, akkor minden $A : H \rightarrow H$ operátor folytonos, és így kompakt.
- Az $I : H \rightarrow H$ identikus leképezés nem kompakt, ha H végtelen dimenziós. Valóban, $e_n \rightharpoonup 0$ minden ortonormált sorozatra, de $Ie_n = e_n \not\rightarrow 0$ H -ban.

Kompakt operátorokra igen fontos példát szolgáltat a következő

13.20. Állítás. (Hilbert–Schmidt operátorok⁴⁶) Legyen (e_n) ortonormált bázis H -ban. Ha az a_{mn} valós számokra

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 < \infty,$$

akkor az

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) := \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n\right) e_m$$

képlet kompakt operátort definiál H -ban.

Példa. Intuitíve hasznos (a_{mn}) -t végtelen négyzetes mátrixnak tekinteni. Például a diagonális

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

⁴⁶ Hilbert 1906, Schmidt 1907.

mátrix Hilbert–Schmidt operátort reprezentál, ha $\sum |\lambda_n|^2 < \infty$, de kompakt operátort reprezentál már a gyengébb $\lambda_n \rightarrow 0$ feltétel mellett is.

Bizonyítás. Ha

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H,$$

akkor

$$\|Ax\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n \right|^2 \leq \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)$$

a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség alapján. Innen A folytonos operátor, és

$$\|A\| \leq \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 \right)^{1/2}.$$

Hasonlóan, az

$$A_N \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) := \sum_{m=1}^N \left(\sum_{n=1}^N a_{mn} x_n \right) e_m$$

képlet folytonos és véges rangú, tehát kompakt A_N operátorokat értelmez H -ban. Mivel $N \rightarrow \infty$ esetén analóg számítással

$$\|A - A_N\| \leq \left(\sum_{\max\{m,n\} > N} |a_{mn}|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

az előző állítás alapján A kompakt. □

13.7. Hilbert spektráltétele

Lineáris algebrából ismeretes, hogy minden szimmetrikus mátrix diagonalizálható. Ebben a szakaszban kiterjesztjük ezt az eredményt végtelen dimenziós Hilbert-terekre.

Definíció. Az $A \in L(H, H)$ operátor *szimmetrikus*⁴⁷ vagy *önadjungált*, ha $A^* = A$, vagyis ha

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{minden } x, y \in H\text{-ra.}$$

⁴⁷ Hilbert 1904, Schmidt 1907.

Példa. A Hilbert–Schmidt operátor önadjungált, ha $a_{mn} = a_{nm}$ minden m, n -re.

E szakasz fő eredménye a

13.21. Tétel. (Hilbert⁴⁸) Legyen A kompakt, önadjungált operátor egy végtelen dimenziós, szeparábilis H Hilbert-térben. Létezik olyan (e_k) ortonormált bázis H -ban és olyan (λ_k) valós számsorozat, hogy

$$Ae_k = \lambda_k e_k \quad \text{minden } k\text{-ra,}$$

és

$$\lambda_k \rightarrow 0.$$

Megjegyzések.

- A tétel véges dimenzióban is érvényben marad: ekkor az (e_k) , (λ_k) sorozatok végesek, és a $\lambda_k \rightarrow 0$ reláció elhagyandó. Ez ekvivalens a szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatóságára vonatkozó tétellel.
- Ortonormált sorozatok helyett ortonormált családokat használva a tétel kiterjeszthető a nem-szeparábilis esetre is.

Az alábbi bizonyítás Riesz Frigyesztől származik.⁴⁹ Jelöljük minden valós λ -ra $N(A - \lambda I)$ -vel az $A - \lambda I$ operátor *magját*, vagyis az A operátor λ sajátértékhez tartozó *sajátalterét*:

$$N(A - \lambda I) := \{x \in H : (A - \lambda I)x = 0\} = \{x \in H : Ax = \lambda x\}.$$

Ha A folytonos, akkor a sajátalterek zártak. A sajátalterek nem-nulla elemeit *sajátvektoroknak* nevezzük.

13.22. Lemma. Legyen $A \in L(H, H)$ önadjungált operátor.

(a) *A sajátalterei páronként ortogonálisak.*

(b) *Ha e_1, e_2, \dots, e_k sajátvektorai A -nak, akkor*

$$H_k := \{x \in H : x \perp e_1, \dots, x \perp e_k\}$$

invariáns zárt altere A -nak, vagyis

$$x \in H_k \implies Ax \in H_k.$$

Következésképpen A -nak a H_k -ra való leszűkítése $L(H_k, H_k)$ -beli önadjungált operátor.

⁴⁸ Hilbert 1904, 1906, Schmidt 1907, Rellich 1935.

⁴⁹ Riesz 1910.

(c) Az A operátor normája meghatározható a hozzárendelt kvadratikus alakból:

$$\|A\| = \sup\{|(Ax, x)| : \|x\| \leq 1\}. \quad (13.12)$$

Bizonyítás.

(a) Ha $Ae = \lambda e$, $Af = \mu f$ és $\lambda \neq \mu$, akkor

$$\lambda(e, f) = (Ae, f) = (e, Af) = (e, \mu f) = \mu(e, f),$$

ahonnan $(e, f) = 0$, tehát $e \perp f$.

(b) Ha $Ae_j = \lambda_j e_j$ minden $j = 1, \dots, k$ -ra és $x \in H_k$, akkor

$$(Ax, e_j) = (x, Ae_j) = (x, \lambda_j e_j) = \lambda_j (x, e_j) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

tehát $Ax \in H_k$.

(c) Jelöljük ideiglenesen N_A -val (13.12) jobboldalát. A nyilvánvaló

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2$$

becslés mutatja, hogy $N_A \leq \|A\|$. Az ellentétes irányú egyenlőtlenség igazolására jegyezzük meg először, hogy az

$$(A^2x, x) = (Ax, Ax)$$

egyenlőség következtében minden $\lambda > 0$ -ra fennáll az alábbi becslés:

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= (A(\lambda x + \lambda^{-1}Ax), \lambda x + \lambda^{-1}Ax) \\ &\quad - (A(\lambda x - \lambda^{-1}Ax), \lambda x - \lambda^{-1}Ax) \\ &\leq N_A\|\lambda x + \lambda^{-1}Ax\|^2 + N_A\|\lambda x - \lambda^{-1}Ax\|^2 \\ &= 2N_A(\lambda^2\|x\|^2 + \lambda^{-2}\|Ax\|^2). \end{aligned}$$

Ha $Ax \neq 0$, akkor a $\lambda^2 = \|Ax\|/\|x\|$ választással

$$4\|Ax\|^2 \leq 4N_A\|Ax\| \cdot \|x\|,$$

és innen

$$\|Ax\| \leq N_A\|x\|$$

adódik. Ez nyilvánvalóan igaz $Ax = 0$ esetén is, tehát $\|A\| \leq N_A$. \square

13.23. Lemma. Ha $A \in L(H, H)$ kompakt, önadjungált operátor és $H \neq \{0\}$, akkor A -nak van olyan λ sajátértéke, hogy $|\lambda| = \|A\|$.

Bizonyítás. Ha $A = 0$, akkor $\lambda = 0$ sajátértéke A -nak. Tegyük fel ezért, hogy $A \neq 0$. Alkalmazva az előző lemmát van olyan $(x_n) \subset H$ sorozat, hogy

$$\|x_n\| \equiv 1 \quad \text{és} \quad |(Ax_n, x_n)| \rightarrow \|A\|.$$

Alkalmazva a 13.14 tételt (27. o.) létezik gyengén konvergens $x_{n_k} \rightharpoonup x$ részsorozat. Akkor $\|x\| \leq 1$.

Továbbá A kompaktsága miatt $Ax_{n_k} \rightarrow Ax$, és így $(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (Ax, x)$ a 13.12 állítás miatt (26. o.). Minthogy $|(Ax_{n_k}, x_{n_k})| \rightarrow \|A\|$ az (x_n) sorozat definíciója miatt, innen

$$|(Ax, x)| = \|A\|,$$

és akkor szükségképpen $\|x\| = 1$. Ezek alapján

$$\|Ax - (Ax, x)x\|^2 = \|Ax\|^2 - |(Ax, x)|^2 \leq \|A\|^2 - \|A\|^2 = 0,$$

tehát $\lambda = (Ax, x)$ sajátértéke A -nak. \square

A 13.21 tétel bizonyítása. Az $A = 0$ eset nyilvánvaló. Ha $A \neq 0$, akkor az előző két lemma alapján van olyan e_1 egységvektor és λ_1 valós szám, hogy

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1 \quad \text{és} \quad |\lambda_1| = \|A\| > 0.$$

Ha valamely $k \geq 1$ -re már ismeretes e_1, \dots, e_k és $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, akkor tekintsük A -nak a leszűkítését H_k -ra. Ha ez nem nulla, akkor alkalmazzuk ismét az előző két lemmát: létezik olyan $e_{k+1} \in H_k$ egységvektor és λ_{k+1} valós szám, hogy

$$Ae_{k+1} = \lambda_{k+1} e_{k+1} \quad \text{és} \quad |\lambda_{k+1}| = \|A|_{H_k}\| > 0.$$

Vegyük észre, hogy $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$, mert $H_k \subset H_{k-1}$ ($H_0 := H$).

Ha a konstrukció véges sok lépés után megszakad, vagyis ha $A|_{H_k} = 0$ valamely k -ra, akkor elegendő kiegészíteni az e_1, \dots, e_k sorozatot H_k egy tetszőleges e_{k+1}, e_{k+2}, \dots ortonormált bázisával, és bevezetni minden $m > k$ -ra a $\lambda_m = 0$ számot.

Ha a konstrukció nem szakad meg, akkor $\lambda_k \rightarrow 0$. Az ellenkező esetben ugyanis az $(x_k) := (e_k/\lambda_k)$ sorozat korlátos volna, azonban az $(Ax_k) = (e_k)$ képsorozatnak nem volna konvergens sorozata, hiszen $\|e_k - e_j\| = \sqrt{2}$ ha $k \neq j$. Ez ellentmondana A kompaktságának.

Mivel $\lambda_k \neq 0$ minden k -ra, mindegyik e_k ortogonális A magjára. Mutassuk meg, hogy az (e_k) ortonormált sorozat teljes $N(A)^\perp$ -ben. Ha $x \in N(A)^\perp$ ortogonális minden e_k -ra, akkor $x \in H_k$ minden k -ra, tehát

$$\|Ax\| = \|A|_{H_k}x\| \leq |\lambda_k| \cdot \|x\|$$

minden k -ra. Minthogy $\lambda_k \rightarrow 0$, innen $Ax = 0$. Így, $x \in N(A)^\perp \cap N(A) = \{0\}$, vagyis $x = 0$.

Ha $N(A) \neq \{0\}$, akkor befejezésül egészítsük ki (e_k) -t az $N(A)$ mag tetszőleges (f_m) ortonormált bázisával⁵⁰; az f_m -ekhez hozzárendelt sajátértékek nullák. \square

***Megjegyzés.** A spektráltétel segítségével definiálhatjuk kompakt, önadjungált operátorok *folytonos* függvényeit. Vezessük be ehhez A *spektrumát*⁵¹ a

$$\sigma(A) := \{\lambda_k\} \cup \{0\}$$

képlettel; vegyük észre, hogy a spektrum kompakt. Ha $f \in C(\sigma(A))$, akkor az

$$f(A) \left(\sum x_k e_k \right) := \sum f(\lambda_k) x_k e_k$$

képlet egy $f(A) \in L(H, H)$ operátort definiál. Ez ésszerű definíció, hiszen valós együtthatós $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ polinomok esetén visszakapjuk a szokásos

$$p(A) := a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$$

értelmezést. A kapott $f : C(\sigma(A)) \rightarrow L(H, H)$ leképezés lineáris *izometria*, és $(fg)(A) = f(A)g(A)$ minden $f, g \in C(\sigma(A))$ -ra. Ez a megjegyzés rámutat a spektráltétel szoros kapcsolatára a *Banach-algebrákkal*, amelyre itt helyhiány miatt nem tudunk kitérni.⁵²

Tekintsük most az

$$x - Ax = y \tag{13.13}$$

inhomogén lineáris egyenletet és a hozzá kapcsolódó

$$z - Az = 0 \tag{13.14}$$

homogén lineáris egyenletet, ahol A adott H -beli operátor. A következő eredmény nagy fontossággal bír a parciális differenciálegyenletek elméletében⁵³:

⁵⁰ A két sorozat összefésülésével a tétel feltételeinek eleget tevő $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots$ sorozatot kapunk.

⁵¹ Hilbert 1906.

⁵² Lásd például Berberian 1966, Dunford–Schwartz 1957–1971, Halmos 1957, Rudin 1991, Szőkefalvi-Nagy 1942.

⁵³ Lásd például Riesz és Szőkefalvi-Nagy 1988, §81.

13.24. Állítás. (Fredholm-alternatíva⁵⁴) Legyen A kompakt, önadjungált operátor a H Hilbert-térben.

- (a) A (13.14) egyenlet megoldásai véges dimenziós M alteret alkotnak.
- (b) A (13.13) egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha $y \perp M$.
- (c) Ha $y \perp M$, akkor a (13.13) egyenlet megoldásai M_y affin alteret alkotnak, amelyik ugyanannyi dimenziós, mint M .

Megjegyzés. Két, egymást kölcsönösen kizáró eset lehetséges tehát: vagy létezik nem-triviális megoldása (13.14)-nak, vagy pedig (13.13) bármely $y \in H$ esetén egyértelműen megoldható.

Bizonyítás. Az egyszerűbb írásmód kedvéért tegyük fel, hogy H végtelen dimenziós és szeparábilis.

(a) Mivel $\lambda_n \rightarrow 0$ a 13.21 tétel szerint, az $N(A - \lambda I)$ sajátalterek minden nem-nulla λ -ra véges dimenziósak. Speciálisan $N(A - I)$ is véges dimenziós.

(b) A 13.21 tételbeli (e_n) és (λ_n) sorozatokat használva és x, y -t az

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \quad \text{és} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$$

alakban írva (13.13) a következő alakot ölti:

$$(1 - \lambda_n)x_n = y_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.15)$$

Innen látszik, hogy ha van megoldása (13.13)-nak, akkor $y_n = 0$ minden olyan n -re, amelyre $\lambda_n = 1$. Más szóval $y \perp M$, hisz M az $\{e_n : \lambda_n = 1\}$ halmaz által generált altér.

Megfordítva, $y \perp M$ esetén az

$$x_n := \begin{cases} (1 - \lambda_n)^{-1} y_n & \text{ha } \lambda_n \neq 1, \\ \text{tetszőleges} & \text{ha } \lambda_n = 1 \end{cases}$$

képlet a (13.15) egyenletrendszer megoldását szolgáltatja. Minthogy $(y_n) \in \ell^2$, és az $(1 - \lambda_n)^{-1}$ számsorozat korlátos (ugyanis 1-hez tart), fennáll az $(x_n) \in \ell^2$ reláció is. Következésképpen $x := \sum x_n e_n$ megoldása (13.13)-nak.

(c) $M_y = x + M$ a (13.13) egyenlet tetszőlegesen rögzített x megoldására.

□

⁵⁴ Fredholm 1900, 1903.

13.8. * A komplex eset

A jelen fejezet legtöbb eredménye könnyen adaptálható a komplex esetre. Tekintsük át röviden a szükséges változtatásokat. Emlékeztetünk arra, hogy minden komplex vektortér valós vektortérnek is tekinthető, ha csak a valós számokkal való szorzást engedjük meg. Így például valós vektortérként \mathbb{C}^N izomorf \mathbb{R}^{2N} -nel.

Legyenek X és Y komplex vektorterek. Azt mondjuk, hogy az $A : X \rightarrow Y$ leképezés *lineáris*, ha

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{és} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

minden $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén, és *antilineáris* vagy *konjugáltan lineáris*, ha

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{és} \quad A(\lambda x) = \bar{\lambda} A(x)$$

minden $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén.

13.1 szakasz. A komplex X vektortéren értelmezett, valós értékű $\|\cdot\|$ függvényt *normának* nevezzük⁵⁵, ha minden $x, y, z \in X$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén fennállnak a következő tulajdonságok:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Az utolsó tulajdonságot továbbra is *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük.

Normával ellátott vektorteret *normált térnek* nevezünk. A norma a szokásos módon metrikát definiál, és a megfelelő topológiára nézve a norma folytonos függvény.

A komplex X vektortéren értelmezett komplex értékű $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt *skaláris szorzatnak* nevezzük, ha minden $x, y, z \in X$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ esetén fennállnak a következő tulajdonságok:

- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
- $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
- $(x, x) \geq 0$,
- $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

⁵⁵ Wiener 1922.

Skaláris szorzattal ellátott vektorteret *euklideszi térnek* nevezünk. A skaláris szorzat a szokásos módon normát definiál, amely eleget tesz a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenségnek és a paralelogramma-azonosságnak. A skaláris szorzat folytonos a norma-topológiára nézve.

A teljes euklideszi tereket *Hilbert-tereknek* nevezzük.⁵⁶ Például \mathbb{C}^N Hilbert-tér az

$$(x, y) := x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_N \overline{y_N}$$

skaláris szorzattal, és a $\sum |x_n|^2 < \infty$ feltételnek eleget tevő $x = (x_n)$ komplex számsorozatok ℓ^2 halmaza Hilbert-tér az

$$(x, y) := \sum x_n \overline{y_n}$$

skaláris szorzattal. Viszont adott kompakt I intervallumon folytonos, komplex értékű függvények csak *nem-teljes* euklideszi teret alkotnak az

$$(f, g) := \int_I f \overline{g} \, dx$$

skaláris szorzatra nézve.

13.2 szakasz. Az 13.2 tételbeli (13.2) feltételt (10. o.) a következőre kell cserélni:

$$y \in K, \text{ és } \Re(x - y, v - y) \leq 0 \text{ minden } v \in K\text{-ra}$$

(az \Re betű a valós részre utal), a bizonyításban pedig minden (\cdot, \cdot) skaláris szorzat helyett $\Re(\cdot, \cdot)$ írandó.

13.3 szakasz. A 13.4 állításbeli (13.4) formulában, valamint a 13.5 tételbeli (13.5) formulában $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ helyett $\Re\varphi(a)$ és $\Re\varphi(b)$ írandó.

A Riesz–Fréchet tételben (17. o.) a j leképezés a komplex esetben *anti-lineáris*.

13.4 szakasz. Minden eredmény és bizonyítás érvényben marad, csak a Bessel-egyenlőség igazolásakor kell (x, e_k) helyett $\overline{(x, e_k)}$ -t írni.

A trigonometrikus rendszer elegánsabb alakot ölt: az $e^{ikt}/\sqrt{2\pi}$ függvények, ahol k az összes egész számon végigfut, ortonormált bázist alkotnak $L^2(I)$ -ben bármely 2π hosszúságú I intervallumra.

13.5 szakasz. Minden eredmény és bizonyítás érvényben marad, mindössze a 13.10 állítás (e) részének igazolásakor (25. o.) írandó

$$\Re(x_n - y, x - y) \leq 0$$

$(x_n - y, x - y) \leq 0$ helyett.

⁵⁶ Hilbert 1904, Neumann 1927, Löwig 1934, Rellich 1935.

13.6 szakasz. Nincs szükség változtatásra; a Hilbert–Schmidt-féle 13.20 állítás (32. o.) komplex a_{mn} számokra is érvényes marad.

13.7 szakasz. Minden érvényben marad egyetlen megjegyzéssel: ha komplex a_{mn} számokat is tekintünk, akkor $a_{mn} = a_{nm}$ helyett az $a_{mn} = \overline{a_{nm}}$ feltételek biztosítják a megfelelő Hilbert–Schmidt operátor önadjungáltságát.

A komplex esetben a spektráltétel általánosítható nem feltétlenül önadjungált operátorokra. Ismertessük a megfelelő eredményeket⁵⁷:

Definíció. Az $A \in L(H, H)$ operátor *normális*⁵⁸, ha $AA^* = A^*A$.

Példák.

- Minden önadjungált operátor normális.
- Minden unitér operátor normális. (Az $A \in L(H, H)$ operátor *unitér*, ha invertálható és $A^{-1} = A^*$, vagyis ha $AA^* = A^*A = I$.)

13.25. Tétel. (Normális operátorok spektráltétele⁵⁹) Legyen A kompakt, normális operátor a végtelen dimenziós, szeparábilis, komplex H Hilbert-térben. Létezik olyan (e_k) ortonormált bázis H -ban és olyan (λ_k) komplex számsorozat, hogy

$$Ae_k = \lambda_k e_k \quad \text{minden } k\text{-ra,}$$

és

$$\lambda_k \rightarrow 0.$$

⁵⁷ Bernau–Smithies 1963 a 13.7 szakaszbelihez hasonló bizonyítást ad. Egy másik bizonyítást ismertet Halmos 1957.

⁵⁸ Frobenius 1878 (391. o.) véges dimenzióban, Toeplitz 1918.

⁵⁹ Frobenius 1878 (391. o.) véges dimenzióban, Toeplitz 1918 az általános esetben. Neumann 1929–30 nem-folytonos normális operátorokra is általánosította a tételt.

14. fejezet

Banach-terek

A matematikus, akárcsak a festő és a költő, formákat alkot. Az általa létrehozott formák azért tartósabbak, mert gondolatokból készülnek.

G. Hardy

Az alkalmazásokban sokszor szükség van a Hilbert-tereknél általánosabb struktúrákra, ahol az ortogonalitás fogalma már nem értelmezhető, de az előző fejezetben megismert eredmények többsége érvényben marad. Ebben a fejezetben a Banach-terekkel foglalkozunk.

Javasoljuk az olvasónak, hogy első olvasáskor hagyja ki az ℓ^1 , ℓ^∞ és c_0 terekre vonatkozó eredményeket, és koncentráljon az ℓ^p terekre a homogénabb $1 < p < \infty$ esetben.

14.1. Normált terek

A normált terekkel már a *Topológiában* megismerkedtünk, de nem tanulmányoztuk részletesen a végtelen dimenziós esetet. Ez a jelen fejezet fő célja.

Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.¹

Példák.

- Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.²
- Minden Hilbert-tér Banach-tér is.

¹ Riesz 1917, Banach 1922, Hahn 1922, Wiener 1922. Fréchet 1928 terminológiája.

² *Topológia*, 3.9 tétel, 75. o.

- Ha K nem-üres halmaz és X Banach-tér, akkor a korlátos $f : K \rightarrow X$ függvények $\mathcal{B}(K, X)$ normált tere teljes az

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in K} \|f(t)\|_X$$

normára nézve.³ Ha $X = \mathbb{R}$, akkor röviden csak $\mathcal{B}(K)$ -t írunk.

- Ha K nem-üres topologikus tér és X Banach-tér, akkor a korlátos és folytonos $f : K \rightarrow X$ függvények $C_b(K, X)$ halmaza zárt altere $\mathcal{B}(K, X)$ -nek, és így Banach-tér.⁴ Ha K kompakt, akkor egyszerűen $C(K, X)$ -et írunk. Ha $X = \mathbb{R}$, akkor csak $C_b(K)$ -t, illetve $C(K)$ -t írunk.
- Ha U nem-üres nyílt halmaz valamely normált térben, Y Banach-tér, és k természetes szám, akkor azon C^k osztályú $f : U \rightarrow Y$ függvények, amelyekre az $f, f', \dots, f^{(k)}$ függvények mind korlátosak, egy $C_b^k(U, Y)$ Banach-teret alkotnak az

$$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^{(k)}\|_\infty$$

normára nézve.⁵

- A korlátos valós $x = (x_n)$ számsorozatok ℓ^∞ halmaza Banach-tér az

$$\|x\|_\infty := \sup |x_n|$$

normára nézve, mert $\ell^\infty = \mathcal{B}(K)$ a $K := \{1, 2, \dots\}$ választással.

- A 0-hoz tartó valós számsorozatok c_0 halmaza zárt altere ℓ^∞ -nek, tehát Banach-tér.⁶

A következőkben még két fontos példát ismertetünk. Jelöljük $1 \leq p < \infty$ esetén ℓ^p -vel azon $x = (x_n)$ valós számsorozatok halmazát, amelyekre $\sum |x_n|^p < \infty$, és legyen

$$\|x\|_p := \left(\sum |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

14.1. Állítás. Legyenek $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugált kitevők, vagyis $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

³ Topológia, 1.7 állítás, 16. o.

⁴ Topológia, 2.11 állítás, 42. o.

⁵ Topológia, 98. és 109. o.

⁶ Adaptálható a Topológiabeli 2.11 állítás bizonyítása, 42. o.

(a) (Hölder-egyenlőtlenség⁷) Ha $x \in \ell^p$ és $y \in \ell^q$, akkor $xy \in \ell^1$ és

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

(b) (Minkowski-egyenlőtlenség⁸) Ha $x, y \in \ell^p$, akkor $x + y \in \ell^p$ és

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

(c) ℓ^p Banach-tér.

Bizonyítás.

(a) és (b) nyilvánvaló a $p = 1$ és $p = \infty$ esetekben. Ha $1 < p < \infty$, akkor $1 < q < \infty$. Alkalmazva az \mathbb{R}^N -beli Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenséget⁹

$$\sum_{n=1}^N |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right)^{1/q}$$

és

$$\left(\sum_{n=1}^N |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^p \right)^{1/p}$$

minden $N \geq 1$ -re; a keresett eredmények $N \rightarrow \infty$ esetén adódnak.

(c) A Minkowski-egyenlőtlenség felhasználásával könnyen látható, hogy ℓ^p vektortér és $\|\cdot\|_p$ norma.

Ha $(x_n^1), (x_n^2), \dots$ Cauchy-sorozat ℓ^p -ben, akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan k_0 index, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n^\ell|^p < \varepsilon \quad (14.1)$$

minden $k, \ell \geq k_0$ esetén. Innen először is következik, hogy (x_n^k) Cauchy-sorozat minden rögzített n -re, és így konvergál valamely x_n valós számhoz.

Ezután $\ell \rightarrow \infty$ esetén (14.1)-ből adódik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n|^p \leq \varepsilon$$

minden $k \geq k_0$ -ra. (Elég igazolni, hogy $\sum_{n=1}^N |x_n^k - x_n|^p \leq \varepsilon$ minden N -re.) Következésképpen $(x_n) \in \ell^p$, és $(x_n^k) \rightarrow (x_n)$ ℓ^p -ben. \square

⁷ Rogers 1888, Hölder 1889, Riesz 1913.

⁸ Minkowski 1896 (115–117. o.), Riesz 1913.

⁹ Topológia, 3.2 állítás, 65. o.

Emlékeztetünk arra¹⁰, hogy ha X és Y normált terek, akkor az $A : X \rightarrow Y$ folytonos lineáris leképezések egy $L(X, Y)$ normált teret alkotnak az

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

normára nézve.

14.2. Állítás. *Ha X normált tér és Y Banach-tér, akkor $L(X, Y)$ Banach-tér. Speciálisan a normált terek duálisai Banach-terek.*

Bizonyítás. Ha (A_n) Cauchy-sorozat $L(X, Y)$ -ben, akkor minden rögzített $x \in X$ -re $(A_n x)$ Cauchy-sorozat Y -ban, hiszen $m, n \rightarrow \infty$ esetén

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0.$$

Míthogy Y teljes, $(A_n x)$ konvergál valamely $Ax \in Y$ ponthoz.

Az A_n leképezések linearitása miatt A is lineáris. Míthogy az (A_n) Cauchy-sorozat szükségképpen korlátos is, alkalmas M konstanssal

$$\|A_n x\| \leq M\|x\|$$

minden n -re és x -re. Innen $n \rightarrow \infty$ esetén $\|A\| \leq M$ adódik, tehát $A \in L(X, Y)$.

Végül adott $\varepsilon > 0$ -hoz rögzítsünk olyan N -et, hogy

$$\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

minden $m, n > N$ -re. Akkor

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

minden $m, n > N$ -re és $x \in X$ -re. Innen $m \rightarrow \infty$ esetén

$$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon\|x\|$$

adódik minden $n > N$ -re és $x \in X$ -re, tehát $A_n \rightarrow A$ $L(X, Y)$ -ben. \square

***Megjegyzés.** Ha $X = Y$ Banach-tér, akkor $L(X, X)$ nemcsak Banach-tér, de *Banach-algebra* is. Ez azt jelenti, hogy értelmezve van az operátorok közötti szorzás művelete is, amely kompatibilis a normált tér struktúrájával. (Itt a szorzás a kompozíció.) Pontosabban, ha $A, B, C \in L(X, X)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
- $(A + B)C = AC + BC$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

¹⁰ Topológia, 3.13 állítás, 79. o.

Jegyezzük meg, hogy a szorzás nem kommutatív általában: $AB \neq BA$.

***Példa.** Legyen $I = [a, b]$ nem-degenerált kompakt intervallum és $1 \leq p < \infty$. Korábban láttuk¹¹, hogy $C(I)$ normált tér az

$$\|x\|_p := \left(\int_I |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

normára nézve. Megmutatjuk, hogy ez a norma nem teljes. Legyen $I = [0, 2]$ az egyszerűség kedvéért, és tekintsük újra az előző fejezetbeli

$$x_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq t \leq 1, \\ n(t-1) & \text{ha } 1 \leq t \leq (n+1)/n, \\ 1 & \text{ha } (n+1)/n \leq t \leq 2 \end{cases}$$

sorozatot: lásd a 13.2 ábrát a 7. oldalon.

Ha $m > n \rightarrow \infty$, akkor

$$\|x_m - x_n\|_p^p = \int_1^{(n+1)/n} |x_m(t) - x_n(t)|^p dt \leq 1/n \rightarrow 0,$$

tehát (x_n) Cauchy-sorozat. Ha konvergálna valamely $x \in C(I)$ függvényhez, akkor

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt = \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^p dt \leq \|x - x_n\|_p^p \rightarrow 0,$$

és így $x = 0$ volna $[0, 1]$ -ben. Másrészt alkalmazva az $x \mapsto |x|^p$ függvény konvexitásából következő

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

egyenlőtlenséget, fennállna az

$$\begin{aligned} \int_1^2 |x(t) - 1|^p dt &\leq 2^{p-1} \int_1^2 |x(t) - x_n(t)|^p dt + 2^{p-1} \int_1^2 |x_n(t) - 1|^p dt \\ &\leq 2^{p-1} \|x - x_n\|_p^p + 2^{p-1} \int_1^{(n+1)/n} |x_n(t) - 1|^p dt \\ &\leq 2^{p-1} \|x - x_n\|_p^p + \frac{2^{p-1}}{n} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

reláció is, ahonnan $x = 1$ $[1, 2]$ -ben. De ez lehetetlen, mert két különböző értéket kaptunk $x(1)$ -re.

¹¹ Topológia, 3.3 állítás, 67. o.

14.3. Állítás. *Minden normált tér teljessé tehető, vagyis Banach-tér sűrű alterének tekinthető.*

Bizonyítás. Könnyen adaptálható a 13.1 állítás bizonyítása (6. o.). Később más bizonyítást is adunk.¹² \square

Definíció. Jelöljük $L^p(I)$ -vel a $C(I)$ teljessé tételével kapott Banach-teret.

Megjegyzés. Később¹³ konkrét interpretációt adunk az ilyen terekre.

14.2. Konvex halmazok szétválasztása

A konvex halmazok szétválasztásáról szóló 13.5 tétel (14. o.) minden normált térben érvényes marad, és ennek rengeteg fontos alkalmazása van. A bizonyítás azonban lényegesen különböző a Hilbert-térbelitől: normált terek esetén már az sem nyilvánvaló, hogy létezik nem-nulla folytonos lineáris funkcionál.

Tanulmányozzuk először a vektorterek hipersíkjait.

Definíciók. Legyen X vektortér.

- X -beli *lineáris funkcionálon* egy $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezést értünk. Az X -beli lineáris funkcionálok X^* halmaza természetes vektortérstruktúrával van ellátva.
- X -beli *hipersíkon* maximális valódi alteret értünk. Más szóval a H valódi altér akkor hipersík, ha tetszőleges $a \in X \setminus H$ esetén H és a generálja X -et.
- X -beli *affin hipersíkon* egy hipersík eltolóját értjük.

14.4. Lemma. *Az X -beli hipersíkok az X -beli nem-nulla lineáris funkcionálok magjai.*

Bizonyítás. Ha $\varphi \in X^*$ és $\varphi \neq 0$, akkor $H := \varphi^{-1}(0)$ X valódi altere. Továbbá, ha $a \in X \setminus H$, akkor H és a generálják X -et, hiszen közvetlen számolás mutatja, hogy

$$x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a \in H$$

¹² Lásd a 14.21 állítás (b) részét, 67. o.

¹³ Lásd a 21.5 állítás (b) részét, 260. o.

bármely $x \in X$ -re. (Itt $\varphi(a) \neq 0$, mert $a \notin H$.)

Megfordítva, ha H X -beli hipersík, akkor tetszőlegesen rögzített $a \in X \setminus H$ pont esetén minden $x \in X$ -nek van egy egyértelmű $x = ta + h$ alakú felbontása, ahol $t \in \mathbb{R}$ és $h \in H$. (Az egyértelműség az $a \notin H$ feltételből adódik.) A $\varphi(x) := t$ képlet olyan nem-nulla lineáris funkcionált definiál X -ben, amelynek H a magja. \square

A lineáris funkcionálok folytonosságának tanulmányozásához szükségünk lesz a következő fogalomra:

Definíció. Az X vektortérbeli U halmaz *körszerű*, ha

$$x \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad |\lambda| \leq 1 \quad \implies \quad \lambda x \in U.$$

Példák.

- Minden altér körszerű.
- A normált terek 0 középpontú nyílt és zárt gömbjei körszerűek.
- Tetszőlegesen sok körszerű halmaz metszete is körszerű.
- Körszerű halmaz lineáris képe is körszerű.

14.5. Lemma. Legyen U körszerű halmaz az X vektortérben és $\varphi \in X^*$ olyan nem-nulla lineáris funkcionál, amelyre $\varphi(a) = 1$. Akkor

$$(a + U) \cap \varphi^{-1}(0) = \emptyset \quad \iff \quad |\varphi| < 1 \quad U\text{-n}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} (a + U) \cap \varphi^{-1}(0) = \emptyset &\iff 0 \notin \varphi(a + U) = 1 + \varphi(U) \quad (\text{mert } \varphi(a) = 1) \\ &\iff -1 \notin \varphi(U) \\ &\iff \varphi(U) \subset (-1, 1) \quad (\text{mert } U \text{ körszerű}). \quad \square \end{aligned}$$

Vizsgáljuk most meg a *normált terek* hipersíkjait.

14.6. Lemma.

- (a) Normált térbeli hipersík vagy zárt vagy sűrű.
 (b) A $H = \varphi^{-1}(0)$ alakú hipersík ($\varphi \in X^*$) pontosan akkor zárt, ha φ folytonos.

Megjegyzés. Ha X véges dimenziós, akkor $X^* = X'$, hiszen minden $\varphi \in X^*$ folytonos.¹⁴ Ha viszont X végtelen dimenziós, akkor X' valódi altere X^* -nak.

¹⁴ Topológia, 3.14 tétel, 79. o.

Bizonyítás.

(a) Ha H zárt, akkor $\overline{H} = H$ és $H \neq X$, tehát H nem sűrű.

Ha H nem zárt, akkor \overline{H} olyan altere X -nek, amelyre $H \subset \overline{H}$ és $H \neq \overline{H}$. Innen H maximalitása miatt következik, hogy $\overline{H} = X$, tehát H sűrű.

(b) Ha φ folytonos, akkor $\varphi^{-1}(0)$ zárt.¹⁵ Fordítva, ha $\varphi^{-1}(0)$ zárt, akkor válasszunk olyan a pontot, amelyre $\varphi(a) = 1$, majd olyan kis $r > 0$ számot, hogy $\varphi \neq 0$ a $B(a; r)$ gömbben. Alkalmazva az előző lemmát $|\varphi| < 1$ az $U := B(0; r)$ gömbben. Ebből következik, hogy $\|\varphi\| \leq 1/r$. \square

Készen állunk a 13.5 tétel (14. o.) általánosítására; lásd a 14.1-14.3 ábrákat.

14.7. Tétel. *Legyen A és B két diszjunkt nem-üres konvex halmaz az X normált térben.*

(a) (Mazur¹⁶) *Ha A nyílt, és M A -tól diszjunkt altér, akkor létezik olyan zárt H hipersík, hogy*

$$M \subset H \quad \text{és} \quad A \cap H = \emptyset.$$

(b) (Eidelheit¹⁷) *Ha A nyílt, akkor létezik olyan φ lineáris funkcionál X -ben, hogy alkalmas c valós számmal*

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b) \quad \text{minden } a \in A\text{-ra és } b \in B\text{-re.}$$

(c) (Tukey¹⁸) *Ha A zárt és B kompakt, akkor létezik olyan φ lineáris funkcionál X -ben, hogy alkalmas c_1, c_2 valós számokkal*

$$\varphi(a) \leq c_1 < c_2 \leq \varphi(b) \quad \text{minden } a \in A\text{-ra és } b \in B\text{-re.} \quad (14.2)$$

Megjegyzés. Alkalmazva (a)-t $M = \{0\}$ -val adódik, hogy konvex nyílt halmaz bármely határpontjához létezik *támasztó hipersík*; lásd a 14.1 ábrát.

A bizonyítás a következő segédtelemen alapul:

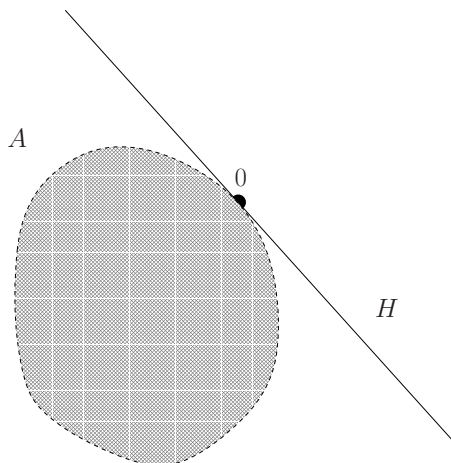
14.8. Lemma. *Tekintsünk az X normált térben egy H alteret és egy tőle diszjunkt nem-üres konvex, nyílt A halmazt. Ha H nem hipersík, akkor létezik olyan $x \notin H$ pont, hogy a H és x által generált altér is diszjunkt A -tól.*

¹⁵ Topológia, 2.9 állítás, 41. o.

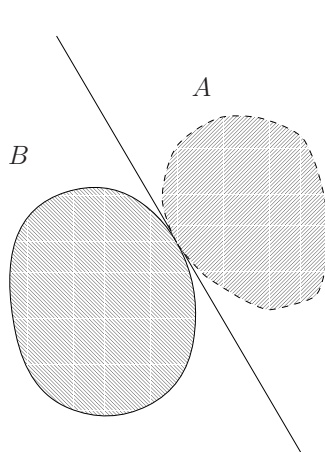
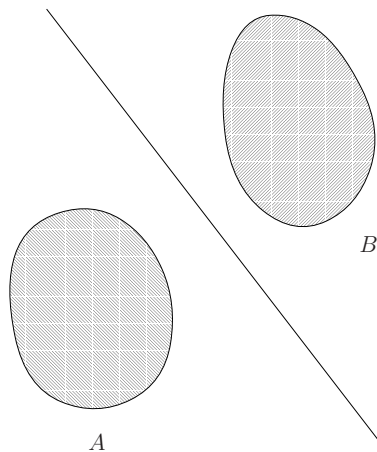
¹⁶ Brunn 1910 és Minkowski 1910 (§16, 33—35. o.) véges dimenzióban, Ascoli 1932 (szeparábilis terekben, 53–56. és 205. o.), Mazur 1933.

¹⁷ Eidelheit 1936.

¹⁸ Tukey 1942.



14.1. ábra. Mazur tétele

14.2. ábra. Eidelheit
tétele14.3. ábra. Tukey
tétele

Bizonyítás. Ha a H és x által generált altér metszi A -t, akkor $a = h + sx$ alkalmas $a \in A$, $h \in H$ vektorokkal és s valós számmal; itt $s \neq 0$, mert $A \cap H = \emptyset$. Innen következik, hogy

$$x = -s^{-1}h + s^{-1}a \in H + \bigcup_{t \in \mathbb{R}} tA.$$

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy $H + \bigcup_{t \in \mathbb{R}} tA$ valódi részhalmaza X -nek.

Tegyük fel indirekt, hogy

$$H \cup H_+ \cup H_- = X, \quad (14.3)$$

ahol a

$$H_+ := \bigcup_{t>0} tA \quad \text{és} \quad H_- := -H_+ = \bigcup_{t<0} tA$$

jelöléseket használjuk. Vegyük észre, hogy nyílt halmazok egyesítéseként H_+ és H_- nyílt halmazok, és hogy a H , H_+ , H_- halmazok páronként diszjunktak. Ha ugyanis létezne például egy $x \in H_+ \cap H_-$ pont, akkor

$$x = h + ta = h' - t'a'$$

volna alkalmas

$$h, h' \in H, \quad a, a' \in A \quad \text{vektorokkal és} \quad t, t' > 0 \quad \text{számokkal.}$$

De ekkor

$$a'' := \frac{ta + t'a'}{t + t'} = \frac{h' - h}{t + t'} \in H$$

teljesülne, holott A konvexitása miatt $a'' \in A$, és $A \cap H = \emptyset$.

A $H_+ \cap H = \emptyset$ és $H \cap H_- = \emptyset$ relációk bizonyítása analóg: megismételhetők a fenti bizonyítás $t' = 0$ -val, illetve $t = 0$ -val.

Rögzítsünk most egy tetszőleges $a \in H_+$ pontot, és tekintsük a H és a által generált M alteret. Mivel feltevésünk szerint H nem hipersík, létezik egy $b \in X \setminus M$ pont. Akkor $b \in H_+ \cup H_-$ (14.3) miatt. Szükség esetén b -t $-b$ -re cserélve feltehető, hogy $b \in H_-$.

Minthogy $b \notin M$, az a és b által meghatározott L egyenes nem metszi H -t. Következésképpen, újra felhasználva (14.3)-at, L mint topologikus tér a diszjunkt nyílt $L \cap H_+$ és $L \cap H_-$ részhalmazok egyesítése. Minthogy a és b választása miatt ezek egyike sem üres, ez ellentmond L összefüggő voltának. \square

A 14.7 tétel bizonyítása.

(a) Tekintsük X azon H altereinek a rendszerét, amelyekre $M \subset H$ és $A \cap H = \emptyset$. Nyilvánvalóan teljesülnek a Zorn-lemma feltételei¹⁹, van tehát a rendszernek (legalább egy) *maximális* H eleme. Az előző lemma alapján H hipersík. Minthogy H nem metszi a nem-üres A nyílt halmazt, H nem sűrű, de akkor zárt a 14.6 lemma szerint (48. o.).

¹⁹ *Topológia*, 2.23 lemma, 52. o.

(b) Alkalmazzuk (a)-t A helyett $A - B$ -vel és $M := \{0\}$ -val: olyan $\varphi \in X'$ lineáris funkcionált kapunk, amelyre $\varphi(A)$ és $\varphi(B)$ diszjunkt konvex halmazok \mathbb{R} -ben, vagyis diszjunkt intervallumok; speciálisan φ nem nulla. Szükség esetén φ -t $-\varphi$ -re cserélve feltehető, hogy

$$\sup_A \varphi \leq \inf_B \varphi.$$

Legyen $c := \inf_B \varphi$, akkor innen

$$\varphi(a) \leq c \leq \varphi(b) \quad \text{minden } a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén.}$$

Minthogy A és B egyike sem üres, $-\infty < c < \infty$. Végül A nyíltságából könnyen adódik, hogy $\varphi < c$ A -n, ugyanis $\varphi(A)$ *nyílt* intervallum.

(c) Jegyezzük meg mindenekelőtt, hogy $\text{dist}(A, B) > 0$. Az ellenkező esetben volnának ugyanis olyan $(a_n) \subset A$ és $(b_n) \subset B$ sorozatok, amelyekre $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$. Minthogy B kompakt, ekkor létezne konvergens $b_{n_k} \rightarrow b \in B$ részsorozat. Akkor $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ miatt $a_{n_k} \rightarrow b$ is teljesülne, úgyhogy $b \in A$ volna, hiszen A zárt, ellentmondva A és B diszjunkttségének.

Rögzítsünk egy $0 < r < 2^{-1} \text{dist}(A, B)$ számot, és vezessük be A és B alábbi környezeteit:

$$A' := A + B_r(0), \quad B' := B + B_r(0).$$

Alkalmazva (b)-t az A', B' halmazokra létezik olyan $\varphi \in X'$ lineáris funkcionál és c valós szám, hogy

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b) \quad \text{minden } a \in A' \text{ és } b \in B' \text{ esetén.}$$

Ebből

$$\varphi(a) + r\|\varphi\| \leq c \leq \varphi(b) - r\|\varphi\| \quad \text{minden } a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén.}$$

Innen a keresett eredmény $c_1 := c - r\|\varphi\|$ és $c_2 := c + r\|\varphi\|$ választással adódik. \square

A fenti tétel segítségével általánosíthatjuk a 13.3 következményt (12. o.) a generált alterekre. Vezessük be $D \subset X$ és $\Delta \subset X'$ esetén a

$$D^\perp := \{\varphi \in X' : \varphi(x) = 0 \text{ minden } x \in D\text{-re}\}$$

és

$$\Delta^\perp := \{x \in X : \varphi(x) = 0 \text{ minden } \varphi \in \Delta\text{-ra}\}$$

ortogonális komplementumokat. Ha X Hilbert-tér, akkor X és X' azonosítása esetén visszkapjuk az ortogonális komplementum korábbi definícióját (12. o.).

14.9. Következmény. (Banach²⁰) Legyen X normált tér, $D \subset X$, M pedig X altér.

- (a) A D által generált zárt altér megegyezik $(D^\perp)^\perp$ -sel.
 (b) Ha $D^\perp = \{0\}$, akkor D generálja X -et.
 (c) Ha $M^\perp = \{0\}$, akkor M sűrű X -ben.

Bizonyítás. A 13.3 következmény bizonyításához hasonlóan csak az nem nyilvánvaló, hogy a D által generált M lineáris altér tartalmazza $(D^\perp)^\perp$ -t.

Ha $x \notin M$, akkor alkalmazzuk az előző tétel (c) részét $A = M$ és $B = \{x\}$ szereposztással: létezik olyan $\varphi \in X'$ lineáris funkcionál, hogy alkalmas $c_1 < c_2$ valós számokkal $\varphi \leq c_1$ M -en és $\varphi(x) \geq c_2$. Mivel a $\varphi(M)$ képtér \mathbb{R} lineáris altér, innen szükségképpen $\varphi = 0$ M -en, és így $\varphi(x) > 0$. Következésképpen $\varphi \in D^\perp$ és $x \notin (D^\perp)^\perp$. \square

***Példák.** Az alábbi példák mutatják, hogy az előző következményben X és X' szerepe nem cserélhető fel.²¹

- Fogadjuk el ideiglenesen²², hogy $X = c_0$ duálisa $X' = \ell^1$. Akkor

$$\Delta := \{(y_n) \in X' : \sum y_n = 0\}$$

X' valódi, zárt altér, viszont $(\Delta^\perp)^\perp = X'$, ugyanis $\Delta^\perp = \{0\}$. Az utóbbi igazolására vegyük észre, hogy ha $x = (x_n) \in \Delta^\perp$, akkor $x \perp e_1 - e_n$ minden n -re, tehát $x_1 = x_2 = \dots$. Azonban $x \in c_0$ folytán $x_n \rightarrow 0$, tehát szükségképpen $x = 0$.

- Fogadjuk el ideiglenesen²³, hogy $X = \ell^1$ duálisa $X' = \ell^\infty$. Akkor $\Delta := c_0$ valódi, zárt altér X' -nek, viszont $(\Delta^\perp)^\perp = X'$, ugyanis $\Delta^\perp = \{0\}$. Ez abból következik, hogy ha $x = (x_n) \in \Delta^\perp$, akkor $x \perp e_n$ minden n -re. Más szóval $x_n = 0$ minden n -re, tehát $x = 0$.

A következő eredmény azt is mutatja, hogy X' legalább annyi dimenziós, mint X .

14.10. Következmény. Legyen X normált tér.

- (a) Bármely két különböző $a, b \in X$ ponthoz van olyan $\varphi \in X'$ lineáris funkcionál, hogy $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

²⁰ Banach 1929.

²¹ Később megadjuk $(\Delta^\perp)^\perp$ topológiai jellemzését is (15.17 állítás, 111. o.).

²² Lásd a 14.13 állítást, 57. o.

²³ Lásd ismét a 14.13 állítást.

(b) Ha $x_1, \dots, x_n \in X$ lineárisan független vektorok, akkor léteznek olyan $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X'$ lineáris funkcionálok, hogy

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{minden } i, j = 1, \dots, n\text{-re.}$$

Következésképpen $\dim X' \geq \dim X$.

Bizonyítás.

(a) Alkalmazzuk a 14.7 tétel (c) részét $A = \{a\}$ -val és $B = \{b\}$ -vel.

(b) Az x_1, \dots, x_{n-1} pontok által generált A lineáris altér véges dimenziós, tehát zárt. Alkalmazva a 14.7 tétel (c) részét A -val és $B = \{x_n\}$ -nel, van olyan $\varphi \in X'$ lineáris funkcionál, hogy alkalmas $c_1 < c_2$ valós számokkal $\varphi \leq c_1 A$ -n, és $\varphi(x_n) \geq c_2$.

Ha $a \in A$, akkor $ta \in A$, és így $t\varphi(a) \leq c_1$ minden t valós számra; innen $\varphi(a) = 0$. Következésképpen $\varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_{n-1}) = 0$ és $\varphi(x_n) > 0$. A $\varphi_n := \varphi/\varphi(x_n)$ lineáris funkcionál rendelkezik tehát a kívánt tulajdonsággal. A $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ lineáris funkcionálok konstrukciója analóg. \square

14.3. Kiterjesztési tétel

A következő alapvető tételt korábban már bebizonyítottuk.²⁴ Fontossága miatt most levezetjük Mazur tételéből is.²⁵

14.11. Tétel. (Helly–Hahn–Banach²⁶) Ha $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál egy $M \subset X$ altéren, akkor φ kiterjeszthető a norma megtartásával egy $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionállá.

Bizonyítás. A $\varphi \equiv 0$ esetben legyen egyszerűen $\Phi \equiv 0$. A fennmaradó esetekben rögzítsünk egy olyan $a \in M$ pontot, amelyre $\varphi(a) = 1$, és tekintsük az $a + U$ konvex, nyílt halmazt, ahol

$$U := \{x \in X : \|\varphi\| \cdot \|x\| < 1\}.$$

²⁴ Topológia, 3.19 tétel, 82. o.

²⁵ Történetileg éppen fordítva, Mazur vezette le eredményét a kiterjesztési tételből. Lásd például Brezis 1983 vagy Rudin 1991.

²⁶ Helly 1912 az $X = C([0, 1])$ esetet vizsgálta, de bizonyítása minden szeparábilis normált térben érvényben marad; Hahn 1927 és Banach 1929 bizonyították a nem-szeparábilis esetet.

Akkor $|\varphi| < 1$ U -n, úgyhogy a 14.5 lemma alapján (48. o.) $a + U$ nem metszi a $\varphi^{-1}(0)$ lineáris alteret. A 14.7 tétel (a) része miatt (49. o.) létezik tehát olyan $\varphi^{-1}(0)$ -t tartalmazó H hipersík, amely nem metszi $a + U$ -t. A hipersíkok analitikus jellemzése folytán létezik (pontosan egy) olyan $\Phi \in X^*$ lineáris funkcionál, amelyre $\Phi^{-1}(0) = H$ és $\Phi(a) = 1$. Akkor Φ a φ kiterjesztése. Végül a 14.5 lemma újbóli alkalmazása mutatja, hogy $|\Phi| < 1$ U -n. Így Φ folytonos, és $\|\Phi\| \leq \|\varphi\|$; de akkor $\|\Phi\| = \|\varphi\|$, hiszen a kiterjesztés nem csökkentheti a normát. \square

*Megjegyzések.

- Ha X Hilbert-tér, akkor a Φ kiterjesztés egyértelmű. ²⁷
- Sokan általánosították a fenti tételt vektorértékű lineáris leképezésekre. ²⁸

14.12. Következmény. (Banach²⁹) Legyen M az X normált tér zárt altére.

(a) Minden $x \in X \setminus M$ -hez van olyan $\varphi \in X'$, hogy

$$\|\varphi\| = 1, \quad \varphi = 0 \quad M\text{-en, és} \quad \varphi(x) = \text{dist}(x, M).$$

(b) Minden $x \in X$ -hez van olyan $\varphi \in X'$, hogy

$$\|\varphi\| \leq 1 \quad \text{és} \quad \varphi(x) = \|x\|.$$

(c) Minden $x \in X$ -re fennáll az

$$\|x\| = \max_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

egyenlőség.

Bizonyítás.

(a) Tekintsük az

$$M_0 := \{tx - y : t \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad y \in M\}$$

altéren a

$$\psi(tx - y) := t \text{ dist}(x, M)$$

²⁷ Elég, ha a duális tér szigorúan konvex, vagyis ha X' egységsgömbfelülete nem tartalmaz egyenes szakaszt; lásd például Holmes 1975, 175. o. Jegyezzük meg, hogy minden egyenletesen konvex normált tér szigorúan konvex; az egyenletesen konvex tereket majd a 21.4 szakaszban vezetjük be, 271. o.

²⁸ Banach–Mazur 1933, Fichtenholz–Kantorovitch 1934, Murray 1937, Goodner 1950, Nachbin 1950, Kelley 1952. Általános áttekintést ad a kérdésről Narici–Beckenstein 1985.

²⁹ Banach 1929. A (b) részben a degenerált $X = \{0\}$ kivételével $\|\varphi\| = 1$ is állítható.

lineáris funkcionált. Nyilván $\psi(x) = \text{dist}(x, M)$ és $\psi = 0$ M -en. Továbbá $\|\psi\| \leq 1$, hiszen

$$|\psi(tx - y)| = |t \text{dist}(x, M)| = \text{dist}(tx, M) \leq \|tx - y\|$$

M_0 -on. Az ellentétes egyenlőtlenség igazolásához válasszunk olyan M -beli (y_n) sorozatot, amelyre $\|x - y_n\| \rightarrow \text{dist}(x, M)$. Akkor $\psi(x - y_n) = \text{dist}(x, M)$ minden n -re, és így

$$\|\psi\| \geq \lim \frac{\psi(x - y_n)}{\|x - y_n\|} = 1.$$

Befejezésül terjesszük ki ψ -t X -re az előző tétel segítségével.

(b) Ha $\|x\| = 0$, akkor legyen $\varphi = 0$. Ha $\|x\| \neq 0$, akkor alkalmazzuk (a)-t $M = \{0\}$ -val.

(c) $A \geq$ egyenlőtlenség a $\|\varphi\|$ norma definíciójából, a \leq egyenlőtlenség pedig (b)-ből következik. \square

Megjegyzés. Hasonlítsuk össze a (c)-beli formulát a

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in X'$$

definícióval: itt általában nem írható max. E kérdésre még visszatérünk.³⁰

14.4. Az ℓ^p terek duálisai

A zárt hipersíkok ismerete a 14.4 és 14.6 lemma alapján (48. o.) egyenértékű a duális tér ismeretével. A Hilbert-terek esete egyszerű, hiszen a Riesz–Fréchet tétel alapján (17. o.) X' azonosítható X -szel. Hamarosan látni fogjuk azonban, hogy normált terek esetén X és X' különböző szerkezetűek lehetnek.

Tekintsük az $X = \ell^p$ teret. Ha $y = (y_n) \in \ell^q$, ahol q a p kitevő konjugáltja, akkor a

$$\varphi_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_n) \in \ell^p \quad (14.4)$$

formula folytonos lineáris funkcionált definiál. Valóban, a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával látható, hogy a definíció korrekt, és

$$|\varphi_y(x)| \leq \|y\|_q \cdot \|x\|_p$$

³⁰ Lásd a 14.24 állítást, 71. o.

minden x -re. Következésképpen

$$\varphi_y \in (\ell^p)', \quad \text{és} \quad \|\varphi_y\| \leq \|y\|_q \quad \text{minden } y \in \ell^q\text{-ra.}$$

Így a $j(y) := \varphi_y$ formula (legfeljebb 1 normájú) folytonos *lineáris* $j : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$ leképezést definiál.

Mivel $c_0 \ell^\infty$ altere, ugyanez a formula definiál egy (legfeljebb 1 normájú) folytonos lineáris $j : \ell^1 \rightarrow (c_0)'$ leképezést is.

Most bebizonyítjuk Riesz Frigyes egy tételének ³¹ speciális esetét:

14.13. Állítás.

- (a) Ha $1 \leq p < \infty$, akkor $j : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$ izometrikus izomorfizmus.
 (b) $j : \ell^1 \rightarrow (c_0)'$ is izometrikus izomorfizmus.

*Megjegyzések.

- Az állítás alapján gyakran azonosítják $(c_0)'$ -t ℓ^1 -gyel, és $1 \leq p < \infty$ esetén $(\ell^p)'$ -t ℓ^q -val.
- A szakasz végén megmutatjuk, hogy $(\ell^\infty)'$ nem izomorf ℓ^1 -gyel.

Szükségünk van egy segédtétele:

14.14. Lemma. Ha $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, vagy ha $X = c_0$, akkor az

$$e_k = (\overbrace{0, \dots, 0}^{k-1}, 1, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

vektorok generálják X -et. Következésképpen e terek szeparábilisak.

Bizonyítás. Tetszőlegesen adott $x = (x_n) \in \ell^p$, $1 \leq p < \infty$ esetén az

$$\left\| x - \sum_{n=1}^k x_n e_n \right\|_p^p = \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

reláció mutatja, hogy az e_k vektorok generálják ℓ^p -t. Ha $x = (x_n) \in c_0$, akkor

$$\left\| x - \sum_{n=1}^k x_n e_n \right\|_{\infty} = \max\{|x_n| : n > k\} \rightarrow 0,$$

mert $x_n \rightarrow 0$ a c_0 tér definíciója miatt.

A fentiekből következik, hogy az e_k vektorok *raciónalis* együttthatójú, véges lineáris kombinációi megszámlálható, sűrű halmazt alkotnak X -ben. \square

³¹ Riesz 1913: lásd a 21.14 tételt, 279. o.

***Megjegyzések.**

- A lemma ℓ^∞ -ben nem érvényes, hiszen c_0 valódi, zárt altere ℓ^∞ -nek, úgyhogy az e_k vektorok nem generálhatják ℓ^∞ -t.
- Az ℓ^∞ tér még csak nem is szeparábilis. Ennek igazolására tekintsük az 1 sugarú olyan $x = (x_n)$ középpontú (nyílt) gömbök nem-megszámlálható rendszerét, ahol $x_n = \pm 1$ minden n -re. Minthogy e gömbök páronként diszjunktak, semmilyen megszámlálható D halmaz sem metszheti valamennyiüket, úgyhogy D nem lehet sűrű.

A 14.13 állítás bizonyítása.

(a) Tetszőlegesen rögzített $\varphi \in (\ell^p)'$ -hez olyan egyértelmű $y \in \ell^q$ sorozatot kell találnunk, amelyre $\varphi_y = \varphi$ és $\|y\|_q \leq \|\varphi\|$. (A fordított $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_q$ egyenlőtlenséget már ismerjük.)

Ha van olyan $y \in \ell^q$, amelyre $\varphi_y = \varphi$, akkor szükségképpen

$$\varphi(e_n) = \varphi_y(e_n) = y_n$$

minden n -re, ahonnan

$$y_n = \varphi(e_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tehát legfeljebb egy ilyen y lehet.

Mutassuk most meg, hogy a fenti formula valóban alkalmas sorozatot definiál. Ha $p = 1$, akkor

$$|y_n| = |\varphi_y(e_n)| \leq \|\varphi_y\|$$

minden n -re, úgyhogy $y \in \ell^\infty$ és $\|y\|_\infty \leq \|\varphi_y\|$.

Ha $p > 1$ és így $q < \infty$, akkor tekintsük minden egyes rögzített $k = 1, 2, \dots$ -re az

$$x_n := \begin{cases} |y_n|^{q-1} \operatorname{sign} y_n & \text{ha } n \leq k, \\ 0 & \text{ha } n > k \end{cases}$$

képlettel definiált $x = (x_n)$ sorozatot. Akkor $x \in \ell^p$ (hiszen csak véges sok nem-nulla tagja van a sorozatnak), és egyszerű számolással

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^k |y_n|^q = \|x\|_p^p.$$

Felhasználva ezeket az egyenlőségeket a

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|_p$$

becslésből adódik, hogy

$$\sum_{n=1}^k |y_n|^q \leq \|\varphi\| \cdot \left(\sum_{n=1}^k |y_n|^q \right)^{1/p},$$

és így

$$\sum_{n=1}^k |y_n|^q \leq \|\varphi\|^q.$$

Innen $k \rightarrow \infty$ esetén következik, hogy $y \in \ell^q$ és $\|y\|_q \leq \|\varphi\|$.

Hátra van még a $\varphi = \varphi_y$ egyenlőség igazolása. Mivel a folytonos lineáris φ és φ_y funkcionálok definíció szerint megegyeznek minden e_n pontban, megegyeznek az azok által generált zárt altéren, vagyis az előző lemma alapján³² az egész ℓ^p téren is.

(b) Tetszőlegesen adott $\varphi \in (c_0)'$ esetén megismételhető az (a)-beli okoskodás $p = \infty$ és $q = 1$ választással. \square

***Megjegyzés.** Az $(\ell^\infty)'$ tér nem izomorf ℓ^1 -gyel, mert nem is szeparábilis. Minthogy ℓ^∞ nem szeparábilis, ehhez elegendő megmutatnunk, hogy ha az X normált tér duálisa szeparábilis, akkor X maga is szeparábilis.

A bizonyításhoz rögzítsünk X' -ben egy sűrű (φ_n) sorozatot, majd minden n -re válasszunk egy olyan $x_n \in X$ vektort, amelyre

$$\|x_n\| \leq 1 \quad \text{és} \quad |\varphi_n(x_n)| \geq 2^{-1} \|\varphi_n\|.$$

Elég megmutatnunk, hogy (x_n) generálja X -et, hiszen akkor e vektorok racionális együtthatójú lineáris kombinációi megszámlálható, sűrű halmazt alkotnak X -ben.

A 14.9 következmény alapján (53. o.) elegendő megmutatnunk, hogy ha egy $\varphi \in X'$ funkcionálra $\varphi(x_n) = 0$ minden n esetén, akkor $\varphi = 0$. Válasszunk e célból egy $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ részsorozatot. Akkor

$$\|\varphi_{n_k}\| \leq 2|\varphi_{n_k}(x_{n_k})| = 2|(\varphi_{n_k} - \varphi)(x_{n_k})| \leq 2\|\varphi_{n_k} - \varphi\|.$$

Innen $k \rightarrow \infty$ esetén $\|\varphi\| \leq 0$ adódik, tehát $\varphi = 0$.

³² Csak itt használjuk fel, hogy $p \neq \infty$.

14.5. Gyenge konvergencia. Banach–Steinhaus tétel

A gyenge konvergencia igen hasznosnak bizonyult a Hilbert-terek tanulmányozása során. Ebben a szakaszban általánosítjuk ezt a fogalmat normált terekre.

Definíció. Az X normált térbeli (x_n) sorozat *gyengén konvergál*³³ $x \in X$ -hez, ha

$$\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$$

minden $\varphi \in X'$ -re. Ezt írásban az $x_n \rightharpoonup x$ jelöléssel fejezzük ki.

Megjegyzések.

- A Riesz–Fréchet tétel alapján Hilbert-terekben visszajutunk a korábbi definícióhoz.
- Az X' -beli funkcionálok folytonossága miatt a normakonvergencia maga után vonja a gyenge konvergenciát; ezért a normakonvergenciát *erős konvergenciának* is hívjuk.
- Véges dimenziós normált terekben az erős és gyenge konvergencia egybeesik.

A gyenge konvergencia elemi tulajdonságai a következők:

14.15. Állítás.

- Egy sorozatnak legfeljebb egy gyenge határértéke lehet.
- Ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor $x_{n_k} \rightharpoonup x$ minden (x_{n_k}) részsorozatra is.
- Ha $x_n \rightharpoonup x$ és $y_n \rightharpoonup y$, akkor $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$.
- Ha $x_n \rightharpoonup x$ X -ben és $\lambda_n \rightarrow \lambda$ \mathbb{R} -ben, akkor $\lambda_n x_n \rightharpoonup \lambda x$ X -ben.
- Legyen $K \subset X$ konvex zárt halmaz. Ha $x_n \rightharpoonup x$, és $x_n \in K$ minden n -re, akkor $x \in K$.
- Ha $x_n \rightharpoonup x$, és $\|x_n\| \leq L$ minden n -re, akkor $\|x\| \leq L$.³⁴
- Ha $x_n \rightarrow x$, akkor $x_n \rightharpoonup x$ és $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

*Megjegyzések.

- A Hilbert-terektől eltérően az $x_n \rightharpoonup x$ és $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ relációk nem mindig vonják maguk után, hogy $x_n \rightarrow x$. Ha ez az implikáció is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy X rendelkezik a *Radon–Riesz tulajdonsággal*.

³³ Riesz 1910.

³⁴ Ekvivalens módon $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

- Hamarosan példát adunk olyan Banach-térre, amely nem rendelkezik a Radon–Riesz tulajdonsággal.³⁵

Bizonyítás. Szó szerint megismételhetjük a Hilbert-terekre vonatkozó analóg 13.10 állítás bizonyításait (24. o.), kivéve (e)-t, ahol korábban a merőleges vetítést használtuk. (A (g) tulajdonság igazolásakor a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség helyett használjuk ki egyszerűen $\varphi \in X'$ folytonosságát.)

A merőleges vetítés helyett Tukey tételét használjuk fel (e) bizonyításához (49. o.). Tegyük fel indirekt, hogy $x \notin K$; akkor van olyan $\varphi \in X'$, hogy alkalmas c_1, c_2 valós számokkal

$$\varphi(x) \leq c_1 < c_2 \leq \varphi(y) \quad \text{minden } y \in K\text{-ra.}$$

Akkor $\varphi(x_n) \geq c_2$ minden n -re, úgyhogy $\varphi(x_n) \not\rightarrow \varphi(x)$, tehát $x_n \not\rightarrow x$. \square

Mielőtt megmutatnánk, hogy minden gyengén konvergens sorozat korlátos, bizonyítsuk be a funkcionálanalízis egyik fő tételét: *Folytonos lineáris leképezések pontonként korlátos rendszere egyenletesen is korlátos.* Pontosabban, fennáll a következő

14.16. Tétel. (Banach–Steinhaus³⁶) Tekintsük folytonos lineáris leképezéseket $\mathcal{A} \subset L(X, Y)$ rendszerét, ahol X Banach-tér, Y pedig normált tér. Ha az

$$\mathcal{A}(x) := \{Ax \in Y : A \in \mathcal{A}\}, \quad x \in X$$

halmazok mind korlátosak Y -ban, akkor \mathcal{A} korlátos $L(X, Y)$ -ban:

$$\sup \{\|A\| : A \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

***Megjegyzés.** A tétel csírájában már Riemann-nál megjelenik.³⁷

³⁵ Lásd a 21.11 állítást is ebben a tekintetben, 275. o.

³⁶ Az $X = C([0, 1])$ és $Y = \mathbb{R}$ esetre a tételt először Helly 1912 bizonyította. Bizonyítása, amely a Lebesgue 1905 által bevezetett „csúszó púpok” módszerét használja, az általános esetben is érvényben marad; lásd Hochstadt 1979. Lásd továbbá Banach 1922, Hahn 1922, Hildebrandt 1923, Banach–Steinhaus 1927.

³⁷ Riemann 1854, Hankel 1882: „szingularitások kondenzációja”. Lásd még: Gál 1953.

***Példa.** Nem teljes X terekben a tétel nem érvényes. Tekintsük például ℓ^2 -nek azt az X alterét, amely a legfeljebb véges sok nem-nulla elemet tartalmazó sorozatokból áll. A

$$\varphi_n(x) := nx_n$$

képlet pontonként korlátos, de nem egyenletesen korlátos funkcionál-sorozatot definiál.

Bizonyítás. Van olyan $\overline{B_r(x')} \subset X$ zárt gömb és C konstans, hogy³⁸

$$\|Ax\| \leq C \quad \text{minden } A \in \mathcal{A} \text{ és } x \in \overline{B_r(x')} \text{ esetén.}$$

Az ellenkező esetben ugyanis rekurzióval definiálhatnánk zárt F_k gömböknek egy monoton fogyó sorozatát és hozzájuk tartozó olyan i_k indexeket, hogy

$$\|A_{i_k}x\| > k \quad \text{minden } x \in F_k\text{-ra, } k = 1, 2, \dots$$

Feltehető az is, hogy $\text{diam } F_k \rightarrow 0$. Akkor az F_k halmazoknak van közös x pontja a Cantor-féle metszettétel miatt³⁹, és e pontban $\|A_{i_k}x\| \rightarrow \infty$, ami ellentmond a feltevéseinknek.

Mutassuk meg, hogy $\|A\| \leq 2C/r$ minden $A \in \mathcal{A}$ -ra. Valóban, ha $x \in X$ és $\|x\| \leq r$, akkor $x', x' + x \in \overline{B_r(x')}$; következésképpen

$$\|Ax\| = \|A(x' + x) - Ax'\| \leq \|A(x' + x)\| + \|Ax'\| \leq 2C,$$

és ez a kívánt egyenlőtlenséget bizonyítja. \square

14.17. Állítás. Legyen (x_n) az X normált térbeli sorozat.

- (a) Ha $x_n \rightarrow x$, akkor az (x_n) sorozat korlátos.
- (b) Ha $x_n \rightarrow x$ X -ben és $\varphi_n \rightarrow \varphi$ X' -ben, akkor $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$.
- (c) Ha $x_n \rightarrow x$ X -ben és $\varphi_n \rightarrow \varphi$ X' -ben, akkor $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$.

Bizonyítás.

(a) Alkalmazzuk a 14.16 tételt az

$$\Phi_n \varphi := \varphi(x_n), \quad \varphi \in X', \quad n = 1, 2, \dots$$

képlettel értelmezett $(\Phi_n) \subset L(X', \mathbb{R})$ funkcionálrendszerre, és vegyük észre, hogy $\|\Phi_n\| = \|x_n\|$ a 14.12 következmény (c) része miatt (55. o.).

(b) és (c). Adaptáljuk a 13.3 következmény bizonyítását (12. o.). \square

³⁸ Mint Saks megjegyezte (lásd Banach és Steinhaus 1927), a tétel bebizonyítható a Baire-lemma (26. o.) közvetlen alkalmazásával. Mi inkább megismételjük Osgood 1897 (163–164. o.) gondolatmenetét, amely a Baire-lemmát is bizonyítja.

³⁹ Topológia, 1.11 állítás, 19. o.

Mielőtt néhány példát adnánk, jegyezzük meg, hogy az 13.13 lemma (27. o.) bizonyításának adaptálásával könnyen adódik a következő

14.18. Lemma. *Legyen (x_k) korlátos sorozat az X normált térben, $\Delta \subset X'$, és jelöljük M -mel a Δ által generált zárt alteret.*

(a) *Legyen $x \in X$. Ha $\varphi(x_k) \rightarrow \varphi(x)$ minden $\varphi \in \Delta$ -ra, akkor $\varphi(x_k) \rightarrow \varphi(x)$ minden $\varphi \in M$ -re is. Speciálisan, ha Δ generálja X' -t, akkor $x_k \rightarrow x$.*

(b) *Ha $(\varphi(x_k))$ minden $\varphi \in \Delta$ -ra Cauchy-sorozat, és Δ generálja X' -t, akkor $(\varphi(x_k))$ minden $\varphi \in X'$ -re is Cauchy-sorozat, és a*

$$\Phi(\varphi) := \lim \varphi(x_k)$$

képlet folytonos lineáris $\Phi \in X''$ funkcionált definiál.

***Példák.**

- Legyen $X = c_0$ vagy $X = \ell^p$ valamely $1 < p < \infty$ -re. Legyen továbbá $k \mapsto (x_n^k)$ korlátos sorozat X -ben, és $(x_n) \in X$. A 14.14 és 14.18 lemmákból (57 és 63. o.) adódik a gyenge konvergencia következő jellemzése (komponensenkénti konvergencia):

$$(x_n^k) \rightarrow (x_n) \iff x_n^k \rightarrow x_n \quad \text{minden rögzített } n\text{-re.}$$

- Speciálisan az

$$e_k = (\overbrace{0, \dots, 0}^{k-1}, 1, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

vektorok sorozata gyengén konvergál nullához az említett terekben.

- Azonban nem konvergál gyengén ℓ^1 -ben. A

$$\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n, \quad x = (x_n) \in \ell^1$$

képlet ugyanis olyan $\varphi \in (\ell^1)'$ funkcionált értelmez, amelyre a $\varphi(e_n) = (-1)^n$ számok sorozata nem konvergens. (A most igazolt tulajdonság az alábbi 14.19 állításból is azonnal következik.)

- Legyen $x_n = e_1 + e_n$, akkor $x_n \rightarrow e_1$ c_0 -ban az előző példa alapján. Vegyük észre, hogy $\|x_n\|_{\infty} \rightarrow \|e_1\|_{\infty}$, de $\|x_n - e_1\|_{\infty} \not\rightarrow 0$. Tehát a c_0 tér nem rendelkezik a Radon–Riesz tulajdonsággal.
- Minthogy c_0 ℓ^{∞} altere, ℓ^{∞} -ben is fennáll az $x_n \rightarrow e_1$ reláció. Következésképpen ℓ^{∞} sem rendelkezik a Radon–Riesz tulajdonsággal.

- A később tárgyalandó 21.11 állításból (275. o.) viszont következní fog, hogy $1 < p < \infty$ esetén az ℓ^p terek rendelkeznek a Radon–Riesz tulajdonsággal.
- A következő állítás egyszerű folyománya, hogy ℓ^1 is rendelkezik a Radon–Riesz tulajdonsággal.

Íme egy meglepő eredmény:

14.19. *Állítás. (Schur⁴⁰) Az ℓ^1 térben az erős és gyenge konvergencia egybeesik.

Bizonyítás. Elegendő azt igazolnunk, hogy ha $x^k \rightharpoonup x$ ℓ^1 -ben, akkor $\|x^k - x\|_1 \rightarrow 0$. Felcserélve x^k -et $x^k - x$ -val feltehető, hogy $x = 0$.

Tegyük fel indirekt, hogy $x^k \rightharpoonup 0$ ℓ^1 -ben, de $\|x^k\|_1 \not\rightarrow 0$. Alkalmas részsorozatra térve, majd azt elég nagy konstanssal megszorozva feltehető, hogy $\|x^k\|_1 > 1$ minden k -ra.

Jelöljük x^k elemeit x_n^k -nel. Minthogy $x_n^k \rightarrow 0$ minden rögzített n -re a gyenge konvergencia definíciója miatt, rekurzióval definiálható (x^k) -nak olyan (z^k) részsorozata és olyan

$$0 = n_1 < n_2 < \dots$$

indexsorozat, hogy

$$|z_{n_k+1}^k| + \dots + |z_{n_{k+1}}^k| > \frac{3}{4} \|z^k\|_1$$

minden k -ra. Valóban, legyen $n_1 = 0$. Ha n_k már értelmezve van valamely k -ra, akkor válasszuk ki (x^k) -nak olyan elég nagy indexű olyan $z^k = (z_n^k)$ elemét, amelyre

$$\sum_{j > n_k} |z_j^k| > \frac{3}{4} \|z^k\|_1,$$

majd válasszunk olyan nagy $n_{k+1} > n_k$ -t, amelyre a keresett egyenlőtlenség már teljesül.

Tekintsük most az

$$y_n := (-1)^k \operatorname{sgn} z_n^k \quad \text{ha} \quad n_k < n \leq n_{k+1}$$

⁴⁰ J. Schur 1920.

képlettel értelmezett $(y_n) \in \ell^\infty$ sorozatot. Akkor

$$\begin{aligned}
 (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n^k &\geq \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |z_n^k| \right) - \left(\sum_{n=1}^{n_k} |z_n^k| \right) - \left(\sum_{n_{k+1}+1}^{\infty} |z_n^k| \right) \\
 &= 2 \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |z_n^k| \right) - \|z^k\|_1 \\
 &> \frac{1}{2} \|z^k\|_1 \\
 &> \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

minden k -ra, és ez ellentmond a $z^k \rightarrow 0$ relációnak. \square

Befejezésül igazoljuk a Hölder-egyenlőtlenség érdekes megfordítását:

14.20. *Állítás. (Hellinger-Toeplitz⁴¹) Legyen (y_n) valós számsorozat és $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugált kitevők. Ha a $\sum x_n y_n$ sor minden $(x_n) \in \ell^p$ -re konvergál, akkor $y \in \ell^q$.

Bizonyítás. A

$$\varphi_k(x) := \sum_{n=1}^k x_n y_n, \quad x \in \ell^p, \quad k = 1, 2, \dots$$

képlet egy (φ_k) sorozatot definiál $(\ell^p)'$ -ben. Feltevésünk szerint a $(\varphi_k(x))$ sorozat minden $x \in \ell^p$ -re konvergens, és így korlátos. Alkalmazva a Banach–Steinhaus tételt létezik tehát olyan C konstans, hogy

$$\left| \sum_{n=1}^k x_n y_n \right| \leq C \|x\|_p \quad \text{minden } x \in \ell^p\text{-re, } k = 1, 2, \dots$$

Ha $q = \infty$ és így $p = 1$, akkor $x = e_k$ választással innen $|y_k| \leq C$ minden k -ra, tehát $y \in \ell^\infty$.

Ha $1 \leq q < \infty$, akkor bevezetve minden egyes k -ra az

$$x_n := \begin{cases} |y_n|^{q-1} \operatorname{sign} x_n & \text{ha } n \leq k, \\ 0 & \text{ha } n > k \end{cases}$$

⁴¹ Hellinger-Toeplitz 1906, Landau 1907.

sorozatot, a 14.13 állítás bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^k |y_n|^q \leq C^p.$$

Innen $k \rightarrow \infty$ mellett adódik, hogy $y \in \ell^q$ és $\|y\|_q \leq C$. \square

A következő célunk a Bolzano–Weierstrass tétel általánosítása Banach-terekre. Sajnos még a gyenge konvergencia használata esetén is vannak ellenpéldák:

Példák.

- Az ℓ^1 térben a korlátos (e_n) sorozatnak nincs gyengén konvergens részsorozata, mert akkor az Schur tétele (64. o.) alapján erősen is konvergálna. De (e_n) egyetlen részsorozata sem Cauchy-féle, hiszen $\|e_m - e_n\| = 2$ minden $m \neq n$ -re.

A Schur-tételre való hivatkozás elkerülhető. Ha ugyanis (e_{n_k}) tetszőlegesen adott részsorozata (e_n) -nek, akkor a

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_{n_k}, \quad x = (x_n) \in \ell^1$$

formula $\varphi \in (\ell^1)'$ funkcionált értelmez, amelyre $\varphi(e_{n_k}) = (-1)^k$ nem konvergál $k \rightarrow \infty$ esetén, és így (e_{n_k}) nem konvergálhat gyengén.

- A c_0 térben a korlátos $(e_1 + \dots + e_n)$ sorozatnak nincs gyengén konvergens részsorozata. Ha ugyanis $e_1 + \dots + e_{n_k} \rightarrow a$ teljesülne valamely alkalmas részsorozatra, akkor $\varphi(e_1 + \dots + e_{n_k}) \rightarrow \varphi(a)$ is fennállna minden $\varphi \in c'_0$ -re. Alkalmazva ezt minden rögzített $m = 1, 2, \dots$ esetén a $\varphi(y) := y_m$ funkcionálra, az $a = (1, 1, \dots)$ egyenlőség adódik. Ez azonban lehetetlen, mert az utóbbi sorozat nincs c_0 -ban.
- Az ℓ^∞ térben sincs az előbbi korlátos $(e_1 + \dots + e_n)$ sorozatnak gyengén konvergens részsorozata. Valóban, a fenti okoskodás alapján az egyetlen lehetséges gyenge határérték $a = (1, 1, \dots)$. Ez sem lehet azonban a fenti sorozat gyenge határértéke, mert nem tartozik hozzá a sorozat által generált c_0 zárt altérhez (lásd a 14.15 állítás (e) részét, 60. o.).

Mindazonáltal később látni fogjuk⁴², hogy a fenti sorozatok konvergálnak egy természetes, még gyengébb értelemben.

⁴² Lásd a 110. oldali példákat.

A következő szakaszban megmutatjuk, hogy a gyenge konvergenciára vonatkozó Bolzano-Weierstrass tétel a Banach-terek széles osztályában érvényes marad.

14.6. Reflexív terek. Kiválasztási tétel

A Banach–Steinhaus tétel bizonyítása során találkoztunk az $(X')'$ térrel. Ez a tér sok más kérdésben is fontos szerepet játszik.

Definíció. Az X normált tér *biduálisán*⁴³ az $X'' := (X')'$ Banach-teret értjük.

Példa. Ha $x \in X$, akkor a

$$\Phi_x(\varphi) := \varphi(x), \quad \varphi \in X'$$

képlet folytonos lineáris $\Phi_x \in X''$ funkcionált definiál.

Bizonyos terekben X'' minden eleme a fenti alakú:

Definíció. Az X normált tér *reflexív*⁴⁴, ha minden $\Phi \in X''$ -hez létezik olyan $x \in X$, hogy

$$\Phi(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{minden } \varphi \in X' \text{-re.}$$

Mielőtt példákat adnánk, ismertessük a definíció néhány következményét; speciálisan új, egyszerű bizonyítást adunk a normált terek teljessé tételére (47. o.). Mint az imént említettük, az X normált tér bármely x eleméhez hozzárendelhető a biduális tér egy $Jx \in X''$ eleme a

$$(Jx)(\varphi) := \varphi(x), \quad \varphi \in X'$$

képlet segítségével.

14.21. Állítás. (Hahn⁴⁵) Legyen X normált tér.

- (a) $J : X \rightarrow X''$ lineáris izometria.
- (b) X teljessé tehető.
- (c) Ha X reflexív, akkor $J : X \rightarrow X''$ izometrikus izomorfizmus.
- (d) Ha X reflexív, akkor teljes, tehát Banach-tér.

⁴³ Hahn 1927.

⁴⁴ Hahn 1927.

⁴⁵ Hahn 1927.

Bizonyítás.

(a) Világos, hogy $Jx : X' \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris minden rögzített $x \in X$ -re. A

$$|(Jx)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|x\| \cdot \|\varphi\|$$

egyenlőtlenség azt is mutatja, hogy Jx folytonos: $Jx \in X''$ és $\|Jx\| \leq \|x\|$.

A fordított egyenlőtlenség igazolásához feltehető, hogy $\|x\| \neq 0$. Alkalmazva a Helly–Hahn–Banach tétel 14.12 következményét (55. o.) létezik olyan $\varphi \in X'$, amelyre $\varphi(x) = \|x\|$ és $\|\varphi\| = 1$. Innen

$$\|Jx\| \geq |(Jx)(\varphi)| = |\varphi(x)| = \|x\|.$$

(b) Az előző pont miatt X azonosítható az X'' Banach-tér $J(X)$ alterével; az utóbbi lezárása olyan Banach-tér, amelynek X sűrű altere.

(c) J szuperjektív X reflexivitásának a definíciója miatt.

(d) X izomorf $X'' = (X')'$ -vel, és minden duális tér teljes. \square

Megjegyzés. A reflexív Banach-tereket rendszerint azonosítjuk a biduálisukkal a J leképezés segítségével.

14.22. Állítás.

(a) Minden véges dimenziós normált tér reflexív.

(b) Minden Hilbert-tér reflexív.

(c) Az ℓ^p terek reflexívek, ha $1 < p < \infty$.

Bizonyítás.

(a) A lineáris algebrából ismeretes (és bázis felvételével könnyen igazolható), hogy $\dim X = \dim X^*$ minden véges dimenziós X vektortérre. Innen következik, hogy minden véges dimenziós X normált térre $\dim X \geq \dim X''$. (Valójában egyenlőség áll, hiszen véges dimenziós normált téren minden lineáris funkcionál folytonos.) Minthogy a $J : X \rightarrow X''$ lineáris leképezés *injektív*, innen következik, hogy J szuperjektív (és hogy $\dim X = \dim X''$).

(b) Adott H Hilbert-tér esetén tekintsük a Riesz–Fréchet-féle $j : H \rightarrow H'$ kanonikus izomorfizmust:

$$(jy)(x) = (x, y), \quad x, y \in H. \quad (14.5)$$

Tetszőleges $\Phi \in H''$ -re $\Phi \circ j$ folytonos lineáris funkcionál H -n; alkalmazva újból a Riesz–Fréchet tételt van tehát olyan $x \in H$, hogy

$$\Phi(jy) = (y, x) \quad \text{minden } y \in H\text{-ra.}$$

Innen (14.5) felhasználásával adódik, hogy

$$\Phi(jy) = (jy)(x) \quad \text{minden } y \in H\text{-ra.}$$

Minthogy $j : H \rightarrow H'$ szuperjektív, ebből

$$\Phi(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{minden } \varphi \in H'\text{-re.}$$

(c) Tekintsük a Riesz-féle $j : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$ kanonikus izomorfizmust (14.13 állítás, 57. o.):

$$(jy)(x) = \sum y_n x_n, \quad x \in \ell^p, y \in \ell^q. \quad (14.6)$$

Tetszőleges $\Phi \in (\ell^p)''$ -re $\Phi \circ j$ folytonos lineáris funkcionál ℓ^q -n; alkalmazva újra a 14.13 állítást van tehát olyan $x \in \ell^p$, hogy

$$\Phi(j(y)) = \sum x_n y_n \quad \text{minden } y \in \ell^q\text{-ra.}$$

Innen (14.6) felhasználásával adódik, hogy

$$\Phi(j(y)) = (jy)(x) \quad \text{minden } y \in \ell^q\text{-ra.}$$

Minthogy $j : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$ szuperjektív, ebből

$$\Phi(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{minden } \varphi \in (\ell^p)'\text{-re.} \quad \square$$

Nem is nyilvánvaló, hogy léteznek-e egyáltalán nem-reflexív Banach-terek:

***Példák.**

- A c_0 tér nem reflexív, mert például a

$$\Phi(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n, \quad \varphi = (\varphi_n) \in \ell^1$$

képlettel definiált $\Phi \in c_0'' = (\ell^1)'$ funkcionál semmilyen $(x_n) \in c_0$ vektorral sem reprezentálható. Ha ugyanis volna ilyen (x_n) vektor, akkor a megfelelő

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$$

egyenlőségben $\varphi := e_k$ -t választva azt kapnánk, hogy $x_k = 1$ minden k -ra. Azonban a konstans $(1, 1, \dots)$ sorozat nincs c_0 -ban.

Adjunk egy másik bizonyítást is. Mivel c_0' izomorf ℓ^1 -gyel, és $(\ell^1)'$ izomorf ℓ^∞ -nel, c_0'' izomorf ℓ^∞ -nel. Következésképpen c_0'' nem szeparábilis. Azonban c_0 szeparábilis, tehát nem lehet izomorf c_0'' -vel.

- Annak megmutatására, hogy ℓ^1 nem reflexív, tekintsük ℓ^∞ -nek a konvergens sorozatok által alkotott c alterét. Alkalmazva a 14.11 tételt az $(y_n) \mapsto \lim y_n$ funkcionál kiterjeszthető egy $\Phi \in (\ell^\infty)' = (\ell^1)''$ funkcionállá. Megmutatjuk, hogy ezt a funkcionált egyetlen $(x_n) \in \ell^1$ sorozat sem reprezentálja. Ha ugyanis volna ilyen sorozat, akkor a

$$\Phi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

egyenlőségben $y := e_k$ -t választva azt kapnánk, hogy $x_k = 0$ minden k -ra, vagyis, hogy $\Phi = 0$. De ez lehetetlen, hiszen például az $x = (1, 1, \dots)$ sorozatra $\Phi(x) = \lim 1 = 1$.

- A jelen szakasz végén és a 15.6 szakaszban (117. o.) további bizonyításokat is adunk a c_0 , ℓ^1 és ℓ^∞ terek nem-reflexivitására.

Íme a reflexív terek egyik alaptulajdonsága:

14.23. Tétel. (Kiválasztási tétel⁴⁶) *Reflexív Banach-térben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

Megjegyzés. Eberlein és Šmulian⁴⁷ az állítás megfordítását is igazolták: ha az X normált térben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata, akkor X reflexív.

Bizonyítás. Legyen (x_k) korlátos sorozat az X reflexív Banach-térben. Azonosítsuk X -et X'' -vel, akkor minden $\Delta \subset X'$ halmazra

$$\begin{aligned} \Delta^\perp &:= \{\Phi \in X'' : \Phi(\varphi) = 0 \text{ minden } \varphi \in \Delta\text{-ra}\} \\ &= \{x \in X : \varphi(x) = 0 \text{ minden } \varphi \in \Delta\text{-ra}\}. \end{aligned}$$

Rendezzük az x_k vektorok racionális együtthatós véges lineáris kombinációit egy (y_n) sorozatba. Alkalmazva a 14.12 következményt (55. o.) rögzítsünk minden n -re egy olyan $\varphi_n \in X'$ funkcionált, hogy

$$\|\varphi_n\| \leq 1 \quad \text{és} \quad |\varphi_n(y_n)| = \|y_n\|.$$

⁴⁶ Riesz 1910, Pettis 1938.

⁴⁷ Šmulian 1940, Eberlein 1947. Lásd még: Diestel 1984, Dunford–Schwartz 1957, Holmes 1975, Kantorovitch–Akilov 1981, Rolewicz 1972, Yosida 1980.

Alkalmazva a Cantor-féle átlós módszert a 13.14 tétel (27. o.) bizonyításához hasonlóan létezik (x_k) -nak olyan (z_k) részsorozata, hogy a

$$k \mapsto \varphi_n(z_k)$$

számsorozatok minden n -re konvergálnak. Mivel $\varphi \perp \{z_k\}$ esetén a $(\varphi(z_k))$ számsorozat azonosan nulla, a $(\varphi(z_k))$ számsorozat minden

$$\varphi \in \Delta := \{\varphi_n\} \cup \{z_k\}^\perp$$

esetén konvergál.

Tegyük fel egy pillanatra, hogy Δ generálja X' -et. Akkor a $(\varphi(z_k))$ számsorozat minden $\varphi \in X'$ -re konvergál a 14.18 lemma alapján (63. o.), és a

$$\Phi(\varphi) := \lim \varphi(z_k)$$

képlet (legfeljebb $\sup \|x_k\|$ normájú) $\Phi \in X''$ funkcionált definiál. Mivel X reflexív, Φ reprezentálható egy $x \in X$ vektorral:

$$\Phi(\varphi) = \varphi(x)$$

minden $\varphi \in X'$ -re, és így $z_k \rightarrow x$.

Hátra van annak az igazolása, hogy Δ generálja X' -t. A 14.9 következmény (53. o.) alapján elég megmutatnunk, hogy $\Delta^\perp = \{0\}$. Tetszőlegesen adott $y \in \Delta^\perp$ -ra Δ definíciója miatt $\varphi_n(y) = 0$ minden n -re, és y hozzátartozik a $\{z_k\}$ által generált X -beli $\{z_k\}^{\perp\perp}$ zárt altérhez. (Ismét alkalmazzuk a 14.9 következményt.) Válasszunk egy $y_{n_k} \rightarrow y$ sorozatot, akkor

$$\|y_{n_k}\| = |\varphi_{n_k}(y_{n_k})| = |\varphi_{n_k}(y_{n_k} - y)| \leq \|y_{n_k} - y\|.$$

Innen $k \rightarrow \infty$ esetén $\|y\| \leq 0$, vagyis $y = 0$ következik. \square

Példák. Az előző szakaszban láttuk, hogy az ℓ^1 , ℓ^∞ és c_0 terekben léteznek konvergens részsorozat nélküli korlátos sorozatok. Ebből újra következik, hogy ezek a terek nem reflexívek.

14.7. Reflexív terek. Geometriai alkalmazások

A 14.23 tétel (70. o.) segítségével több, a bevezetőben említett geometriai tulajdonságot általánosíthatunk tetszőleges reflexív Banach-terekre:

14.24. Állítás. *Ha X normált tér, akkor az alábbi tulajdonságokra fennállnak az*

$$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (e)$$

implikációk.

(a) X reflexív.

(b) (Tukey⁴⁸) Legyenek A és B diszjunkt nem-üres konvex, zárt halmazok X -ben. Ha legalább az egyikük korlátos, akkor van olyan $\varphi \in X'$ lineáris funkcionál, hogy alkalmas c_1, c_2 valós számokkal

$$\varphi(a) \leq c_1 < c_2 \leq \varphi(b) \quad \text{minden } a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén.} \quad (14.7)$$

(c) Ha $K \subset X$ nem-üres konvex, zárt halmaz és $x \in X$, akkor létezik x -től minimális távolságra lévő K -beli y pont:

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| \quad \text{minden } z \in K\text{-ra.}$$

(d) Ha $M \subset X$ valódi nem-üres zárt altér, akkor van olyan $x \in X$ pont, amelyre

$$\|x\| = 1 \quad \text{és} \quad \text{dist}(x, M) = 1.$$

(e) Ha $\varphi \in X'$ nem-nulla funkcionál, akkor létezik olyan $x \in X$ pont, hogy

$$\|x\| = 1 \quad \text{és} \quad |\varphi(x)| = \|\varphi\|.$$

*Megjegyzések.

- Hasonlítsuk össze (b)-t a 14.7 tétel (c) részével (49. o.): hamarosan megmutatjuk⁴⁹, hogy minden végtelen dimenziós normált térben vannak olyan korlátos, zárt halmazok, amelyek *nem* kompaktak.
- Klee⁵⁰ bebizonyította a (b) \implies (a) implikációt is: tetszőleges nem-reflexív normált térben konstruált olyan diszjunkt nem-üres konvex, korlátos és zárt halmazokat, amelyek nem választhatók szét a (14.7)-beli értelemben.
- A (c) tulajdonság általánosítja a merőleges vetítés tételét (10. o.). Bizonyos további feltevések mellett y egyértelmű.⁵¹
- Hilbert-terekben a (d) tulajdonság egyenértékű M -re merőleges egységvektor létezésével.
- Az (e) tulajdonság szerint reflexív X terekben

$$\|\varphi\| = \max_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

minden $\varphi \in X'$ funkcionálra, vagyis max írható sup helyett.

- James⁵² megmutatta az (e) \implies (a) implikációt is, úgyhogy a felsorolt öt tulajdonság valójában *ekvivalens*.

⁴⁸ Tukey 1942.

⁴⁹ Lásd a 14.25 állítást, 75. o.

⁵⁰ Klee 1951.

⁵¹ Lásd a 21.10 állítást, 273. o.

⁵² James 1964. Lásd például Diestel 1975 vagy Holmes 1975.

Bizonyítás.

(a) \implies (b). Megismételhetők a 14.7 tétel (c) részének (49. o.) a bizonyítása, kivéve a $\text{dist}(A, B) > 0$ egyenlőtlenség igazolását. Ez most a következő módon látható be:

Ha $\text{dist}(A, B) = 0$, akkor vannak olyan $(a_n) \subset A$ és $(b_n) \subset B$ sorozatok, hogy $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$. Ha például A korlátos (a másik eset analóg), akkor létezik *gyengén* konvergens $a_{n_k} \rightharpoonup a$ részsorozat. Akkor $a_n - b_n \rightharpoonup 0$ miatt $b_{n_k} \rightharpoonup a$ is teljesül. Minthogy A és B *konvex, zárt* halmazok, innen $a \in A$ és $a \in B$, ellentmondva A és B diszjunkttségének.

(b) \implies (c). Eltolással feltehető, hogy $x = 0$. Elegendő tehát belátnunk, hogy minden nem-üres konvex, zárt K halmaznak van minimális normájú eleme. A $0 \in K$ eset nyilvánvaló. Legyen ezentúl $0 \notin K$, akkor K zártsága miatt $r := \text{dist}(0, K) > 0$.

Tegyük fel indirekt, hogy K -nak nincs minimális normájú eleme; akkor K és

$$A := \{x \in X : \|x\| \leq r\}$$

diszjunkt nem-üres konvex, zárt halmazok. Alkalmazva (b)-t létezik olyan $\varphi \in X'$ funkcionál, hogy alkalmas c_1, c_2 számokkal és $B := K$ -val (14.7) teljesül.

Legyen (y_n) olyan K -beli sorozat, amelyre $\|y_n\| \rightarrow r$. Akkor

$$c_2 \leq \varphi(y_n) = \frac{\|y_n\|}{r} \varphi\left(\frac{ry_n}{\|y_n\|}\right) \leq \frac{\|y_n\|}{r} c_1 \rightarrow c_1,$$

ellentmondva a $c_1 < c_2$ egyenlőtlenségnek.

(c) \implies (d). Tetszőlegesen rögzített $z \in X \setminus M$ ponthoz (c) alapján található z -től minimális távolságra lévő M -beli y pont. Akkor

$$\|z - y\| \leq \|z - y - u\|$$

minden $u \in M$ -ra, mert $y + u \in M$. Tehát

$$\|z - y\| = \text{dist}(z - y, M),$$

úgyhogy $x := (z - y)/\|z - y\|$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. (Itt $\|z - y\| > 0$, mert $z \notin M$ és $y \in M$.)

(d) \implies (e). Alkalmazzuk (d)-t φ magjára:

$$M := N(\varphi) = \{y \in X : \varphi(y) = 0\}.$$

Akkor $\varphi(x) \neq 0$, mert $x \notin M$. Meg fogjuk mutatni hogy

$$|\varphi(z)| \leq |\varphi(x)| \cdot \|z\|$$

minden $z \in X$ -re, úgyhogy $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Elég a $\varphi(z) \neq 0$ esettel foglalkozni. Bevezetve a $\lambda := \varphi(z)/\varphi(x) \neq 0$ számot $\varphi(z - \lambda x) = 0$, és így $y := z - \lambda x \in M$. Következésképpen

$$\|z\| = \|\lambda x + y\| = |\lambda| \cdot \|x + \lambda^{-1}y\| \geq |\lambda| \cdot \text{dist}(x, M) = |\lambda|.$$

Ezt felhasználva

$$|\varphi(z)| = |\varphi(\lambda x)| = |\lambda| \cdot |\varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \cdot \|z\|. \quad \square$$

Mutassuk meg néhány példán keresztül, hogy nem-reflexív terekben a (b), (c), (d), (e) tulajdonságok nem feltétlenül teljesülnek:

***Példák.** Legyen $X = \ell^1$, és rögzítsünk egy pozitív, szigorúan monoton növekvő, 1-hez tartó (α_n) számsorozatot, például $\alpha_n := n/(n+1)$.

- A $\varphi(x) := \sum \alpha_n x_n$ képlettel definiált funkcionálra $\|\varphi\| = 1$: egyrészt

$$|\varphi(x)| \leq \sum |x_n| = \|x\|_1$$

minden $x \in \ell^1$ -re, másrészt

$$|\varphi(e_n)| = |\alpha_n| = |\alpha_n| \cdot \|e_n\|$$

minden n -re, és $|\alpha_n| \rightarrow 1$. Azonban $\|\varphi\| = 1$ nem vétetik fel, mert

$$|\varphi(x)| < \|x\|_1 \quad \text{minden } x \neq 0\text{-ra.}$$

Van ugyanis legalább egy nem-nulla x_k komponense x -nek, és akkor

$$|\varphi(x)| \leq |\alpha_k| \cdot |x_k| + \sum_{n \neq k} |\alpha_n| \cdot |x_n| \leq |\alpha_k| \cdot |x_k| + \sum_{n \neq k} |x_n| < \sum |x_n| = \|x\|_1.$$

Tehát az (e) tulajdonság nem teljesül.

- Tekintsük az

$$M := \{x = (x_n) \in \ell^1 : \sum \alpha_n x_n = 0\}$$

zárt hipersíkot. Megmutatjuk, hogy minden $x \neq 0$ -hoz van olyan $z \in M$, amelyre $\|x - z\| < \|x\|$. Így $\|x\| > \text{dist}(x, M)$, tehát (d) nem teljesül.

Rögzítsünk olyan k -t, amelyre $x_k \neq 0$, akkor a

$$z_n := \begin{cases} \alpha_{k+1}x_k & \text{ha } n = k, \\ -\alpha_k x_k & \text{ha } n = k+1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

képlet M -beli $z = (z_n)$ elemet definiál. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}\|x - z\| - \|x\| &= |(1 - \alpha_{k+1})x_k| + |x_{k+1} + \alpha_k x_k| - |x_k| - |x_{k+1}| \\ &= -\alpha_{k+1}|x_k| + (|x_{k+1} + \alpha_k x_k| - |x_{k+1}|) \\ &\leq (\alpha_k - \alpha_{k+1})|x_k| < 0.\end{aligned}$$

- Tekintsük a fenti M hipersíkot. Ha $x \in X \setminus M$, akkor a $\text{dist}(x, M)$ távolság nem vétetik fel, és így (c) nem teljesül $K = M$ -re.

Valóban, tetszőleges $v \in M$ esetén alkalmazzuk az előző eredményt x helyett $x - v$ -re (e vektor nem nulla, mert $x \notin M$ és $v \in M$): van olyan $z \in M$, hogy $\|x - v - z\| < \|x - v\|$. Minthogy $v + z \in M$, innen $\|x - v\| > \text{dist}(x, M)$.

- Most láttuk, hogy $x \in X \setminus M$ esetén az $r := \text{dist}(x, M)$ távolság nem vétetik fel. Ezért a fenti (b) \implies (c) implikáció bizonyítása mutatja, hogy $A := B_r(x)$ és $B := M$ nem választhatók szét a (14.7)-beli értelemben.

***Megjegyzés.** Hasonló példákat kaphatunk $X = c_0$ -ban a $\varphi(x) := \sum 2^{-n} x_n$ lineáris funkcionálból kiindulva.

A (d) tulajdonságnak van egy gyengített, de nagyon hasznos változata, amely *minden* normált térben érvényes. A segítségével könnyen konstruálhatunk *bármely* végtelen dimenziós normált térben olyan korlátos, zárt halmazokat, amelyek nem kompaktak:

14.25. Állítás. (Riesz⁵³) Legyen X végtelen dimenziós normált tér.

- (a) (Riesz lemma) Ha $M \subset X$ valódi zárt altér, akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $x \in X$, hogy

$$\|x\| = 1 \quad \text{és} \quad \text{dist}(x, M) > 1 - \varepsilon. \quad (14.8)$$

- (b) Ha $M \subset X$ véges dimenziós altér, akkor létezik olyan $x \in X$, hogy

$$\|x\| = 1 \quad \text{és} \quad \text{dist}(x, M) = 1.$$

- (c) Létezik egységvektoroknak olyan (x_n) sorozata, hogy $\|x_m - x_n\| \geq 1$ minden $m \neq n$ -re.

- (d) Az X -beli zárt gömbök nem kompaktak.

⁵³ Riesz 1917.

Bizonyítás.

(a) Válasszunk egy $z \in X \setminus M$ pontot, majd egy *minimalizáló* $(y_n) \subset M$ sorozatot:

$$\|z - y_n\| \rightarrow \text{dist}(z, M).$$

Mivel M zártasága miatt $\text{dist}(z, M) > 0$, elég nagy n esetén

$$(1 - \varepsilon)\|z - y_n\| < \text{dist}(z, M) = \text{dist}(z - y_n, M).$$

Ekkor az $x := (z - y_n)/\|z - y_n\|$ pont eleget tesz (14.8)-nak.

(b) Mivel M véges dimenziós, az imént konstruált (y_n) sorozatnak van konvergens $y_{n_k} \rightarrow y$ részsorozata. Akkor $x := (z - y)/\|z - y\|$ megfelel.

(c) A (b) tulajdonság ismételt alkalmazásával egységvektorok olyan (x_n) sorozata definiálható, hogy mindegyikük egységnyi távolságra van a megelőzők által generált altértől.

(d) Hasonlósági megfontolásokkal elegendő a B zárt egységgömböt vizsgálni. A (c)-ben konstruált sorozat B -beli, de egyetlen részsorozata sem Cauchy-féle. \square

***Megjegyzés.** Kottman⁵⁴ megmutatta, hogy (c)-ben szigorú egyenlőtlenség is elérhető. Jegyezzük meg, hogy ha (x_n) ortonormált sorozat valamely euklideszi térben, akkor $\|x_m - x_n\| = \sqrt{2}$ minden $m \neq n$ -re.

14.8. * Nyílt leképezések és zárt gráfok

Az itt ismertetett eredmények fontos szerepet játszanak többek között a lineáris parciális differenciálegyenletek elméletében.⁵⁵

⁵⁴ Kottman 1975. Rövid bizonyítást ismertet Diestel 1984, 7. o.

⁵⁵ Lásd például Hörmander 1963, 1983.

14.26. Tétel. Legyen X és Y Banach-tér.

- (a) (Nyílt leképezés tétel⁵⁶) Ha $A \in L(X, Y)$ szuperjektív, akkor A minden X -beli nyílt halmazt Y -beli nyílt halmazba visz át.
- (b) (Inverz leképezés tétel⁵⁷) Ha $A \in L(X, Y)$ bijektív, akkor A^{-1} folytonos.
- (c) (Ekvivalens normák⁵⁸) Legyen $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ két teljes norma a Z vektortéren. Ha van olyan c konstans, hogy $\|z\|_2 \leq c\|z\|_1$ minden $z \in Z$ -re, akkor olyan C konstans is van, hogy $\|z\|_1 \leq C\|z\|_2$ minden $z \in Z$ -re.
- (d) (Zárt gráf tétel⁵⁹) Ha az $A : X \rightarrow Y$ lineáris leképezés $\{(x, Ax) : x \in X\}$ gráfja zárt $X \times Y$ -ban, akkor A folytonos.

Megjegyzés. Az utolsó tulajdonság megfordítása mindig igaz: ha X, Y topologikus terek és $f : X \rightarrow Y$ folytonos függvény, akkor $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ zárt $X \times Y$ -ban.

A felsorolt eredmények mindegyike a következő kulcsfontosságú segéd-tételen alapul; az egyszerűség kedvéért B_r -rel jelöljük a 0 középpontú r sugarú (nyílt) gömböt X -ben és Y -ban is.

14.27. Lemma. Legyen $A \in L(X, Y)$, ahol X és Y Banach-terek. Ha A szuperjektív, akkor van olyan $r > 0$, hogy $B_r \subset A(B_1)$.

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy alkalmas $r > 0$ -ra

$$B_{2r} \subset \overline{A(B_1)}. \quad (14.9)$$

Mínt hogy A szuperjektív,

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A(B_k)}.$$

A Baire-lemma (26. o.) alapján az $\overline{A(B_k)}$ halmazok valamelyike tartalmaz gömböt, mondjuk $B_s(y) \subset \overline{A(B_k)}$. Akkor

$$B_s(-y) \subset -\overline{A(B_k)} = \overline{A(B_k)}$$

⁵⁶ Schauder 1930.

⁵⁷ Banach 1929.

⁵⁸ Banach 1929.

⁵⁹ Banach 1932.

is teljesül. Ha $x \in B_s$, akkor $x \pm y \in B_s(\pm y) \subset \overline{A(B_k)}$. Felhasználva $\overline{A(B_k)}$ konvexitását, innen

$$x = \frac{(x+y) + (x-y)}{2} \in \overline{A(B_k)}.$$

Tehát $B_s \subset \overline{A(B_k)}$, ahonnan hasonlósági meggondolással (14.9) $r := s/2k$ -val adódik.

Rögzítsünk most egy tetszőleges $y \in B_r$ pontot. Olyan $x \in B_1$ -et kell találnunk, amelyre $Ax = y$. Jegyezzük meg ehhez, hogy hasonlósági meggondolásból (14.9) maga után vonja a következő általánosabb relációt:

$$B_{2^{1-n}r} \subset \overline{A(B_{2^{-n}})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ezeket felhasználva rekurzióval olyan X -beli x_1, x_2, \dots sorozatot konstruálhatunk, hogy

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{és} \quad \|y - A(x_1 + \dots + x_n)\| < \frac{r}{2^n}$$

minden n -re. Akkor a $\sum x_n$ sor konvergál valamely $x \in B_1$ ponthoz, és A folytonossága miatt $Ax = \sum Ax_n = y$. \square

A 14.26 tétel bizonyítása.

(a) Adott X -beli U nyílt halmazhoz és $x \in U$ ponthoz olyan $s > 0$ -t kell találnunk, hogy $B_s(Ax) \subset A(U)$. Rögzítsünk olyan $\varepsilon > 0$ -t, amelyre $B_\varepsilon(x) \subset U$; akkor $s := r\varepsilon$ megfelel. Alkalmazva ugyanis az előző lemmát

$$B_s(Ax) = Ax + B_s = Ax + \varepsilon B_r \subset Ax + \varepsilon A(B_1) = A(B_\varepsilon(x)) \subset A(U).$$

(b) adódik (a)-ból a folytonosság nyílt halmazokkal való jellemzése miatt.⁶⁰

(c) Feltevésünk szerint az identikus leképezés folytonos $(Z, \|\cdot\|_1)$ -ről $(Z, \|\cdot\|_2)$ -re, így (b) miatt izomorfizmus.

(d) Feltevésünk szerint az

$$\|x\|_1 := \|x\| + \|Ax\|$$

képlet teljes normát definiál X -en. Minthogy nyilvánvalóan $\|x\| \leq \|x\|_1$, (c) alapján van olyan C konstans, hogy $\|x\|_1 \leq C\|x\|$ minden $x \in X$ -re. Így A folytonos, és $\|A\| \leq C - 1$. \square

⁶⁰ Topológia, 2.9 állítás, 41. o.

Reflexív terek esetén a fenti tételekre egyszerűbb bizonyítások is adhatók.⁶¹ Mutassuk be ezt az inverz leképezés tétel esetében:

Az inverz leképezés tétel bizonyítása, ha X reflexív. Mivel A szuperjektív, az

$$F_k := \{Ax : \|x\| \leq k\} = A(\overline{B_k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

halmazok befedik Y -t. Fogadjuk el egy pillanatra, hogy e halmazok zártak. Akkor legalább az egyikük tartalmaz gömböt a Baire-lemma szerint, mondjuk $B_r(y) \subset F_k$. Ebből következik, hogy

$$\|A^{-1}x\| \leq k \quad \text{minden } x \in B_r(y)\text{-ra,}$$

és így

$$\|A^{-1}x\| \leq k + \|A^{-1}y\| \quad \text{minden } x \in B_r(0)\text{-ra.}$$

Következésképpen $\|A^{-1}\| \leq r^{-1}(k + \|A^{-1}y\|)$.

Mutassuk meg, hogy mindegyik F_k zárt. Ha $\|x_n\| \leq k$ és $Ax_n \rightarrow y \in Y$, akkor X reflexivitása miatt létezik gyengén konvergens $x_{n_k} \rightharpoonup x$ részsorozat, és $\|x\| \leq k$ a gyenge konvergencia egyik alaptulajdonsága szerint. Akkor A folytonossága miatt $Ax_n \rightharpoonup Ax$ (ez a definícióból egyenesen következik), tehát $y = Ax \in F_k$ a gyenge határérték egyértelműsége alapján. \square

Csak egy alkalmazást adunk itt e tételekre:

14.28. Állítás. (Hellinger–Toeplitz⁶²) Legyen $A, B : H \rightarrow H$ két lineáris leképezés a H Hilbert-térben. Ha

$$(Ax, y) = (x, By)$$

minden $x, y \in H$ -ra, akkor A és B folytonos.

Bizonyítás. Az A leképezés folytonosságához (B esete analóg) elég megmutatni, hogy $x_n \rightarrow x$ és $Ax_n \rightarrow z$ esetén $z = Ax$. Akkor ugyanis alkalmazhatjuk a zárt gráf tételt.

Az $(Ax_n, y) = (x_n, By)$ egyenlőségből $n \rightarrow \infty$ esetén

$$(z, y) = (x, By), \quad \text{vagyis} \quad (Ax - z, y) = 0$$

adódik minden $y \in H$ -ra. Az $y := Ax - z$ választással a keresett $Ax = z$ egyenlőség adódik. \square

⁶¹ O. Gebuhrer személyes közlése.

⁶² Hellinger–Toeplitz 1910 (321–327. o.), Stone 1932.

Megjegyzés. A zárt gráf tétel helyett alkalmazhatjuk a Banach–Steinhaus tételt is. Jelöljük F -fel H zárt egységgömbjét, és vezessük be minden $y \in F$ -re a

$$\varphi_y(x) := (x, By)$$

képlettel értelmezett φ_y lineáris funkcionált; nyilván $\|\varphi_y\| = \|By\|$.

E lineáris funkcionálok rendszere pontonként korlátos, hiszen tetszőleges rögzített $x \in H$ esetén

$$|\varphi_y(x)| = |(Ax, y)| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|Ax\|$$

minden $y \in F$ -re. A Banach–Steinhaus tétel szerint e rendszer egyenletesen is korlátos, és így

$$\|B\| = \sup_{y \in F} \|By\| = \sup_{y \in F} \|\varphi_y\| < \infty.$$

14.9. * Folytonos és kompakt operátorok

Akárcsak a Hilbert-terek esetén, az adjungált lineáris leképezés bevezetése most is megkönnyíti a folytonosság és a gyenge konvergencia kapcsolatainak a megvilágítását.

Definíció. Legyenek X és Y normált terek. A folytonos lineáris $A \in L(X, Y)$ leképezés *adjungáltján*⁶³ az

$$A^* \varphi := \varphi A, \quad \varphi \in Y'$$

képlettel értelmezett $A^* : Y' \rightarrow X'$ lineáris leképezést értjük.

Megjegyzések.

- Ha $X = Y$ Hilbert-tér, akkor X' -t és X -et azonosítva a Riesz–Fréchet tétel alapján visszajutunk az előző fejezetbeli definícióhoz.
- A skaláris szorzattal való analógia hangsúlyozására gyakran írnak $\varphi(x)$ helyett $\langle \varphi, x \rangle$ -et; ekkor az adjungált definíciója átírható a következő alakba:

$$\langle A^* \varphi, x \rangle = \langle \varphi, Ax \rangle \quad \text{minden } x \in X\text{-re.}$$

14.29. Állítás. Legyenek X, Y és Z normált terek.

(a) Ha $A \in L(X, Y)$, akkor $A^* \in L(Y', X')$ és $\|A^*\| = \|A\|$.

(b) Az $A \mapsto A^*$ leképezés lineáris izometria.

⁶³ Riesz 1910, Banach 1929, Schauder 1930.

(c) Ha $B \in L(X, Y)$ és $A \in L(Y, Z)$, akkor $(AB)^* = B^*A^*$.

(d) Ha $A \in L(X, Y)$ invertálható, akkor $A^* \in L(Y', X')$ is invertálható, és

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Bizonyítás. Csak az $\|A^*\| = \|A\|$ egyenlőség nem nyilvánvaló. A minden $\varphi \in X'$ -re érvényes

$$\|A^*\varphi\| = \|\varphi A\| \leq \|\varphi\| \cdot \|A\|$$

becslésből következik, hogy $\|A^*\| \leq \|A\|$.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolására válasszunk minden nem-nulla $x \in X$ vektorhoz olyan $\varphi \in X'$ funkcionált, amelyre $\|\varphi\| = 1$ és $\varphi(Ax) = \|Ax\|$. Ez a 14.12 következmény (55. o.) szerint lehetséges. Akkor

$$\|Ax\| = \varphi(Ax) = (A^*\varphi)x \leq \|A^*\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = \|A^*\| \cdot \|x\|,$$

és innen $\|A\| \leq \|A^*\|$. □

Általánosítsuk most a folytonos lineáris operátorok Hilbert-terekbeni jellemzését, majd a teljesen folytonos operátorokat.

14.30. Állítás. Legyenek X, Y normált terek és $A : X \rightarrow Y$ lineáris leképezés. A következő tulajdonságok ekvivalensek:

- (a) van olyan M konstans, hogy $\|Ax\| \leq M\|x\|$ minden $x \in X$ -re;
- (b) korlátos halmazokat A korlátos halmazokba visz át;
- (c) teljesen korlátos halmazokat A teljesen korlátos halmazokba visz át;
- (d) ha $x_n \rightarrow x$, akkor $Ax_n \rightarrow Ax$;
- (e) ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor $Ax_n \rightharpoonup Ax$;
- (f) ha $x_n \rightarrow x$, akkor $Ax_n \rightharpoonup Ax$.

Bizonyítás. Felhasználva a 14.17 (62. o.) és 14.29 állításokat szó szerint megismételhetők a 13.15 állítás bizonyítása (29. o.). □

***Példa.** Az $i : \ell^p \rightarrow \ell^q$ beágyazások minden $1 \leq p \leq q \leq \infty$ esetén folytonosak. Ehhez elég belátni, hogy ha $\|x\|_p \leq 1$, akkor $\|x\|_q \leq 1$. De $\|x\|_p \leq 1$ esetén $|x_n| \leq 1$ minden n -re, és innen $q < \infty$ esetén

$$\|x\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \|x\|_p^p \leq 1,$$

míg a $q = \infty$ eset már az $|x_n| \leq 1$ egyenlőtlenségekből következik.

Azt is beláttuk, hogy $\|i\| \leq 1$. Mivel $\|x\|_p = \|x\|_q > 0$ minden olyan vektorra, amelynek csak egy nem-nulla komponense van, valójában $\|i\| = 1$.

Definíció. Legyen X és Y Banach-tér. Az $A : X \rightarrow Y$ lineáris leképezés *teljesen folytonos* vagy *kompakt*⁶⁴, ha a következő két ekvivalens feltétel valamelyike teljesül:

(a) minden korlátos X -beli (x_n) sorozatra van (Ax_n) -nek Y -ban konvergens részsorozata;

(b) korlátos halmazokat A teljesen korlátos halmazokba visz át.

***Megjegyzések.**

- A két feltétel ekvivalenciája Y teljességéből következik: lásd a 13.17 állítás bizonyítását, 30. o.
- Ha A teljesen folytonos, akkor folytonos is, mert

$$x_n \rightarrow x \implies Ax_n \rightarrow Ax; \quad (14.10)$$

a 13.17 állításbeli bizonyítás érvényben marad.

- Megfordítva, *reflexív* X terek esetén a (14.10) tulajdonságból következik, hogy A teljesen folytonos: a 13.17 állításbeli bizonyítás megismételhető. A reflexivitás feltétele lényeges: például az $X = \ell^1$ tér identikus leképezése nem teljesen folytonos (lásd a 14.25 állítást, 75. o.), pedig eleget tesz (14.10)-nek, hiszen ℓ^1 -ben a 14.19 állítás alapján (64. o.) az erős és gyenge konvergencia azonos.

Példák.

- Ha Y véges dimenziós, akkor minden $A \in L(X, Y)$ leképezés teljesen folytonos, hiszen Y -ban a korlátos és teljesen korlátos halmazok azonosak.⁶⁵
- Ha X végtelen dimenziós, akkor az $I : X \rightarrow X$ identikus leképezés nem teljesen folytonos a 14.25 állítás szerint.
- Az $i : \ell^p \rightarrow \ell^q$ *beágyazások* semmilyen $1 \leq p \leq q \leq \infty$ esetén sem teljesen folytonosak: az (e_n) sorozat korlátos ℓ^p -ben, de nincs konvergens részsorozata ℓ^q -ban, mert $\|e_n - e_m\|_q \geq 1$ minden $n \neq m$ -re.

A 13.19 állítás (31. o.) bizonyításának adaptálásával igazolható⁶⁶ a

⁶⁴ Hilbert 1906, Riesz 1917.

⁶⁵ *Topológia*, 3.9 tétel, 75. o.

⁶⁶ Az első két tulajdonságot az imént újra beláttuk.

14.31. Állítás.

- (a) Minden teljesen folytonos lineáris leképezés folytonos is.
- (b) Ha $\dim Y < \infty$, akkor minden $A \in L(X, Y)$ leképezés teljesen folytonos.
- (c) Legyenek X, Y, Z Banach-terek, és $B \in L(X, Y)$, $A \in L(Y, Z)$. Ha A vagy B teljesen folytonos, akkor AB is teljesen folytonos.
- (d) A teljesen folytonos $A : X \rightarrow Y$ lineáris leképezések zárt alteret alkotnak $L(X, Y)$ -ban.

Befejezésül igazoljunk egy mélyebb eredményt:

14.32. *Állítás. (Schauder⁶⁷) Ha $A \in L(X, Y)$ teljesen folytonos, akkor $A^* \in L(Y', X')$ is teljesen folytonos.

Bizonnyítás. Ha Y -t teljessé tesszük, akkor Y' és $A^* \in L(Y', X')$ nem változik; feltehetjük tehát, hogy Y teljes. Legyen Δ korlátos halmaz Y' -ben: $\|\varphi\| \leq L$ minden $\varphi \in \Delta$ -ra. Meg kell mutatnunk, hogy

$$\{A^*\varphi : \varphi \in \Delta\} = \{\varphi \circ A : \varphi \in \Delta\}$$

teljesen korlátos X' -ben. Bevezetve X zárt F egységömbjét, X' normájának a definíciója miatt ez ekvivalens azzal, hogy

$$\{\varphi \circ A|_F : \varphi \in \Delta\}$$

teljesen korlátos $C_b(F)$ -ben, illetve azzal, hogy

$$\{\varphi|_{A(F)} : \varphi \in \Delta\}$$

teljesen korlátos $C_b(A(F))$ -ben. Bevezetve végül a $K := \overline{A(F)}$ halmazt, az utóbbi tulajdonság azzal is ekvivalens, hogy

$$\{\varphi|_K : \varphi \in \Delta\} \tag{14.11}$$

teljesen korlátos $C_b(K)$ -ban.

Vegyük észre, hogy Y teljes és A teljesen folytonos lévén a K halmaz kompakt Y -ban. Figyeljük meg továbbá, hogy

$$|\varphi(x)| \leq L\|A\| \quad \text{és} \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\|x - y\|$$

minden $\varphi \in \Delta$ és $x, y \in K$ esetén. Következésképpen a (14.11) függvényrendszer egyenletesen korlátos és egyformán folytonos. Alkalmazva a

⁶⁷ Schauder 1930.

klasszikus Arzelà-Ascoli tételt⁶⁸ a (14.11) függvényrendszer teljesen korlátozott. \square

14.10. * Fredholm-Riesz elmélet

Az alkalmazásokban gyakran találkozunk $I - K$ alakú operátorokkal, ahol K teljesen folytonos operátor.⁶⁹ Ebben a fejezetben megvilágítjuk ezek struktúráját.

Definíció. Az X vektortér az N és R alterek *direkt összege*, jelben $X = N \oplus R$, ha

$$X = N + R \quad \text{és} \quad N \cap R = \{0\}.$$

Megjegyzés. Ha $X = N \oplus R$, akkor $\dim N = \dim X/R$, ahol X/R az $y + R$, $y \in N$ ekvivalenciaosztályok által alkotott *faktortér* jelöli. Könnyen ellenőrizhető ugyanis, hogy az $y \mapsto y + R$ lineáris leképezés bijekció N és X/R között.

Ebben a fejezetben az A lineáris leképezés *magját* és *értékkészletét* $N(A)$ -val és $R(A)$ -val jelöljük.

14.33. Tétel. (Riesz⁷⁰) Legyen X Banach-tér, $K \in L(X, X)$ teljesen folytonos operátor és $T = I - K$. Van olyan $X = N \oplus R$ felbontás, hogy

- N és R invariánsak T -re nézve;
- N véges dimenziós;
- R zárt, és a $T|_R$ leszűkítés R automorfizmusa;
- alkalmas C konstanssal

$$\|y\| + \|z\| \leq C\|y + z\|$$

minden $y \in N$ -re és $z \in R$ -re.

Továbbá alkalmas $n \geq 0$ egészre $N = N(T^n)$, $R = R(T^n)$, és

$$\begin{aligned} \{0\} = N(T^0) \subsetneq \cdots \subsetneq N(T^n) = N(T^{n+1}) = \cdots, \\ X = R(T^0) \supsetneq \cdots \supsetneq R(T^n) = R(T^{n+1}) = \cdots \end{aligned}$$

⁶⁸ Lásd a 20.7 állítást, 227. o. A bizonyításában csak a topológia alapfogalmait fogjuk használni.

⁶⁹ Például az elektrosztatikában: lásd Riesz–Szőkefalvi-Nagy 1988, §81.

⁷⁰ Riesz 1917.

Több lépésben járunk el.

14.34. Lemma. Minden $n \geq 0$ egészre

- (a) $N(T^n)$ véges dimenziós altér;
 (b) $R(T^n)$ zárt altér.

Bizonyítás. Az $n = 0$ eset nyilvánvaló: $T^0 = I$ folytán $N(I) = \{0\}$ és $R(I) = X$. Az $n \geq 2$ eset visszavezethető az $n = 1$ esetre, mert $T^n = I - K_n$, ahol

$$\begin{aligned} K_n &= I - (I - K)^n \\ &= nK - \binom{n}{2}K^2 + \binom{n}{3}K^3 - \dots + (-1)^{n-1}K^n \end{aligned}$$

teljesen folytonos operátor. Tegyük fel ezentúl, hogy $n = 1$.

(a) $I = K$ $N(T)$ -n, vagyis $N(T)$ identikus leképezése teljesen folytonos. Riesz lemmája alapján (75. o.) tehát $N(T)$ véges dimenziós.

(b) Meg kell mutatnunk, hogy ha

$$Tx_n \rightarrow y \quad X\text{-ben}, \quad (14.12)$$

akkor $y \in R(T)$. Minden n -hez van olyan $z_n \in N(T)$, hogy

$$\|x_n - z_n\| \leq 2 \operatorname{dist}(x_n, N(T));$$

x_n -et $x_n - z_n$ -re cserélve (14.12) érvényben marad, és

$$\|x_n\| \leq 2 \operatorname{dist}(x_n, N(T)). \quad (14.13)$$

Fogadjuk el egy pillanatra, hogy az (x_n) sorozat korlátos. Akkor van olyan (x_{n_k}) részsorozata, amelyre (Kx_{n_k}) konvergens, mondjuk $Kx_{n_k} \rightarrow z$. Ebből következik, hogy

$$x_{n_k} = Tx_{n_k} + Kx_{n_k} \rightarrow y + z,$$

tehát $Tx_{n_k} \rightarrow T(y + z)$. Innen (14.12) miatt $y = T(y + z) \in R(T)$.

Ha az (x_n) sorozat nem volna korlátos, akkor volna $\|x_{n_k}\| \rightarrow \infty$ tulajdonságú részsorozata. A (14.12), (14.13) tulajdonságok $y = 0$ -val érvényben maradnak, ha (x_n) -t kicseréljük $(x_{n_k}/\|x_{n_k}\|)$ -re; emellett ekkor még a következő is teljesül:

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{minden } n\text{-re.} \quad (14.14)$$

Az előző gondolatmenet megismétlésével konvergens $x_{n_k} \rightarrow z$ részsorozathoz jutunk. Mivel $Tx_n \rightarrow 0$, innen $Tz = 0$, vagyis $z \in N(T)$. Másrészt (14.14)-ből következik, hogy $\|z\| = 1$. A (14.13) becslést $n = n_k$ -ra alkalmazva, $k \rightarrow \infty$ esetén a lehetetlen $1 \leq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. \square

14.35. Lemma.

(a) Van olyan $n \geq 0$ egész, hogy

$$\{0\} = N(T^0) \subsetneq \dots \subsetneq N(T^n) = N(T^{n+1}) = \dots \quad (14.15)$$

(b) Az $N(T^n)$ altér T -invariáns.

Bizonyítás.

(a) Ha $N(T^k) = N(T^{k+1})$ valamely k -ra, akkor $N(T^{k+1}) = N(T^{k+2})$, mert

$$x \in N(T^{k+2}) \iff Tx \in N(T^{k+1}) = N(T^k) \iff x \in N(T^{k+1}).$$

Meg kell még mutatnunk, hogy létezik ilyen k .

Az ellenkező esetben a 14.25 állítás (75. o.) felhasználásával olyan (x_n) sorozatot konstruálhatnánk, hogy

$$x_n \in N(T^n) \quad \text{és} \quad \|x_n\| = \text{dist}(x_n, N(T^{n-1})) = 1$$

minden $n = 1, 2, \dots$ -re. Akkor (x_n) korlátos, de (Kx_n) -nek nincs konvergens részsorozata, hiszen

$$\|Kx_n - Kx_m\| \geq 1 \quad \text{minden} \quad n > m\text{-re.}$$

Valóban,

$$Kx_n - Kx_m = x_n - y,$$

ahol

$$y = x_m - Tx_m + Tx_n \in N(T^{n-1}),$$

és innen

$$\|Kx_n - Kx_m\| \geq \text{dist}(x_n, N(T^{n-1})) = 1.$$

Ez ellentmond K kompaktságának.

(b) Ha $x \in N(T^n)$, akkor $Tx \in N(T^{n+1}) = N(T^n)$. □

14.36. Lemma.

(a) Van olyan $r \geq 0$ egész, hogy

$$X = R(T^0) \supsetneq \dots \supsetneq R(T^r) = R(T^{r+1}) = \dots \quad (14.16)$$

(b) Az $R(T^r)$ altér T -invariáns.

(c) $T|_{R(T^r)}$ az $R(T^r)$ altér automorfizmusa (önmagára való izomorfizmusa).

Bizonyítás.

(a) Ha $R(T^k) = R(T^{k+1})$ valamely k -ra, akkor $R(T^{k+1}) = R(T^{k+2})$,
ugyanis

$$R(T^{k+2}) = TR(T^{k+1}) = TR(T^k) = R(T^{k+1}).$$

Igazolnunk kell még, hogy létezik ilyen k .

Az ellenkező esetben a 14.25 állítás (75. o.) újbóli alkalmazásával olyan (x_n) sorozatot konstruálhatnánk, hogy

$$x_n \in R(T^n), \|x_n\| = 2 \quad \text{és} \quad \text{dist}(x_n, R(T^{n+1})) > 1$$

minden $n = 0, 1, \dots$ -re. Akkor (x_n) korlátos, de (Kx_n) -nek nincs konvergens részsorozata, mert

$$\|Kx_n - Kx_m\| > 1 \quad \text{minden} \quad n < m\text{-re.}$$

Valóban,

$$Kx_n - Kx_m = x_n - y,$$

ahol

$$y = x_m - Tx_m + Tx_n \in R(T^{n+1}),$$

és így

$$\|Kx_n - Kx_m\| \geq \text{dist}(x_n, R(T^{n+1})) > 1.$$

Ez ismét ellentmond K kompaktságának.

(b) Vegyük észre, hogy $TR(T^r) = R(T^{r+1}) = R(T^r)$.

(c) A T operátor $R(T^r)$ -re vett leszűkítése szuperjektív, mert

$$TR(T^r) = R(T^{r+1}) = R(T^r).$$

Innen adódik, hogy $T^k|_{R(T^r)}$ is szuperjektív minden $k \geq 0$ -ra.

A T operátor $R(T^r)$ -re vett leszűkítése injektív is. Legyen ugyanis $x \in R(T^r)$ és $Tx = 0$. Tekintsük az előző lemmabeli n -et. A szuperjektivitás alapján van olyan $y \in R(T^r)$, hogy $x = T^n y$. Ekkor $0 = Tx = T^{n+1} y$, tehát $y \in N(T^{n+1}) = N(T^n)$. Következésképpen $x = T^n y = 0$.

A $T|_{R(T^r)}$ operátor inverze folytonos. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy van olyan $R(T^r)$ -beli (x_n) sorozat, amelyre $Tx_n \rightarrow 0$, és $\|x_n\| = 1$ minden n -re. Minthogy K kompakt, található $Kx_{n_k} \rightarrow z$ konvergens részsorozat. Akkor $x_{n_k} = Tx_{n_k} + Kx_{n_k} \rightarrow z$. Itt $z \in R(T^r)$, mert $R(T^r)$ zárt,

$$\|z\| = \lim \|x_{n_k}\| = 1 \quad \text{és} \quad Tz = \lim Tx_{n_k} = 0.$$

Ez ellentmond $T|_{R(T^r)}$ injektivitásának. □

A következő lemma befejezi a 14.33 tétel bizonyítását.

14.37. Lemma.

(a) A fent bevezetett n és r számok egyenlők.

(b) $X = R(T^n) \oplus N(T^n)$.

(c) Létezik olyan C konstans, hogy

$$\|y\| + \|z\| \leq C\|y + z\|$$

minden $y \in N(T^n)$ és $z \in R(T^n)$ esetén.

Bizonyítás.

(a) Ha $T^{r+1}x = 0$, akkor $T^r x \in R(T^r)$ és $T(T^r x) = 0$, tehát $T^r x = 0$ a $T|_{R(T^r)}$ operátor injektivitása miatt. Így $N(T^{r+1}) \subset N(T^r)$, ahonnan valójában $N(T^{r+1}) = N(T^r)$. Tehát $r \geq n$.

Ha $T^n x \in R(T^n)$, akkor $T^{n+r} x \in R(T^{n+r}) \subset R(T^r)$, létezik tehát az előző lemma alapján olyan $y \in R(T^r)$, hogy $T^{n+r+1}y = T^{n+r}x$. Akkor

$$x - Ty \in N(T^{n+r}) = N(T^n),$$

ahonnan $T^n x = T^{n+1}y \in R(T^{n+1})$. Innen $R(T^n) \subset R(T^{n+1})$, és így valójában $R(T^n) = R(T^{n+1})$. Tehát $n \geq r$.

(b) Minthogy T^r injektív $R(T^r)$ -en, $R(T^r) \cap N(T^r) = \{0\}$. Másrészt tetszőlegesen adott $x \in X$ -re $T^r x \in R(T^r)$, tehát van olyan $u \in R(T^r)$ az előző lemma alapján, amelyre $T^{2r}u = T^r x$. Akkor $y := T^r u \in R(T^r)$ és $z := x - T^r u \in N(T^r)$.

(c) A (b)-beli jelölést használva a $T^r x \mapsto u$ lineáris leképezés folytonos az előző lemma (c) része miatt. Ekkor T^r folytonossága alapján a $Px := y$ képlettel értelmezett $P : X \rightarrow R(T^r)$ vetítés is folytonos. De akkor a $Qx := z$ képlettel értelmezett $Q : X \rightarrow N(T^r)$ vetítés is folytonos, hiszen $Q = I - P$. Innen a kívánt becslés $C := \|P\| + \|Q\|$ -val adódik. \square

A tétel első alkalmazásaként tanulmányozzuk a teljesen folytonos operátorok spektrumát.

Definíció. Az $A \in L(X, X)$ operátor $\rho(A)$ *rezolvens halmaza* azokból a λ valós számokból áll, amelyekre $A - \lambda I$ invertálható, vagyis létezik olyan $B \in L(X, X)$ operátor, hogy

$$(A - \lambda I)B = B(A - \lambda I) = I.$$

A rezolvens halmaz $\sigma(A) := \mathbb{R} \setminus \rho(A)$ komplementumát A *spektrumának* hívjuk.⁷¹

⁷¹ Hilbert 1906.

Példák.

- A spektrum minden sajátértéket tartalmaz.
- Ha X véges dimenziós, akkor A spektruma pontosan a sajátértékekből áll.
- Az első kötetbeli 7.6 állítás (a) része alapján (158. o.)⁷² $\sigma(A)$ minden $A \in L(X, X)$ operátorra a $[-\|A\|, \|A\|]$ intervallum zárt részhalmaza.
- Tekintsük $X = \ell^2$ -ben a $J(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$ képlettel értelmezett *jobbra tolást*. Igazolható, hogy J sajátértékeinek a halmaza $(-1, 1)$. Mivel $\|J\| = 1$, az előző megjegyzés alapján $\sigma(J) = [-1, 1]$.⁷³
- Tekintsük $X = \ell^2$ -ben a $B(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$ képlettel értelmezett *balra tolást*. Ismét igazolható, hogy $\|B\| = 1$ és $\sigma(B) = [-1, 1]$. Viszont B -nek nincs sajátértéke.⁷⁴

14.38. Állítás. (Riesz⁷⁵) Legyen K teljesen folytonos operátor az X Banach-térben.

- (a) Ha $\lambda \in \sigma(K)$ és $\lambda \neq 0$, akkor λ sajátértéke K -nak.
 (b) A K operátor sajátalterei lineárisan függetlenek.
 (c) A K operátor spektruma megszámlálható.
 (d) Ha K -nak végtelen sok sajátértéke van, akkor ezek sorozata nullához tart.

Bizonyítás.

(a). Alkalmazzuk a 14.33 tételt $T := I - \lambda^{-1}K$ -re $I - K$ helyett. Mivel T nem izomorfizmus X -en, $R(T^n) \neq X$, tehát $n \geq 1$. De akkor $N(T) \neq \{0\}$, úgyhogy λ sajátértéke K -nak.

(b). Tegyük fel indirekt, hogy léteznek páronként különböző $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sajátértékekhez tartozó, lineárisan összefüggő x_1, \dots, x_m sajátvektorok. Válasszunk olyan rendszert, amelyre m minimális, és tekintsünk egy nem-triviális

$$x := c_1 x_1 + \dots + c_m x_m = 0$$

lineáris kombinációt. Akkor $(A - \lambda_m I)x = 0$, vagyis

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + \dots + c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0.$$

⁷² Ennek az igazolásakor csak a Topológiaiabeli 1.9 fixponttételt (17. o.) használtuk fel.

⁷³ $(n^{-1}) \notin R(J - I)$ és $((-1)^n n^{-1}) \notin R(J + I)$.

⁷⁴ $J - \lambda I$ egyetlen $\lambda \in [-1, 1]$ -re sem szuperjektív, ugyanis $e_1 \notin R(B - \lambda I)$.

⁷⁵ Riesz 1917.

Ez azonban ellentmond m minimalitásának.

(c) és (d). Elég megmutatnunk, hogy tetszőleges rögzített $\varepsilon > 0$ -ra csak véges sok $|\lambda| > \varepsilon$ tulajdonságú sajátérték lehet. Tegyük fel indirekt, hogy létezik páronként különböző, ε -nál nagyobb abszolút értékű sajátértékeknek egy végtelen (λ_n) sorozata. Legyen $M_0 := \{0\}$, és jelöljük M_n -nel a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ -hez tartozó sajátalterek összegét, $n = 1, 2, \dots$. A (b) tulajdonság miatt M_{n-1} valódi altere M_n -nek, továbbá nyilván

$$(\lambda_n I - K)M_n \subset M_{n-1}.$$

A 14.25 állítást (75. o.) alkalmazva minden $n \geq 1$ -re rögzítsünk egy olyan $x_n \in M_n$ pontot, hogy

$$\|x_n\| = \text{dist}(x_n, M_{n-1}) = 1.$$

A $(\lambda_n^{-1}x_n)$ sorozat korlátos lévén $(K(\lambda_n^{-1}x_n))$ -nek van konvergens részsorozata. Ez azonban lehetetlen, mert

$$\|K(\lambda_n^{-1}x_n) - K(\lambda_m^{-1}x_m)\| \geq 1$$

minden $n > m$ -re. Ez x_n választásából következik, hiszen

$$K(\lambda_n^{-1}x_n) - K(\lambda_m^{-1}x_m) = x_n - y,$$

ahol

$$y = \lambda_n^{-1}(\lambda_n I - K)x_n + \lambda_m^{-1}Kx_m \in M_{n-1}. \quad \square$$

Tanulmányozzuk most az

$$x - Kx = y \quad \text{és} \quad \varphi - K^*\varphi = \psi$$

egyenleteket, ahol K kompakt operátor. A következő tétel messzemenően általánosítja a 13.24 állítást (38. o.):

14.39. Tétel. (Fredholm alternatíva⁷⁶) Ha K kompakt operátor az X Banach-térben, akkor

(a) $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$;

(b) $R(I - K^*) = N(I - K)^\perp$;

(c) $\dim N(I - K^*) = \dim N(I - K)$;

(d) $N(I - K) = \{0\} \iff R(I - K) = X$.

⁷⁶ Fredholm 1900, 1903, Riesz 1917, Hildebrandt 1928, Schauder 1930.

Bizonyítás. Legyen $T = I - K$, akkor $T^* = I - K^*$.

(a) Minden $\varphi \in X'$ -re fennáll a következő ekvivalenciasorozat:

$$\begin{aligned}\varphi \in R(T)^\perp &\iff \langle \varphi, Tx \rangle = 0 \quad \text{minden } x \in X\text{-re} \\ &\iff \langle T^*\varphi, x \rangle = 0 \quad \text{minden } x \in X\text{-re} \\ &\iff \varphi \in N(T^*).\end{aligned}$$

Mint ahogy $R(T)$ zárt, a 14.9 következményt (53. o.) alkalmazva a keresett egyenlőséget nyerjük:

$$R(T) = \overline{R(T)} = R(T)^{\perp\perp} = N(T^*)^\perp.$$

(b) Ha $\varphi = T^*\psi \in R(T^*)$ és $x \in N(T)$, akkor

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle T^*\psi, x \rangle = \langle \psi, Tx \rangle = \langle \psi, 0 \rangle = 0.$$

Tehát $R(T^*) \subset N(T)^\perp$.

A fordított tartalmazási reláció igazolásához rögzítsünk egy olyan Z alteret $N(T^n)$ -ben, hogy $N(T^n) = N(T) \oplus Z$, és legyen $Y := Z + R(T^n)$. A 14.33 tétel (84. o.) alapján $T|_Y : Y \rightarrow R(T)$ izomorfizmus.

Ha $\varphi \in N(T)^\perp$, akkor $\varphi \circ (T|_Y)^{-1}$ folytonos lineáris funkcionál $R(T)$ -n. A Helly–Hahn–Banach tétel (54. o.) alapján kiterjeszthető tehát alkalmas $\psi \in X'$ funkcionállá. Akkor $T^*\psi = \varphi$, mert

$$\langle T^*\psi, x \rangle = \langle \psi, Tx \rangle = \varphi(T|_Y)^{-1}Tx = \varphi(x)$$

minden $x \in X$ -re. Tehát $N(T)^\perp \subset R(T^*)$.

(c) Legyen $T' = T|_{N(T^n)}$, és legyen M olyan altere $N(T^n)$ -nek, hogy

$$N(T^n) = R(T') \oplus M.$$

Akkor $X = R(T) \oplus M$, mert $X = N(T^n) \oplus R(T^n)$ és $R(T^n) \subset R(T)$. Következésképpen $\dim M = \dim X/R(T)$.

Figyeljük meg, hogy $\dim N(T') = \dim M$, mert $N(T^n)$ véges dimenziós, és hogy $N(T') = N(T)$, mert $N(T) \subset N(T^n)$. Következésképpen

$$\dim N(T) = \dim M = \dim X/R(T). \quad (14.17)$$

Jegyezzük meg, hogy $N(T^*)$ véges dimenziós, ugyanis $T^* = I - K^*$ és K^* teljesen folytonos Schauder tétele alapján (83. o.). Vegyünk fel egy $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ bázist $N(T^*)$ -ben, majd válasszunk olyan x_1, \dots, x_m vektorokat X -ben, hogy $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Fogadjuk el egyelőre, hogy $X = R(T) \oplus M'$, ahol M' az x_1, \dots, x_m által generált altér. Akkor

$$\dim N(T^*) = m = \dim M' = \dim X/R(T), \quad (14.18)$$

és a $\dim N(T) = \dim N(T^*)$ egyenlőség (14.17)-ből és (14.18)-ból adódik.

Hátra van az

$$X = R(T) + M' \quad \text{és} \quad R(T) \cap M' = \{0\}$$

összefüggések igazolása. Tetszőlegesen adott $x \in X$ -hez tekintsük az

$$y := \varphi_1(x)x_1 + \cdots + \varphi_m(x)x_m \in M'$$

vektort. Akkor minden $i = 1, \dots, m$ -re fennáll a

$$\varphi_i(x - y) = \varphi_i(x) - \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)\varphi_i(x_j) = \varphi_i(x) - \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)\delta_{ij} = 0$$

egyenlőség, úgyhogy $x - y \in N(T^*)^\perp = R(T)$. Ez mutatja, hogy $X = R(T) + M'$.

Másrészt, ha $x \in R(T) \cap M'$, akkor alkalmas c_i együtthatókkal $x = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m$, és $\varphi_i(x) = 0$ minden $i = 1, \dots, m$ -re. Ezért

$$0 = \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^m c_j\varphi_i(x_j) = \sum_{j=1}^m c_j\delta_{ij} = c_i$$

minden i -re, tehát $x = 0$.

(d) következik (a)-ból és (c)-ből. □

14.11. * A komplex eset

Felsoroljuk a szükséges módosításokat komplex normált terek esetén.

14.1 szakasz. Az ℓ^p , c_0 , $C(I, \mathbb{C})$ és $L^p(I)$ terek definíciója analóg, csak valós helyett komplex számsorozatokot, illetve komplex értékű függvényeket tekintünk. Az összes eredmény érvényben marad; a Banach-algebrák definíciójában α tetszőleges komplex szám lehet.

14.2 szakasz. A hipersíkok definíciójában, valamint a 14.4 és 14.6 lemmákban X -et valós vektortérnek illetve normált térnek tekintjük. A 14.5 lemma a komplex esetben is érvényben marad: a bizonyítás utolsó sorában azt kapjuk, hogy $\varphi(U)$ a komplex sík egységkörének a belsejébe esik.

A 14.7 tétel kimondásában $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ helyett azok valós része: $\Re\varphi(a)$ és $\Re\varphi(b)$ írandó. Az eredmény a valós esetből következik, mivel a $\psi := \Re\varphi$ megfeleltetés bijekció a komplex és valós lineáris funkcionálok között: a leképezés inverze a

$$\varphi(x) := \psi(x) - i\psi(ix)$$

képlettel adható meg.⁷⁷ A 14.9 és 14.10 következmények érvényben maradnak.

14.3 szakasz. A 14.11 tétel és a 14.12 következmény érvényben marad, csak a tétel megfogalmazásában kell \mathbb{C} -t írni \mathbb{R} helyett. A bizonyításban először φ valós részét terjesztjük ki a valós tétel alkalmazásával, majd a kapott ψ valós funkcionált a fenti képlet segítségével *komplexifikáljuk*. Akkor kívánt tulajdonságú komplex kiterjesztéshez jutunk, mert a komplexifikálás nem változtatja meg a normát. Valóban, egyrészt a képletből azonnal következik, hogy $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$. Másrészt bármely $x \in X$ ponthoz létezik olyan λ komplex szám, hogy $|\lambda| = 1$ és $\lambda\varphi(x) = |\varphi(x)|$. Akkor

$$|\varphi(x)| = \varphi(\lambda x) = \psi(\lambda x) \leq \|\psi\| \cdot |\lambda x| = \|\psi\| \cdot |x|,$$

tehát $\|\varphi\| \leq \|\psi\|$.

14.4 szakasz. Minden eredmény és bizonyítás érvényben marad, ha a komplex számok előjelét a $\text{sign } 0 := 0$, $y \neq 0$ esetén pedig a $\text{sign } y := |y|/y$ képlettel értelmezzük. A $j : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$ leképezés továbbra is lineáris. Ha vissza akarjuk kapni a Riesz–Fréchet tételt a $p = 2$ esetben, akkor célszerű j -t inkább a

$$(jy)(x) = \varphi_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

formulával definiálni; akkor $j : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$ antilineáris.

14.5 szakasz. Mindössze a 14.15 állítás bizonyításában kell minden egyenlőtlenségben φ helyett $\Re\varphi$ -t írni.

14.6 szakasz. Nincs szükség változtatásra.

14.7 szakasz. A 14.24 állítás kimondásában és a (b) \implies (c) implikáció bizonyításában φ helyett $\Re\varphi$ -t írandó.

14.8-14.10 szakaszok. Az eredmények és a bizonyítások érvényben maradnak. A $\rho(A)$ rezolvens halmaz most definíció szerint azon komplex λ számokból áll, amelyekre $A - \lambda I$ invertálható, A spektruma pedig ennek a \mathbb{C} -beli komplementer halmaza.

⁷⁷ Ezt a komplexifikációs lehetőséget Murray 1937, Bohnenblust–Sobczyk 1938, valamint Szuhomlinov [Soukhomlinov] 1938 fedezték fel.

15. fejezet

Lokálisan konvex terek

Sokkal több képzelőerő volt Arkhimédész fejében, mint Homéroszéban.

Voltaire

Az előző fejezetekben meggyőződhattunk a gyenge konvergencia hasznosságáról. Elméleti szempontból kielégítőbb volna ezt a konvergenciát alkalmas normából származtatni. Véges dimenzióban bármely norma megfelel erre a célra, hiszen a gyenge és erős konvergencia azonos. Végtelen dimenzióban azonban a helyzet gyökeresen megváltozik: fennáll például a

15.1. *Állítás. *Végtelen dimenziós Hilbert-térben a gyenge konvergencia sohasem metrizálható.*¹

Bizonyítás. Rögzítsünk egy e_1, e_2, \dots ortonormált sorozatot, és tekintsük az

$$A := \{e_m + me_n : n > m \geq 1\}.$$

halmazt. Határozzuk meg az A -beli gyengén konvergens sorozatok határértékeinek \tilde{A} halmazát. Ha az A -beli $(x_k) = (e_{m_k} + m_k e_{n_k})$ sorozat gyengén konvergál H -ban, akkor korlátos, és így az egészekből álló (m_k) számsorozat is korlátos. Ha az (m_k) sorozat végtelen sokszor felvenne két különböző, mondjuk $m < m'$ értéket, akkor a $k \mapsto (x_k, e_m)$ sorozat végtelen sokszor felvenné a 0 és 1 értékeket is, ellentmondva (x_k) gyenge konvergenciájának. Tehát az (m_k) sorozat valahonnan kezdve egy m konstanssal egyenlő. Ha most az (n_k) sorozat végtelen sokszor felvesz valamely n értéket, akkor szükségképpen $x_k \rightharpoonup e_m + me_n$, hiszen (x_k) -nak van konstans $(e_m + me_n)$ részsorozata. Ellenkező esetben $n_k \rightarrow \infty$, és akkor $x_k \rightharpoonup e_m$. Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy

$$\tilde{A} = A \cup \{e_m : m = 1, 2, \dots\}.$$

¹ Neumann 1929–30.

Ha a gyenge konvergencia metrizálható volna, akkor \tilde{A} az A halmaz lezárása volna, és így minden \tilde{A} -beli gyengén konvergens sorozat határértéke is \tilde{A} -hoz tartozna. Márpedig $(e_m) \subset \tilde{A}$, és $e_m \rightharpoonup 0 \notin \tilde{A}$. \square

Gyakran előfordulnak az analízisben hasonló, nem-metrizálható konvergenciafogalmak. Szerencsére ezek többsége legalábbis „topologizálható”. A jelen esetben ez a törekvés elvezet a normált terek fontos általánosításához: a *lokálisan konvex* terekhez. Minthogy e terek gyakran nem metrizálhatók, ebben a fejezetben sorozatok helyett inkább az általánosabb *hálókat*² használjuk.

15.1. Félnormacsatládok

Általánosítjuk a normált tereket.

Definíció. Az X vektortéren értelmezett $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *félnorma*, ha minden $x, y \in X$ -re és $\lambda \in \mathbb{R}$ -re teljesülnek a következő feltételek:

- $p(x) \geq 0$,
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Példák.

- Minden norma félnorma.
- Ha φ lineáris funkcionál X -en, akkor $|\varphi|$ félnorma.
- Általánosabban, ha $A : X \rightarrow Y$ lineáris leképezés és Y -beli q félnorma, akkor $q \circ A$ X -beli félnorma.
- Ha p félnorma és $\lambda \geq 0$, akkor λp is félnorma.
- Ha p_1, \dots, p_n félnormák, akkor $p_1 + \dots + p_n$ is félnorma.

Definíció. Az X vektortérben a középpontú gömbökön a

$$B_{p,r}(a) = B_p(a; r) := \{x \in X : p(x - a) < r\}$$

halmazokat értjük, ahol p X -beli félnorma és $r > 0$.

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy minden gömb konvex.

² Topológia, 2.5 szakasz, 54. o.

Tekintsünk az X vektortéren egy nem-üres \mathcal{P} félnormacsaládot. Jelöljük $\overline{\mathcal{P}}$ -sal azon X -beli q félnormák rendszerét, amelyekhez található véges sok $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ és olyan N pozitív szám, hogy

$$q \leq N(p_1 + \dots + p_n).$$

Jelöljük $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ -vel a következő tulajdonságú $U \subset X$ halmazok rendszerét: minden $a \in U$ -hoz van olyan $q \in \overline{\mathcal{P}}$ és $r > 0$, hogy

$$B_q(a; r) \subset U.$$

Könnyen igazolható a következő állítás; a részleteket az olvasóra hagyjuk.

15.2. Állítás.

(a) $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ topológia X -en. A további állítások erre a topológiára vonatkoznak.

(b) A $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ topológia pontosan akkor szeparált, ha minden nem-nulla $x \in X$ ponthoz van olyan $p \in \mathcal{P}$, hogy $p(x) \neq 0$.

(c) Tetszőleges sorozatra vagy hálóra $x_n \rightarrow x \iff p(x_n - x) \rightarrow 0$ minden $p \in \mathcal{P}$ -re.

(d) Az összeadás és a számmal szorzás (vagyis az $(x, y) \mapsto x+y$ és $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ függvény) folytonos.

(e) $\overline{\mathcal{P}}$ pontosan a folytonos félnormákból áll.

(f) Egy X -beli lineáris funkcionál folytonos $\iff |\varphi| \in \overline{\mathcal{P}}$.

(g) Egy $B_q(a; r)$ gömb nyílt $\iff q \in \overline{\mathcal{P}}$.

Definíció. Egy \mathcal{P} félnormacsaládhoz rendelt $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ topológiával ellátott X vektorteret *lokálisan konvex térnek* nevezzük.³

Példák.

- Egyetlen *normából* álló \mathcal{P} család esetén visszajutunk a normált tér fogalmához.
- Adott K halmaz esetén jelöljük $\mathcal{F}(K)$ -val az $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ függvények vektorterét. Felruházva a

$$p_t(f) := |f(t)|, \quad f \in \mathcal{F}(K)$$

félnormák családjához rendelt topológiával, ahol t végigfut K elemein, $\mathcal{F}(K)$ szeparált lokálisan konvex tér, és az $\mathcal{F}(K)$ -beli konvergencia a *pontonkénti konvergencia*:

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mathcal{F}(K)\text{-ban} \iff f_n(t) \rightarrow f(t) \text{ minden } t \in K\text{-ra.}$$

³ Neumann 1935. A terminológiára a 15.24 állítás ad majd magyarázatot, 117. o.

Hamarosan látni fogjuk, hogy $\mathcal{F}(K)$ nem mindig normálható.

Általánosítsuk a normált térbeli korlátos halmaz fogalmát:

Definíció. A \mathcal{P} félnormacsald által definiált X lokálisan konvex térben az A halmaz *korlátos*, ha minden $p \in \mathcal{P}$ félnorma korlátos A -n.

Megjegyzések.

- Ha A korlátos, akkor minden $p \in \overline{\mathcal{P}}$ folytonos félnorma is korlátos A -n.
- Minthogy egy *folytonos* félnorma minden kompakt halmazon korlátos⁴, lokálisan konvex tér kompakt halmazai mindig korlátosak. Innen következik⁵, hogy *szeparált* lokálisan konvex térben minden kompakt halmaz korlátos és zárt. Emlékeztetünk arra is⁶, hogy a fordított irányú implikáció végtelen dimenziós normált terekben *sosem* teljesül.

Az utolsó megjegyzésünk aláhúzza a következő eredmény érdekességét:

15.3. *Állítás.

- (a) *Tetszőleges K -ra az $\mathcal{F}(K)$ -beli halmazok pontosan akkor kompaktak, ha korlátosak és zártak.*
- (b) *Végtelen K halmaz esetén $\mathcal{F}(K)$ nem normálható.*

Bizonyítás.

(a) Minthogy $\mathcal{F}(K)$ szeparált lokálisan konvex tér, elég megmutatnunk, hogy ha C korlátos és zárt $\mathcal{F}(K)$ -ban, akkor kompakt.

Minthogy C korlátos $\mathcal{F}(K)$ -ban, a $C(t) := \{f(t) : f \in C\}$ számhalmazok minden $t \in K$ -ra korlátosak. Foglaljuk be mindegyik $C(t)$ -t egy F_t kompakt intervallumba. Az $F := \prod_{t \in K} F_t$ szorzattér Tyihonov tétele értelmében kompakt.⁷ Figyeljük meg, hogy topológiailag $\mathcal{F}(K)$ a $\prod_{t \in K} X_t$ szorzattér, ahol $X_t = \mathbb{R}$ minden $t \in K$ -ra. Ezért F kompakt részhalmaza $\mathcal{F}(K)$ -nak. Végül jegyezzük meg, hogy C zárt részhalmaza F -nek, tehát kompakt.⁸

(b) Elegendő (a) miatt arra hivatkoznunk, hogy végtelen dimenziós normált terekben a zárt gömbök korlátosak és zártak, de nem kompaktak.⁹

⁴ Topológia, 2.20 tétel, 50. o.

⁵ Topológia, 2.17 állítás, 49. o.

⁶ Lásd a 14.25 állítást, 75. o.

⁷ Topológia, 2.22 tétel, 52. o.

⁸ Topológia, 2.16 állítás, 48. o.

⁹ Lásd a 14.25 állítást, 75. o.

Adjunk azonban közvetlen bizonyítást is: megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}(K)$ -n nincs folytonos *norma*. Ha ugyanis q folytonos *félnorma* $\mathcal{F}(K)$ -n, akkor alkalmas $t_1, \dots, t_n \in K$ pontokkal és $N > 0$ számmal

$$q(f) \leq N(|f(t_1)| + \dots + |f(t_n)|)$$

minden $f \in \mathcal{F}(K)$ -re. A K halmaz végtelen lévén, van olyan nem-nulla $f \in \mathcal{F}(K)$ függvény, amelyre $f(t_1) = \dots = f(t_n) = 0$. Akkor $q(f) = 0$, tehát q nem norma. \square

Befejezésül jellemezzük a normálható lokálisan konvex tereket:

15.4. *Állítás. (Kolmogorov¹⁰) Ha X szeparált lokálisan konvex tér, akkor a következő tulajdonságok ekvivalensek:

- (a) X normálható;
- (b) van korlátos 0-környezet;
- (c) van nem-üres korlátos, nyílt halmaz.

Bizonyítás. Az $(a) \implies (b) \implies (c)$ implikációk nyilvánvalóak.

$(c) \implies (b)$. Ha V nem-üres korlátos, nyílt halmaz és $a \in V$, akkor $V - a$ korlátos 0-környezet.

$(b) \implies (a)$. Legyen U korlátos 0-környezet. Rögzítsünk egy $B_p(0; r) \subset U$ nyílt gömböt. Ha q folytonos félnorma, akkor U korlátossága miatt elég nagy R -re $U \subset B_q(0; R)$. Ebből következik, hogy $B_p(0; r) \subset B_q(0; R)$, és innen $C := R/r$ választással $q \leq Cp$. Ez mutatja, hogy p egymagában definiálja X topológiáját. Mivel X szeparált, p norma. \square

15.2. Szétválasztási és kiterjesztési tételek

A lokálisan konvex terek fontossága nagy részben azon alapul, hogy a Helly–Hahn–Banach típusú tételek érvényben maradnak. Kezdjük a geometriai eredményekkel:

¹⁰ Kolmogorov 1934.

15.5. Tétel. Legyen A és B két diszjunkt nem-üres konvex halmaz a lokálisan konvex X térben.

(a) Ha A nyílt, és M A -tól diszjunkt altér, akkor létezik olyan zárt H hipersík, hogy

$$M \subset H \quad \text{és} \quad A \cap H = \emptyset.$$

(b) Ha A nyílt, akkor létezik olyan lineáris funkcionál X -ben, hogy alkalmas c valós számmal

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b) \quad \text{minden} \quad a \in A\text{-ra} \quad \text{és} \quad b \in B\text{-re.}$$

(c) (Tukey–Klee¹¹) Ha A zárt és B kompakt, akkor létezik olyan lineáris funkcionál X -ben, hogy alkalmas c_1, c_2 valós számokkal

$$\varphi(a) \leq c_1 < c_2 \leq \varphi(b) \quad \text{minden} \quad a \in A\text{-ra} \quad \text{és} \quad b \in B\text{-re.}$$

Lásd újra a 14.1–14.3 ábrákat, 50–50. o.

Bizonyítás.

(a) Megismételhetjük a 14.7 tétel (a) részének a bizonyítását (49. o.) egyetlen apró módosítással: a 14.6 lemma (48. o.) (b) részének az igazolásakor $B(a; r)$ helyett vegyünk egy $B_p(a; r)$ nyílt gömböt. Akkor a $|\varphi| < 1$ egyenlőtlenséget kapjuk $B_p(0; r)$ -en, ahonnan $|\varphi| \leq r^{-1}p$. Ebből φ folytonossága következik.

(b) A 14.7 tétel (b) részének a bizonyítása érvényben marad.

(c) A 14.7 tétel (c) részének a bizonyítását a következőképpen módosítjuk. Az A halmaz zártsága miatt minden $b \in B$ -hez található b középpontú, A -tól diszjunkt $B_b := B_{p_b, r_b}(b)$ nyílt gömb. A kompakt B halmazt ezek közül már véges sok is befedi, mondjuk

$$B \subset \bigcup_{j=1}^n B_{b_j}.$$

Vezessük be az $U := B_{p, r}(0)$ nyílt gömböt, ahol

$$p := p_{b_1} + \dots + p_{b_n}, \quad \text{és} \quad r := 2^{-1} \min\{r_1, \dots, r_n\}.$$

Akkor $A + U$ és $B + U$ diszjunkt, nem-üres, konvex, nyílt halmazok, amelyekre $A \subset A + U$ és $B \subset B + U$.

¹¹ Tukey 1942, Klee 1951.

Alkalmazva (b)-t van olyan $\varphi \in X'$ funkcionál és c valós szám, hogy

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b) \quad \text{minden } a \in A + U\text{-ra és } b \in B + U\text{-ra.}$$

Innen

$$\varphi(a) + \sup_U |\varphi| \leq c \leq \varphi(b) - \sup_U |\varphi| \quad \text{minden } a \in A\text{-ra és } b \in B\text{-re.}$$

Mínt hogy φ nem-nulla, $s := \sup_U |\varphi| > 0$, és a keresett egyenlőtlenségek $c_1 := c - s$, $c_2 := c + s$ választással adódnak. \square

A 14.11 kiterjesztési tétel (54. o.) az alábbi formát ölti:

15.6. Tétel. Legyen X lokálisan konvex tér. Ha $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál az $M \subset X$ altéren, akkor φ kiterjeszthető folytonos lineáris $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionállá.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\varphi \not\equiv 0$. Rögzítsünk egy olyan $a \in M$ pontot, amelyre $\varphi(a) = 1$, majd egy olyan folytonos p félnormát, hogy $|\varphi| < 1$ $M \cap B_p(0; 1)$ -en. Megismételve a 14.11 tétel bizonyítását, φ olyan Φ lineáris kiterjesztéséhez jutunk, amelyre $\Phi^{-1}(0)$ nem metszi $B_p(a; 1)$ -et. Ebből következik, hogy $|\Phi| < 1$ $B_p(0; 1)$ -en, és így $|\Phi| \leq p$. Következésképpen Φ folytonos. \square

Ha X lokálisan konvex tér, akkor jelöljük X' -vel a folytonos lineáris $X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionálok vektorterét. A normált terek esetéhez hasonlóan vezessük be a $D \subset X$ és $\Delta \subset X'$ halmazok ortogonális komplementumait a

$$D^\perp = \{\varphi \in X' : \varphi(x) = 0 \quad \text{minden } x \in D\text{-re}\}$$

és

$$\Delta^\perp = \{x \in X : \varphi(x) = 0 \quad \text{minden } \varphi \in \Delta\text{-ra}\}$$

képletekkel. Az előző tételt használva megismételhetjük a 14.9 következmény bizonyítását (53. o.), és a következőt kapjuk:

15.7. Következmény. Legyen X lokálisan konvex tér, $D \subset X$, és $M \subset X$ altér.

- (a) A D által generált zárt altér megegyezik $(D^\perp)^\perp$ -sel.
- (b) Ha $D^\perp = \{0\}$, akkor D generálja X -et.
- (c) Ha $M^\perp = \{0\}$, akkor M sűrű X -ben.

Szeparált lokálisan konvex terekben a 14.10 következmény és bizonyítása (53. o.) is érvényben marad:

15.8. Következmény. Legyen X szeparált lokálisan konvex tér.

- (a) Bármely két különböző $a, b \in X$ ponthoz van olyan $\varphi \in X'$ lineáris funkcionál, hogy $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.
- (b) Ha $x_1, \dots, x_n \in X$ lineárisan független vektorok, akkor vannak olyan $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X'$ lineáris funkcionálok, hogy

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{minden } i, j = 1, \dots, n\text{-re.}$$

Következésképpen $\dim X' \geq \dim X$.

Megjegyzés. Példaként megmutatjuk, hogy minden véges dimenziós, szeparált lokálisan konvex tér normálható. Válasszunk ugyanis egy $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ bázist X' -ben, akkor a

$$\|x\| := |\varphi_1(x)| + \dots + |\varphi_m(x)|$$

képlet normát definiál, amely X topológiájához vezet.

15.3. Krein–Milman tétel

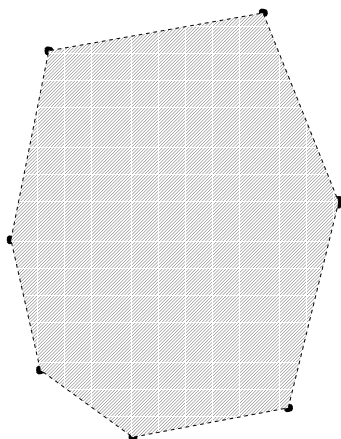
Minden korlátos konvex sokszög a csúcsainak a konvex burka (lásd a 15.1 ábrát). A csúcsok definíciójának alkalmas módosításával Minkowski ezt általánosította minden \mathbb{R}^N -beli korlátos, zárt, konvex halmazra. Eredményét Krein és Milman minden szeparált lokálisan konvex térre kiterjesztette.

Definíció. Egy vektortérbeli C konvex halmaz $x \in C$ pontja *extremális*, ha $C \setminus \{x\}$ konvex.

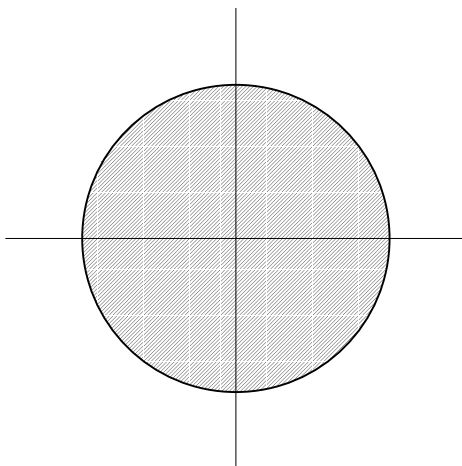
Világos, hogy lokálisan konvex terekben C extremális pontjai nem lehetnek belső pontok, úgyhogy azok mind C határán helyezkednek el. Például a 15.2 ábrán C minden határpontja extremális pont, a 15.3 és 15.4 ábrák sokszögeiben viszont csak a csúcsok extremális pontok.

Példák. Jelöljük E -vel az X normált térbeli zárt egységgömb extremális pontjainak a halmazát.

- Ha X euklideszi tér, akkor E a teljes egységgömbfelület.
- Ha $X = \ell^p$ $1 < p < \infty$, akkor E továbbra is a teljes egységgömbfelület.
- Ha $X = \ell^1$, akkor $E = \{\lambda e_k : |\lambda| = 1, k = 1, 2, \dots\}$.
- Ha $X = \ell^\infty$, akkor $E = \{x = (x_n) : |x_n| = 1 \text{ minden } n\text{-re}\}$.
- Ha $X = c_0$, akkor $E = \emptyset$.



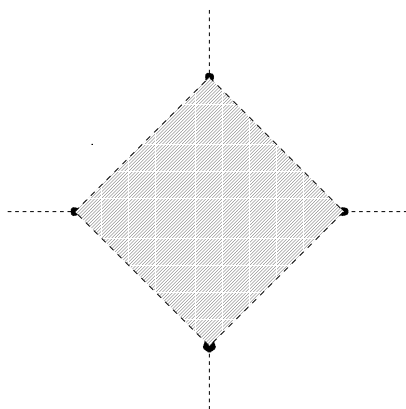
15.1. ábra. Konvex sokszög csúcsai



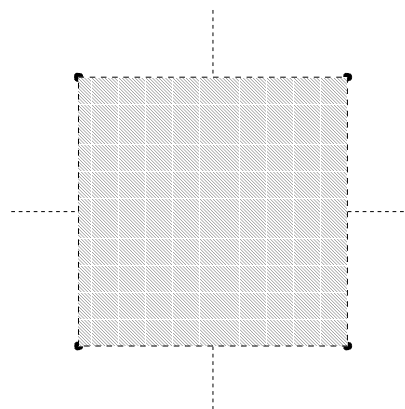
15.2. ábra. Körlap extrémális pontjai

Definíció. Lokálisan konvex térbeli E halmaz *konvex zárt burkán* az E -t tartalmazó konvex zárt halmazok metszetét értjük. Világos, hogy ez az E -t tartalmazó legszűkebb konvex zárt halmaz.

Könnyen ellenőrizhető, hogy E konvex zárt burka az E -beli vektorok konvex lineáris kombinációi alkotta halmaz lezárása.



15.3. ábra. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$
„egységgömbje”



15.4. ábra. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$
„egységgömbje”

15.9. Tétel. (Krein–Milman¹²) Legyen C nem-üres konvex, kompakt halmaz a szeparált lokálisan konvex X térben. Akkor C az extrémális pontjainak a konvex, zárt burka.

Szükségünk lesz a következő fogalomra:

Definíció. Egy nem-üres, konvex, kompakt C halmaz *oldalain* C alábbi tulajdonságú nem-üres F részhalmazait értjük: ha E tartalmazza egy C -beli $[a, b]$ szakasz középpontját, akkor tartalmazza a teljes $[a, b]$ szakaszt is. Könnyen ellenőrizhetők az alábbi tulajdonságok:

- C saját magának is oldala;
- akárhány oldal metszete is oldal;
- x extrémális pontja C -nek $\iff \{x\}$ oldala C -nek;
- ha E oldala C -nek és F oldala E -nek, akkor F oldala C -nek is.

A 15.9 tétel bizonyítása. Rögzítsünk egy X -beli nem-üres konvex, kompakt C halmazt. Két lépésben járunk el.

Első lépés. Megmutatjuk, hogy C -nek van legalább egy extrémális pontja. Az oldalak fenti első két tulajdonsága alapján a Zorn-lemma¹³ alkalmazásával könnyen látható, hogy van C -nek legalább egy minimális oldala.

¹² Minkowski 1911 (160. o.), Krein–Milman 1940. Phelps 1966 számos kiegészítést és alkalmazást ismertet.

¹³ *Topológia*, 2.23 lemma, 52. o.

A harmadik tulajdonság fényében elegendő megmutatnunk, hogy minimális oldálnak nem lehet egynél több pontja.

Tegyük fel, hogy C valamely E oldalának van két különböző pontja, mondjuk $x \neq y$. Alkalmazva a 15.8 következményt rögzítsünk egy olyan $\varphi \in X'$ funkcionált, amelyre $\varphi(x) < \varphi(y)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$F := \{z \in E : \varphi(z) = \max_E \varphi\}$$

E oldala. Mivel $x \notin F$, F valódi része E -nek. Továbbá, a fenti negyedik tulajdonság alapján F oldala C -nek is, tehát E nem minimális.

Második lépés. Az eddigiek alapján C extrémális pontjainak a konvex, zárt K burka nem-üres konvex, kompakt részhalmaza C -nek. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $x \in C \setminus K$ pont, és a 15.5 tétel (c) részét alkalmazva válasszunk olyan $\varphi \in X'$ funkcionált, amelyre

$$\max_K \varphi < \varphi(x).$$

Akkor

$$E := \{z \in C : \varphi(z) = \max_C \varphi\}$$

C -nek K -tól diszjunkt oldala. Másrészt, alkalmazva E -re az első lépésben bizonyítottakat, létezik E -nek legalább egy y extrémális pontja. De akkor y extrémális pontja C -nek is az oldalak fent említett utolsó két tulajdonsága miatt, úgyhogy $y \in C \cap K$. Ez azonban lehetetlen, mert C és K diszjunktak. \square

15.4. * Gyenge topológia. Farkas–Minkowski lemma

Legyen X lokálisan konvex tér. Jelöljük $\sigma(X, X')$ -vel a $|\varphi|$ félnormák által definiált lokálisan konvex topológiát, ahol φ végigfut X' elemein. A 15.2 állítás alapján minden X -beli sorozatra vagy hálóra

$$x_n \rightarrow x \text{ } \sigma(X, X')\text{-ben} \iff \varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x) \text{ minden } \varphi \in X'\text{-re.} \quad (15.1)$$

Ez indokolja a következő terminológiát:

Definíció. $\sigma(X, X')$ -t X *gyenge topológiájának* hívjuk.¹⁴ A megfelelő $(X, \sigma(X, X'))$ teret röviden X_σ -val is jelöljük.

15.10. Állítás. *Legyen X lokálisan konvex tér.*

¹⁴ Neumann 1929–30.

- (a) X gyenge topológiája durvább az eredeti topológiánál.
 (b) Azonban ugyanazok a két topológiában a folytonos lineáris funkcionálok.
 (c) A konvex zárt halmazok is ugyanazok a két topológiában.
 (d) A két topológia egyszerre szeparált.

Bizonyítás. (a) és (b) (15.1)-ből, (c) a 15.5 tételből, (d) pedig a 15.8 következményből adódik. \square

A gyenge topológia általában nem normálható, sőt nem is metrizálható:

15.11. *Állítás.

- (a) Végtelen dimenziós lokálisan konvex tér gyenge topológiája nem normálható.
 (b) Végtelen dimenziós normált tér gyenge topológiája nem metrizálható.¹⁵

Megjegyzések.

- A gyenge topológia nem metrizálható volta miatt a kiválasztási tétel (70. o.) nem teljesen kielégítő, mert a sorozatok nem alkalmasak a topológia leírására. Erre a kérdésre hamarosan visszatérünk.¹⁶
- A gyenge konvergencia alaptulajdonságairól szóló 13.10, 14.15 állítások (24. és 60. o.), valamint a folytonos lineáris leképezések jellemzése (13.15 és 14.17 állítás, 29. és 81. o.) sorozatok helyett hálókra is érvényben maradnak, ugyanazzal a bizonyítással.

Bizonyítás.

(a) Mutassuk meg, hogy nincs folytonos norma X -en. Ha ugyanis q folytonos félnorma X -en, akkor megadható véges sok $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X'$ lineáris funkcionál és egy olyan N pozitív szám, hogy

$$q(x) \leq N \sum_{i=1}^n |\varphi_i(x)| \quad \text{minden } x \in X\text{-re.}$$

Minthogy X végtelen dimenziós, van olyan $x \neq 0$ pont, hogy $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$. Akkor $q(x) = 0$, tehát q nem norma.

(b) Legyen X olyan normált tér, amelyre X_σ topológiája egy d metrikából származtatható; akkor X_σ szeparált.

¹⁵ Wehausen 1938.

¹⁶ Lásd a 15.21 tételt, 115. o.

Minden n természetes számhoz rögzítsünk véges sok olyan $\varphi_{n1}, \dots, \varphi_{nk_n}$ X' -beli funkcionált, hogy

$$\bigcap_{j=1}^{k_n} \{x \in X : |\varphi_{nj}(x)| < 1\} \subset \left\{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Bármely adott $\varphi \in X'$ -höz van olyan n , hogy

$$d(x, 0) < \frac{1}{n} \implies |\varphi(x)| < 1.$$

Következésképpen

$$\varphi_{n1}(x) = \dots = \varphi_{nk_n}(x) = 0 \implies |\varphi(x)| < 1,$$

és így (x -et tx -re cserélve, majd elvégezve a $t \rightarrow \infty$ határátmenetet)

$$\varphi_{n1}(x) = \dots = \varphi_{nk_n}(x) = 0 \implies \varphi(x) = 0.$$

Alkalmazva az algebrából jól ismert alábbi 15.12 lemmát innen következik, hogy φ lineáris kombinációja $\varphi_{n1}, \dots, \varphi_{nk_n}$ -nek.

A $\varphi_{n1}, \dots, \varphi_{nk_n}$ által generált F_n altér véges dimenziós, tehát zárt. Az eddig igazoltak szerint $X' = \bigcup F_n$, úgyhogy a Baire-lemma alapján (26. o.) legalább egy F_n -nek van belső pontja. De akkor $F_n = X'$, tehát $\dim X' < \infty$. Alkalmazva a 14.10 következményt (53. o.) ekkor X is véges dimenziós. \square

Bizonyítsuk be a felhasznált lemmát:

15.12. Lemma. *Legyenek $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ és φ lineáris funkcionálok az X vektortéren. Tegyük fel, hogy*

$$x \in X \quad \text{és} \quad \varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0 \implies \varphi(x) = 0.$$

Akkor φ lineáris kombinációja $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ -nek.

Bizonyítás. Tekintsük az \mathbb{R}^n -beli

$$M := \{(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in X\}$$

alteret. A feltevés szerint a

$$(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \mapsto \varphi(x)$$

képlet folytonos lineáris $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált definiál. Lássuk el \mathbb{R}^n -et a szokásos skaláris szorzattal, és legyen P az M -re való merőleges vetítés. Akkor $\psi \circ P$ folytonos lineáris funkcionál \mathbb{R}^n -en, és így egy $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorral reprezentálható:

$$\psi(Py) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

minden $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ -re. Speciálisan

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$$

minden $x \in X$ -re. □

A 14.17 állításban (62. o.) beláttuk, hogy a normált terekben minden gyengén konvergens sorozat korlátos. Ez a következő általánosabb eredményből is levezethető:

15.13. Állítás. *Ha X normált tér, akkor X -ben és X_σ -ban ugyanazok a halmazok korlátosak.*

Bizonyítás. Ha A korlátos X -ben, akkor a folytonos lineáris leképezések jellemzése alapján (81. o.) $\varphi(A)$ minden $\varphi \in X'$ -re korlátos. Így A definíció szerint korlátos X_σ -ban.

Tekintsük a 14.21 állításbeli $J : X \rightarrow X''$ kanonikus izometriát (67. o.). Ha A korlátos X_σ -ban, akkor $J(A)$ pontonként korlátos, hiszen

$$\{(Jx)(\varphi) : x \in A\} = \{\varphi(x) : x \in A\}$$

korlátos számhalmaz a feltevésünk szerint minden $\varphi \in X'$ -re. A Banach–Steinhaus tételt (61. o.) alkalmazva következik, hogy $J(A)$ korlátos X'' -ben. Minthogy J izometria, ez egyenértékű A X -beli korlátosságával. □

Megjegyzés. Az állítás minden lokálisan konvex térben is érvényes, de a bizonyítás összetettebb. ¹⁷

Befejezésül bizonyítsuk be a 15.12 lemma egyenlőtlenségekre vonatkozó nevezetes változatát, amely a konvex analízis és a lineáris programozás kiindulópontjául szolgál. Jelöljük \mathbb{R}^n szokásos skaláris szorzatát (x, y) -nal.

15.14. Állítás. *(Farkas–Minkowski¹⁸) Véges sok adott \mathbb{R}^n -beli a, a_1, \dots, a_k vektor esetén az $(a, x) \leq 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor következik az $(a_1, x) \leq 0, \dots, (a_k, x) \leq 0$ egyenlőtlenségek rendszeréből, ha a nem-negatív lineáris kombinációja az a_1, \dots, a_k vektoroknak.*

A következő bizonyításban az egyszerűség kedvéért elkerüljük a topológia használatát. Ehhez algebrai úton fogjuk igazolni az alábbi segédteletet, ahol K -val jelöljük az a_1, \dots, a_k által generált konvex kúpot, vagyis az a_1, \dots, a_k vektorok nem-negatív lineáris kombinációinak halmazát.

¹⁷ Lásd például Reed–Simon 1972 vagy Rudin 1991.

¹⁸ Minkowski 1896 (39–45. o.), Farkas 1902. A jelen bizonyításra nézve lásd Komornik 1998.

15.15. Lemma. Minden $a \in \mathbb{R}^n$ ponthoz van K -ban tőle minimális távolságra lévő b pont.

Megjegyzések.

- Nyilvánvaló, hogy b egyértelmű, de erre nem lesz szükségünk.
- A lemmából következik, hogy K zárt halmaz, de erre sem lesz explicit módon szükségünk.

A lemma alkalmazásával a tétel nem-triviális része könnyen igazolható: ha $(a, x) \leq 0$ logikai következménye az $(a_1, x) \leq 0, \dots, (a_k, x) \leq 0$ egyenlőtlenségek rendszerének, akkor $a \in K$. Jegyezzük meg ehhez először, hogy

$$(a_j, a - b) \leq 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (15.2)$$

és

$$(-b, a - b) \leq 0. \quad (15.3)$$

Ellenkező esetben ugyanis elég kis $t \in (0, 1)$ -re

$$\begin{aligned} |a - (b + ta_j)|^2 &= |(a - b) - ta_j|^2 \\ &= |a - b|^2 - 2t(a_j, a - b) + t^2|a_j|^2 \\ &< |a - b|^2, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} |a - (b - tb)|^2 &= |(a - b) + tb|^2 \\ &= |a - b|^2 - 2t(-b, a - b) + t^2|b|^2 \\ &< |a - b|^2 \end{aligned}$$

teljesülne. Azonban ez b választása miatt lehetetlen, hiszen

$$b + ta_j \in K \quad \text{és} \quad b - tb = (1 - t)b \in K.$$

A feltevésünk szerint (15.2)-ből $(a, a - b) \leq 0$ következik. Ezt (15.3)-mal kombinálva $(a - b, a - b) \leq 0$ adódik. Innen $a = b$, és így $a \in K$.

A lemma bizonyítása. A $k = 1$ eset nyilvánvaló. Legyen $k \geq 2$, és tegyük fel indukcióval, hogy minden egyes $j = 1, \dots, k$ -ra az

$$a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k$$

vektorok által generált K_j konvex kúpban van a -tól minimális távolságra lévő b_j pont. Most megkülönböztetünk három esetet.

- (a) Ha $a \in K$, akkor a $b := a$ választás megfelel.

(b) Ha $a \notin K$, de a hozzátartozik az a_1, \dots, a_k vektorok által generált L lineáris altérhez, akkor legyen b az a -tól minimális távolságra lévő pont b_1, \dots, b_k között. Megmutatjuk, hogy $|a - b| \leq |a - c|$ minden $c \in K$ -ra.

Legyen

$$a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \quad \text{és} \quad c = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_k a_k,$$

ahol $\gamma_1, \dots, \gamma_k \geq 0$, és tekintsük a

$$t := \min\{\gamma_j / (\gamma_j - \alpha_j) : \alpha_j < 0\}$$

számot. (Van legalább egy ilyen j , mert $a \notin K$.) Akkor $0 \leq t < 1$, és a minimum felvételét valamely i -re. Következésképpen

$$t\alpha_j + (1-t)\gamma_j \geq 0 \quad \text{minden } j\text{-re,}$$

és

$$t\alpha_i + (1-t)\gamma_i = 0.$$

(Intuitíve az $[a, c]$ szakasz metszi a K kúp K_i oldalát.) Akkor $ta + (1-t)c \in K_i$, úgyhogy

$$|a - b| \leq |a - b_i| \leq |a - (ta + (1-t)c)| = (1-t)|a - c| \leq |a - c|.$$

(c) Ha $a \notin L$, akkor alkalmazzuk az eddigieket a L -re vett a' merőleges vetületére¹⁹: létezik K -ban a' -től minimális távolságra lévő b pont. Mivel

$$|a - b|^2 = |a - a'|^2 + |a' - b|^2 \leq |a - a'|^2 + |a' - c|^2 = |a - c|^2$$

minden $c \in K$ -ra, b minimális távolságra van a -tól is K -ban. \square

15.5. * Gyenge csillag topológia. Banach–Alaoglu tétel

Egy lokálisan konvex X tér X' duálisát eddig nem láttuk el topológiával. Lássuk el most X' -t a

$$\varphi \mapsto |\varphi(x)|$$

félnormák által definiált, $\sigma(X', X)$ -szel jelölt lokálisan konvex topológiával, ahol x végigfut X elemein.

¹⁹ Az L lineáris altér véges dimenziós lévén alkalmazható a *Topológia* részbeli 3.11 állítás, 77. o.

Definíció. A $\sigma(X', X)$ topológiát X' gyenge csillag topológiájának hívjuk.²⁰ Az $(X', \sigma(X', X))$ teret röviden X'_{σ^*} -gal is jelöljük. A megfelelő gyenge csillag konvergenciát $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ -vel jelöljük.

A definícióból következik, hogy (sorozatokra és hálókra is)

$$\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi \iff \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{minden } x \in X\text{-re.}$$

Mielőtt példákat mutatnánk, fogalmazzuk meg a 14.18 lemma (63. o.) duálisát:

15.16. Lemma. Legyen X normált tér, (φ_k) korlátos X' -beli sorozat vagy háló, $D \subset X$, és jelöljük M -mel a D által generált zárt alteret.

- (a) Legyen $\varphi \in X'$. Ha $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ minden $x \in D$ -re, akkor $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ minden $x \in M$ -re is. Speciálisan, ha D generálja X -et, akkor $\varphi_k \xrightarrow{*} \varphi$.
- (b) Ha $(\varphi_k(x))$ Cauchy-féle minden $x \in D$ -re, és D generálja X -et, akkor $(\varphi_k(x))$ Cauchy-féle minden $x \in X$ -re is, és a

$$\varphi(x) := \lim \varphi_k(x)$$

képlet folytonos lineáris $\varphi \in X'$ funkcionált definiál.

Bizonyítás. Könnyen adaptálható a 13.13 lemma bizonyítása (27. o.). \square

Példák. (Hasonlítsuk össze őket a 63. és 66. oldali példákkal.)

- Legyen $(\varphi_n) \in \ell^1$, és legyen $k \mapsto (\varphi_n^k)$ korlátos sorozat vagy háló ℓ^1 -ben. A 14.14 (57. o.) és 15.16 lemmákból következik az $\ell^1 = (c_0)'$ -beli gyenge csillag konvergencia alábbi jellemzése (komponensenkénti konvergencia):

$$(\varphi_n^k) \xrightarrow{*} (\varphi_n) \iff \varphi_n^k \rightarrow \varphi_n \quad \text{minden rögzített } n\text{-re.}$$

Például $e_n \xrightarrow{*} 0$ $\ell^1 = (c_0)'$ -ben.

- Hasonlóan nyerjük ugyanezt a karakterizációt az $\ell^\infty = (\ell^1)'$ -beli korlátos sorozatok vagy hálók gyenge csillag konvergenciájára. Például

$$e_1 + \cdots + e_n \xrightarrow{*} a = (1, 1, \dots)$$

$\ell^\infty = (\ell^1)'$ -ben.

²⁰ Banach 1929.

A gyenge csillag topológia segítségével kiegészíthetjük a 13.3 és 14.9 következményeket (12 és 53. o.) a generált zárt alterek jellemzéséről. Akárcsak az előző fejezetben, értelmezzük a $D \subset X$ és $\Delta \subset X'$ halmazok ortogonális komplementumait a

$$D^\perp := \{\varphi \in X' : \varphi(x) = 0 \text{ minden } x \in D\text{-re}\}$$

és

$$\Delta^\perp := \{x \in X : \varphi(x) = 0 \text{ minden } \varphi \in \Delta\text{-ra}\}$$

formulákkal.

Íme a gyenge csillag topológia alaptulajdonságai; az egyszerűség kedvéért csak szeparált tereket vizsgálunk:

15.17. Állítás. *Legyen X szeparált lokálisan konvex tér.*

(a) X' gyenge csillag topológiája szeparált.

(b) A $(Jx)(\varphi) := \varphi(x)$ képlet lineáris bijekciót létesít X -ről $(X'_{\sigma*})'$ -re.

(c) Ha $\Delta \subset X'$, akkor $(\Delta^\perp)^\perp$ a Δ által generált zárt altér $X'_{\sigma*}$ -ban.

Bizonyítás.

(a) A definíció egyenes folyománya.

(b) A $Jx : X'_{\sigma*} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok folytonossága magának a gyenge csillag topológiának a definíciójából következik. A J leképezés linearitása nyilvánvaló, injektivitása pedig a 15.8 következményből adódik (101. o.). A szuperjektivitás igazolásához rögzítsünk egy tetszőleges $\Phi \in (X'_{\sigma*})'$ funkcionált. E funkcionál folytonosságának definíciója miatt vannak olyan X -beli x_1, \dots, x_n pontok, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ számmal

$$\varphi \in X' \text{ és } |\varphi(x_1)| < \varepsilon, \dots, |\varphi(x_n)| < \varepsilon \implies |\Phi(\varphi)| < 1.$$

Ebből következik, hogy az X' -beli Jx_1, \dots, Jx_n és Φ lineáris funkcionálok eleget tesznek a 15.12 lemma feltételeinek (106. o.); így alkalmas c_1, \dots, c_n számokkal

$$\Phi = c_1 Jx_1 + \dots + c_n Jx_n = J(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n).$$

(c) Jelöljük ideiglenesen M -mel a Δ által generált zárt alteret $X'_{\sigma*}$ -ban. Az $M \subset (\Delta^\perp)^\perp$ tartalmazási reláció könnyen adódik a definíciókból, akárcsak a 13.3 következményben (12. o.). A fordított irányhoz rögzítsünk egy tetszőleges $\varphi \in X' \setminus M$ funkcionált; meg kell mutatnunk, hogy $\varphi \notin (\Delta^\perp)^\perp$.

Alkalmazva a 15.5 tétel (c) részét (99. o.) és felhasználva az imént belátott (b) tulajdonságot van olyan $x \in X$ pont, hogy alkalmas $c_1 < c_2$ valós számokkal $\psi(x) \leq c_1$ minden $\psi \in M$ -re, és $\varphi(x) \geq c_2$. Mivel

$\{\psi(x) : \psi \in M\}$ altere \mathbb{R} -nek, innen $\psi(x) = 0$ minden $\psi \in M$ -re, és így $\varphi(x) > 0$. Tehát $x \in \Delta^\perp$ és $\varphi \notin (\Delta^\perp)^\perp$. \square

A fejezet hátralévő részében csak normált terekkel foglalkozunk.

Megjegyzés. Ha X normált tér, akkor három természetes topológia is értelmezhető X' -n az eddigiek szerint: a szokásos normatopológia, amelyet most $\tau(X')$ -vel jelölünk, valamint a $\sigma(X', X)$ gyenge csillag- és a $\sigma(X', X'')$ gyenge topológia. Minthogy X azonosítható X'' egy alterével a 14.21 állításbeli $J : X \rightarrow X''$ leképezés segítségével (67. o.), a gyenge csillag topológia durvább a gyenge topológiánál. Fennállnak tehát a

$$\sigma(X', X) \subset \sigma(X', X'') \subset \tau(X')$$

tartalmazási relációk. Véges dimenzióban e topológiák egybeesnek, végtelen dimenzióban azonban általában eltérnek egymástól.

A gyengén konvergens sorozatok korlátossága Banach-terek esetén éle-síthető:

15.18. Állítás. *Ha X Banach-tér, akkor ugyanazok a halmazok korlátosak a fenti három topológiában.*

Következésképpen minden gyenge csillag-konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás. Egy lokálisan konvex topológiát durvábbra cserélve a folytonos félnormák családja változatlan marad vagy csökken, úgyhogy a korlátos halmazok korlátosak maradnak. Ezért a fenti tartalmazási relációk alapján elég azt megmutatnunk, hogy ha $\Delta \subset X'$ gyenge csillag-korlátos, akkor normában is korlátos. Ez a Banach–Steinhaus tétel alkalmazásával adódik, mert Δ X'_{σ^*} -beli korlátossága maga után vonja, hogy Δ folytonos lineáris funkcionálok pontonként korlátos rendszere X -en. \square

Példa. Tekintsük ℓ^2 -nek a legfeljebb véges sok nem-nulla elemet tartalmazó sorozatok által alkotott X alterét. A

$$\varphi_n(x) := nx_n$$

képlet olyan X' -beli sorozatot definiál, amelyre $\varphi_n \xrightarrow{*} 0$, de $\|\varphi_n\| \rightarrow \infty$. Ez a példa mutatja, hogy a fenti állításban az X teljességére vonatkozó feltevés nem hagyható el.

Most igazoljuk a 13.14 és 14.23 tételek (27. és 70. o.) újabb változatát:

15.19. Állítás. (*Kiválasztási tétel*²¹) Ha X szeparábilis normált tér, akkor minden korlátos $(\varphi_k) \subset X'$ sorozatnak van gyenge csillag-konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy sűrű (x_n) sorozatot X -ben. Alkalmazva a Cantor-féle átlós módszert a 13.14 és 14.23 tételek bizonyításához hasonlóan (φ_k) -nek olyan (ψ_k) részsorozatát konstruálhatjuk, hogy az $k \mapsto \psi_k(x_n)$ számsorozat minden rögzített x_n -re konvergál. Minthogy (φ_k) korlátos és (x_n) sűrű X -ben, a 15.16 lemma alapján a $k \mapsto \psi_k(x)$ számsorozat minden $x \in X$ -re konvergál, és a

$$\varphi(x) := \lim \psi_k(x)$$

képlet folytonos lineáris $\varphi \in X'$ funkcionált definiál. Akkor $\psi_k \xrightarrow{*} \varphi$ a gyenge csillag-konvergenca definíciója miatt. \square

Példa. A szeparabilitás feltétele nem hagyható el. Például a

$$\varphi_k(x) := x_k, \quad x = (x_n) \in \ell^\infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

formula olyan funkcionálsorozatot definiál $(\ell^\infty)'$ zárt B egységömbjében, amelynek nincs gyenge csillag-konvergens részsorozata. Tetszőleges (φ_{k_m}) részsorozathoz tekintsünk ugyanis egy olyan $x = (x_n) \in \ell^\infty$ vektort, hogy $x_{k_m} = (-1)^m$ minden $m \geq 1$ -re. Akkor a $\varphi_{k_m}(x) = (-1)^m$ számok sorozata nem konvergens, és így $(\varphi_{k_m}(x))$ nem gyenge csillag-konvergens.

Megszabadulhatunk azonban a szeparabilitás feltételétől, ha sorozatok helyett hálókat tekintünk. A következő tétel (b) része szerint ugyanis minden X' -beli korlátos hálónak van gyenge csillag-konvergens *részhalója*.

A gyenge csillag topológia fontossága éppen ebből a kompaktsági tulajdonságból ered: ez ugyanis lehetővé teszi számos egzisztenciátétel bizonyítását.²²

15.20. Tétel. Legyen X normált tér, és jelöljük X , X' , X'' zárt egységömbjeit rendre B , B' , B'' -vel.

- (a) (*Goldstine*²³) $J(B)$ sűrű B'' -ben és $J(X)$ sűrű X'' -ben a $\sigma(X'', X')$ gyenge csillag topológiára nézve.
- (b) (*Banach–Alaoglu*²⁴) B' kompakt a $\sigma(X', X)$ gyenge csillag topológiára nézve.

²¹ Banach 1929.

²² Sok ilyen irányú alkalmazást tárgyal például Lions 1969.

Bizonyítás.

(a) Igazolnunk kell, hogy ha $\Phi \in X''$ nincs benne a $J(B) \subset X''$ halmaz K lezárásában a $\sigma(X'', X')$ topológiára nézve, akkor $\|\Phi\| > 1$. Minthogy K nem-üres konvex, zárt halmaz ebben a topológiában, a 15.5 tétel (99. o.) szerint létezik olyan $\varphi \in X'$ funkcionál, hogy alkalmas c_1, c_2 valós számokkal

$$\varphi(x) \leq c_1 < c_2 \leq \Phi(\varphi)$$

minden $x \in B$ -re. Innen $\|\varphi\| < \Phi(\varphi)$, tehát $\|\Phi\| > 1$.

(b) Topologikus térként X'_{σ^*} $\mathcal{F}(X)$ altere (97. o.). A 15.3 állítás alapján elegendő megmutatnunk, hogy B' korlátos és zárt $\mathcal{F}(X)$ -ben.

Mivel $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ minden $\varphi \in B'$ -re, B' pontonként korlátos X -en, és így korlátos $\mathcal{F}(X)$ -ben.

Tekintsünk most egy B' -beli (φ_n) hálót, amely valamely φ függvényhez konvergál $\mathcal{F}(X)$ -ben.²⁵ Meg kell mutatnunk, hogy $\varphi \in B'$. Tetszőlegesen adott $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\varphi_n(x+y) = \varphi_n(x) + \varphi_n(y), \quad \varphi_n(\lambda x) = \lambda \varphi_n(x) \quad \text{és} \quad |\varphi_n(x)| \leq \|x\|$$

összefüggésekből $n \rightarrow \infty$ esetén adódik, hogy φ lineáris, és hogy $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ minden x -re. Tehát $\varphi \in B'$. \square

Példa. A Banach–Alaoglu és a Krein–Milman tételt (103. o.) kombinálva adódik, hogy egy duális tér zárt egységömbjének mindig van extrémális pontja. Mivel c_0 egységömbjének nincs extrémális pontja (101. o.), ebből következik, hogy c_0 semmilyen normált térnek sem duális tere.

Megjegyzés. Említsük meg a következő ekvivalenciákat²⁶:

- X szeparábilis $\iff \sigma(X', X)$ B' -re való leszűkítése metrizálható;
- X' szeparábilis $\iff \sigma(X, X')$ B -re való leszűkítése metrizálható.

Az első direkt implikáció alkalmazásával a 15.19 állítás a Banach–Alaoglu tételből is levezethető.

²³ Goldstine 1938.

²⁴ Banach 1932, Alaoglu 1940.

²⁵ A hálók alkalmazása elkerülhető, bár a megfelelő bizonyítás kevésbé szemléletes: lásd például Brezis 1983.

²⁶ Lásd például Dunford–Schwartz 1957. A direkt \implies implikációkat Banach 1932 fedezte fel.

15.6. * Reflexív terek

Újabb jellemzéseket adunk a reflexív Banach-terekre:

15.21. Tétel. Az X normált térre a következő tulajdonságok ekvivalensek:

- (a) X reflexív;
- (b) X zárt egységömbje gyengén kompakt;
- (c) X_σ -ban minden korlátos, zárt halmaz kompakt.²⁷

Bizonyítás. Ha B és B'' az X , X'' terek egységömbjeit jelölik, akkor a 14.21 állításbeli (67. o.) $J : X \rightarrow X''$ izometriára $J(B) \subset B''$, és X pontosan akkor reflexív, ha $J(B) = B''$.

(a) \iff (b) B gyenge kompaktsága definíció szerint ekvivalens $J(B)$ gyenge csillag-kompaktségával. Ha X reflexív, akkor $J(B) = B''$, és így $J(B)$ gyenge csillag-kompakt a Banach–Alaoglu tétel szerint (113. o.).

Megfordítva, ha $J(B)$ gyenge csillag-kompakt, akkor zárt is B'' -ben erre a topológiára nézve. De Goldstein tétele szerint (113. o.) $J(B)$ sűrű is B'' -ben ugyanebben a topológiában, úgyhogy $J(B) = B''$. Így X reflexív.

(b) \implies (c) Hasonlósági okokból X_σ minden zárt gömbje kompakt. Ha A korlátos és zárt X_σ -ban, akkor normában is korlátos a 15.13 állítás miatt, és így része egy alkalmas K zárt gömbnek. Kompakt halmaz zárt részhalmaza lévén A kompakt X_σ -ban.

(c) \implies (b) B konvex és zárt, tehát gyengén is zárt (14.15 vagy 15.10 állítás, 60. és 104. o.). Továbbá B normában korlátos, tehát gyengén is korlátos. \square

*Megjegyzések.

- A (c) tulajdonság alapján alkalmazva a Tukey–Klee tételt (99. o.) X_σ -ban megkapjuk újra a 14.24 állítást (71. o.) reflexív térbeli diszjunkt, nem-üres, konvex, korlátos és zárt halmazok szétválaszthatóságáról.
- A (c) tulajdonság alapján alkalmazva a Krein–Milman tételt (103. o.) X_σ -ban azt kapjuk, hogy reflexív térben minden nem-üres, konvex, korlátos és zárt halmaz az extrémális pontjainak a konvex burka.

²⁷ Banach 1932, Bourbaki 1938, Kakutani 1939, Šmulian 1939. Emlékeztetünk arra, hogy szeparált lokálisan konvex terekben minden kompakt halmaz korlátos és zárt.

Igazoljuk a reflexív terek néhány további tulajdonságát:

15.22. Állítás. (Pettis²⁸) Legyen X Banach-tér.

- (a) Ha X reflexív, akkor X zárt alterei is reflexívek.
 (b) X és X' egyszerre reflexívek.

Bizonyítás. Legyen Y zárt altere X -nek, és jelöljük X , Y , X' zárt egységsgömbjeit rendre a B_X , B_Y és $B_{X'}$ szimbólumokkal.

(a) Alkalmazva az előző tételt adott B_Y -beli (y_i) hálózhoz olyan (z_j) részhálót és $a \in B_Y$ pontot kell találnunk, hogy $\varphi(z_j) \rightarrow \varphi(a)$ minden $\varphi \in Y'$ -re. Emlékeztetünk ugyanis arra ²⁹, hogy egy topologikus térbeli K halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden K -beli hálónak van K -beli ponthoz konvergáló részhálója.³⁰

B_X gyengén kompakt X reflexivitása miatt. Minthogy $B_Y \subset B_X$, van olyan (z_j) részháló és olyan $a \in B_X$ pont, hogy $\psi(z_j) \rightarrow \psi(a)$ minden $\psi \in X'$ -re. Minthogy a konvex, zárt B_Y halmaz gyengén is zárt X -ben, $a \in B_Y$. Minthogy végül minden $\varphi \in Y'$ kiterjeszthető alkalmas $\psi \in X'$ funkcionállá a Helly–Hahn–Banach tétel szerint, $\varphi(z_j) \rightarrow \varphi(a)$ minden $\varphi \in Y'$ -re.

(b) A Banach–Alaoglu tétel alapján $B_{X'}$ kompakt a $\sigma(X', X)$ topológiában. Ha X reflexív, akkor a $\sigma(X', X)$ és $\sigma(X', X'')$ topológiák egybeesnek, úgyhogy $B_{X'}$ kompakt a $\sigma(X', X'')$ topológiában is. De akkor az előző tétel alapján X' reflexív.

Ha X' reflexív, akkor X'' is reflexív az imént igazoltak miatt. A 14.21 állításbeli (67. o.) $J : X \rightarrow X''$ lineáris izometriát felhasználva akkor $J(X)$ is reflexív (a) miatt, mint X'' teljes, és így zárt altere. Minthogy X és $J(X)$ izomorf, innen következik, hogy X is reflexív. \square

Példák.

- A 14.6 szakaszban (67. o.) külön-külön igazoltuk, hogy c_0 , ℓ^1 és ℓ^∞ terek egyike sem reflexív. Ezek az eredmények a fenti (b) tulajdonság fényében egymásból is következnek, hiszen ³¹ $(c_0)' = \ell^1$ és $(\ell^1)' = \ell^\infty$.
- Minthogy c_0 zárt altere ℓ^∞ -nek, c_0 nem-reflexív volta közvetlenül is maga után vonja ℓ^∞ nem-reflexivitását.

²⁸ Pettis 1938. Közvetlenebb bizonyításokat ad Dunford–Schwartz 1957.

²⁹ Topológia, 2.26 állítás, 58. o.

³⁰ A hálók használata kikerülhető: lásd például Brezis 1983.

³¹ Lásd a 14.13 állítást, 57. o.

15.7. * Topologikus vektorterek

Első pillantásra a következő terek természetesebbek a lokálisan konvexeknél:

Definíció. *Topologikus vektortéren* olyan \mathcal{T} topológiával ellátott X vektorteret értünk, ahol az összeadás és a számmal szorzás folytonos műveletek.

Megjegyzés. A definícióból következik, hogy a \mathcal{T} topológia eltolás- és homotéciainvariáns: ha egy A halmaz nyílt, zárt vagy kompakt, akkor az $A + x$ ($x \in X$) és λA ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) halmazok is nyíltak, zártak, illetve kompaktak.

A 15.2 állítás (d) része (96. o.) szerint minden lokálisan konvex tér topologikus vektortér.

A következő elemi egyenlőtlenség segítségével könnyen adhatunk majd példákat *nem* lokálisan konvex topologikus vektorterekre.

15.23. Lemma. *Ha $0 < p \leq 1$ és x, y nemnegatív valós számok, akkor*

$$(x + y)^p \leq x^p + y^p.$$

Bizonyítás. Tekintsük \mathbb{R}^2 -ben a $\|\cdot\|_{1/p}$ normát, és alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $a := (x^p, 0)$ és $b := (0, y^p)$ vektorokra:

$$(x + y)^p = \|a + b\|_{1/p} \leq \|a\|_{1/p} + \|b\|_{1/p} = x^p + y^p. \quad \square$$

Példa. Adott $0 < p \leq 1$ -re jelöljük ℓ^p -vel azon $x = (x_n)$ valós számsorozatoknak a halmazát, amelyekre $\sum |x_n|^p < \infty$. Az előző lemma alapján ℓ^p vektortér, és a

$$d_p(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$$

formula olyan metrikát definiál ℓ^p -n, hogy a megfelelő topológiával ℓ^p topologikus vektortér.³² (A $p = 1$ esetben a már ismert ℓ^1 Banach-térhez jutunk.)

15.24. Állítás. *(Kolmogorov³³) Egy topologikus vektortér pontosan akkor lokálisan konvex, ha minden 0-környezet tartalmaz konvex 0-környezetet.*

³² Általánosabb tételt bizonyítunk majd később, a 22.5 állításban, 292. o.

³³ Kolmogorov 1934.

Bizonyítás. Minden lokálisan konvex tér rendelkezik az említett tulajdonsággal, mert a $B_{p,r}(0)$ gömbök konvexek. Fordítva, ha az X topologikus vektortér rendelkezik az említett tulajdonsággal, és tekintsünk egy tetszőleges V 0-környezetet. Elegendő olyan folytonos p félnormát találnunk, amelyre $B_{p,1}(0) \subset V$.

Legyen $U \subset V$ konvex 0-környezet, akkor $-U$ és így $W := -U \cap U$ is konvex 0-környezet. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a

$$p(x) := \inf \{t > 0 : x \in tW\}$$

formula olyan félnormát definiál X -en³⁴, amelyre

$$B_{p,1}(0) \subset W \subset \overline{B_{p,1}(0)}.$$

Speciálisan $B_{p,1}(0) \subset V$.

Mutassuk meg, hogy p folytonos. Tetszőlegesen adott $a \in X$ és $r > 0$ esetén $a + rW$ környezete a -nak. Ha $b \in a + rW$, akkor $r^{-1}(b - a) \in \overline{B_{p,1}(0)}$. Következésképpen

$$|p(b) - p(a)| \leq p(b - a) \leq r. \quad \square$$

Példa. Ha $0 < p < 1$, akkor ℓ^p nem lokálisan konvex, mert a

$$B_1(0) := \{x \in \ell^p : d_p(0, x) < 1\}$$

egységgömb nem tartalmaz konvex 0-környezetet. Ha ugyanis K konvex 0-környezet, akkor $B_{2r}(0) \subset K$ alkalmas (elégg kis) $r > 0$ -ra. Akkor minden n természetes számra fennállnak az

$$r^{1/p}e_n \in \overline{B_r(0)} \subset K$$

relációk, és innen K konvexitása miatt

$$z_n := r^{1/p} \frac{e_1 + \cdots + e_n}{n} \in K.$$

De ekkor K nem tartozhat $B_1(0)$ -hoz, mert

$$d_p(0, z_n) = rn^{1-p} \rightarrow \infty.$$

Megjegyzések. Az általános topologikus vektorterek jelentőségét csökkentik, hogy meghökkentő patológus tulajdonságokkal rendelkezhetnek:

- Vannak olyan végtelen dimenziós X szeparált topologikus vektorterek, amelyekben \emptyset -en és X -en kívül nincs más konvex nyílt halmaz.³⁵ Ezekben a terekben nincsenek zárt affin hipersíkok sem, mert $X' = \{0\}$.

³⁴ Minkowski 1911, 131–132. o.

³⁵ Néhány ilyen példát látunk majd a 22.2 és 22.3 fejezetben, 289. és 295. o.

- Egyes szeparált topologikus vektorterek tartalmaznak olyan nem-üres konvex, kompakt halmazokat, amelyeknek nincs extrémális pontjuk.³⁶

³⁶ Roberts 1976, 1977. Lásd a 294. oldal lábjegyzetét is.

5. rész

Integrálszámítás

Arkhimédész több fontos integrált is kiszámított, de halála után csaknem két évezreden át nem történt lényeges előrelépés ezen a területen. A tizenhetedik században a Newton–Leibniz formula forradalmasította a diszciplínát, és lehetővé tette egy sor geometriai és mechanikai probléma megoldását. A rengeteg új eredmény szilárd elméleti megalapozásának a hiánya hamarosan elviselhetetlenné vált, főleg Fourier hővezetési tanulmányának a megjelenése (1822) után.

Ennek az érdekében Riemann (1854) általánosította a Cauchy-féle integrálfogalmat (1823). Dolgozatának posztumusz publikálása (1867) kutatások egész sorát indította el, amelyek célja minél általánosabb integrálfogalom és minél egyszerűbb határátmeneti eljárások kifejlesztése volt. Harnack (1881, 1885), Hankel (1881, 1882), du Bois-Reymond (1882), Jordan (1883), Stolz (1884) és Cantor (1884) munkáit követően Peano (1887) bevezette a *végesen additív mértékeket*, amelyek a vizsgált halmazok intervallumok illetve téglalapok általi *véges* befedésein alapultak.

Borel (1898) felismerte, hogy *megszámlálható* befedéseket használva lényegesen hasznosabb σ -*additív mértékek*hez juthatunk. Baire (1898, 1899) ehhez szorosan kapcsolódó eredményekhez jutott, amikor bevezette a pontonkénti konvergencia iterálásával kapható függvények osztályait. Borel és Baire kutatásai által is motiválva, Lebesgue (1901, 1902) igen általános integrálméletet dolgozott ki. Az integrálható függvények osztályát lényegesen kibővítette, ugyankakkor az eddigieknél könnyebben kezelhető tételeket kapott a határátmenetekre, és nagymértékben kiterjesztette a Newton–Leibniz formula érvényességét is.

Fatou, Riesz, Fischer, Fréchet, Fubini (1906–1910) és mások mély felfedezései nyilvánvalóvá tették a Lebesgue-integrál rendkívüli hasznosságát, és jelentősen ösztönözték a funkcionálanalízis fejlődését. A későbbiekben a Lebesgue-integrál lehetővé tette a valószínűségszámítás precíz megalapozását (Kolmogorov 1933) és a parciális differenciálegyenletek kezelését nagyban megkönnyítő függvényterek bevezetését (Szoboljev 1935, 1936).

A Lebesgue-integrál fejlődését két szép cikkben is áttekintette Riesz Frigyes (1949, 1952); ezenkívül javasoljuk a [54] és [164] munkák tanulmányozását is.

Több, mint fél évszázaddal a megjelenése után, továbbra is Riesz és Szőkefalvi-Nagy monográfiája (1952) tartalmazza az elmélet legelegánsabb kidolgozását. Mi is Riesz felépítését követjük. További eredmények és feladatok találhatók a következő munkákban: [75], [76], [155], [229], [304], [349], [351], [353], [396].

16. fejezet

* Monoton függvények

Látom, de nem hiszem.

G. Cantor

Senki sem fog bennünket kiűzni abból a Paradicsomból, amelyet Cantor teremtett számunkra.

D. Hilbert

Ebben a fejezetben I betűvel mindig nem-degenerált (tehát legalább két pontot tartalmazó) intervallumokat jelölünk.

16.1. * Folytonosság. Megszámlálható halmazok

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvénynek értelmezési tartománya bármely belső pontjában véges bal- és jobboldali határértéke van; a függvény pontosan akkor folytonos a -ban, ha ezek megegyeznek. (Lásd a 16.1 ábrát.)

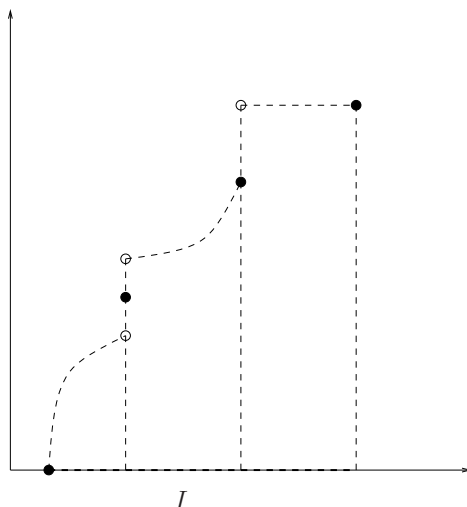
Mi mondható a folytonossági pontok halmazáról? Ahhoz, hogy válaszolhassunk erre a kérdésre, emlékeztetünk a következő fogalomra:

Definíció. Az A halmaz megszámlálható¹, ha létezik olyan (a_n) sorozat, amely A minden elemét tartalmazza (legalább egyszer).

Megjegyzések.

- Az üres halmaz és minden véges halmaz megszámlálható. (Az (a_n) sorozat tartalmazhat A -n kívüli elemeket is.)

¹ Cantor 1882.



16.1. ábra. Monoton függvény gráfja

- Minden *végtelen* megszámlálható A halmazhoz létezik olyan A -beli sorozat, amely A minden elemét pontosan egyszer tartalmazza. (A definícióbeli sorozat alkalmas részsorozata megfelel.)
- A definícióból következik, hogy ha A megszámlálható halmaz és $g : A \rightarrow B$ *szuperjektív* függvény, akkor B is megszámlálható: *megszámlálható halmaz képe is megszámlálható.*
- Az is könnyen látható, hogy ha B megszámlálható halmaz és $g : A \rightarrow B$ *injektív* függvény, akkor A is megszámlálható.

Példák.

- Az \mathbb{N} , \mathbb{Z} és \mathbb{Q} számhalmazok is megszámlálhatóak. Cantor nevezetes tétele szerint (lásd a következő állítást) \mathbb{R} *nem* megszámlálható.
- Páronként diszjunkt, nem-üres, nyílt intervallumok \mathcal{P} rendszere mindig megszámlálható. Ugyanis mindegyik intervallum tartalmaz racionális számot, és ez lehetővé teszi egy injektív $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ leképezés értelmezését.

Vezessük be az alábbi terminológiát:

Definíció. Egy halmazrendszer vagy halmazsorozat *diszjunkt*, ha elemei páronként diszjunktak.

Foglaljuk össze a megszámlálható halmazok alaptulajdonságait:

16.1. Állítás.

- (a) *Megszámlálható halmaz részhalmazai is megszámlálhatóak.*
 (b) *Megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.*
 (c) *(Cantor²) A nem-degenerált intervallumok nem megszámlálhatóak.*

Bizonyítás.

(a) Ha $B \subset A$, akkor az $f(x) := x$ képlettel értelmezett $f : B \rightarrow A$ függvény injektív. Így A megszámlálhatósága maga után vonja B megszámlálhatóságát.

(b) Legyen (A_n) megszámlálható halmazok sorozata. Rögzítsünk minden egyes n -re egy olyan a_{n1}, a_{n2}, \dots sorozatot, amely tartalmazza A_n minden elemét. Ha p_1, p_2, \dots a prímszámok sorozata, akkor a következő képlet olyan (a_n) sorozatot definiál, amely $\cup A_n$ minden elemét tartalmazza:

$$a_m := \begin{cases} a_{nk} & \text{ha } m = (p_n)^k \text{ valamely } n\text{-re és } k\text{-ra,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(c) Elég megmutatni, hogy ha I nem-degenerált intervallum, akkor egyetlen (a_n) sorozat sem tartalmazza I minden pontját. Válasszunk egy olyan $I_1 \subset I$ nem-degenerált, kompakt részintervallumot, hogy $a_1 \notin I_1$. Azután válasszunk olyan $I_2 \subset I_1$ nem-degenerált, kompakt részintervallumot, hogy $a_2 \notin I_2$. Rekúzióval folytatva, nem-degenerált, kompakt intervallumoknak olyan monoton fogyó

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

sorozatát kapjuk, hogy $a_n \notin I_n$ minden n -re. Cantor egyik tétele szerint létezik az intervallumoknak legalább egy közös pontja³, és egy ilyen pont egyik a_n -nel sem egyezhet meg. \square

Térjünk vissza a monoton függvények vizsgálatához.

16.2. Állítás.

- (a) *Monoton függvény szakadási pontjainak a halmaza megszámlálható.*
 (b) *Minden megszámlálható valós számhalmaz alkalmas monoton növekvő függvény szakadási pontjainak a halmaza.*

² Cantor 1874, 117–118. o.

³ Topológia, 1.21 vagy 2.18 állítás, 27. vagy 49. o. A Topológia rész a jelen könyv első kötetében található.

Bizonyítás.

(a) Szükség esetén -1 -gyel megszorozva feltehető, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő. Jelöljük A -val I azon belső pontjainak a halmazát, amelyekben f nem folytonos. Minthogy f monoton növekvő, a nem-üres nyílt

$$(f(a-0), f(a+0)), \quad a \in A$$

intervallumok páronként diszjunktak. Egyik előző megjegyzésünk alapján tehát A megszámlálható. Mivel f -nek legfeljebb két további szakadási helye lehet (I végpontjai), az utóbbi halmaz is megszámlálható.

(b) Az üres halmazhoz minden konstans függvény megfelel. Egyébként legyen (a_n) az adott halmaz pontjainak (véges vagy végtelen) sorozata; akkor az

$$f(x) := \sum_{\{n : a_n < x\}} n^{-2}$$

képlet alkalmas f függvényt definiál.

□

16.2. * Differenciálhatóság. Nullahalmazok

A monoton függvények differenciálhatóságának vizsgálatában fontos szerepet fog játszani a következő fogalom:

Definíció. A valós A számhalmaz *nullahalmaz*⁴, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra befedhető ε -nál kisebb összhosszúságú $\{I_k\}$ intervallumrendszerrel:

$$A \subset \bigcup I_k \quad \text{és} \quad \sum |I_k| < \varepsilon.$$

Itt és a továbbiakban $|I|$ -kel jelöljük az I intervallum hosszát.

Megjegyzés. Minden A nullahalmazhoz van olyan véges összhosszúságú (J_m) intervallumsorozat, hogy A minden pontját végtelen sok J_m halmaz is lefedi. Válasszunk ugyanis minden n természetes számra egy A -t befedő, 2^{-n} -nél kisebb összhosszúságú (I_{nk}) intervallumrendszert.⁵ Mindezen I_{nk} intervallumokat egyetlen (J_m) sorozatba rendezve kívánt tulajdonságú intervallumsorozathoz jutunk.

⁴ Hankel 1870 (86. o.), Ascoli 1875, Smith 1875 (150. o.), du Bois-Reymond 1882, Harnack 1885.

⁵ A későbbiek céljából jegyezzük meg, hogy e halmazok nyíltaknak is választhatók: elég kicsit megnövelni őket.

Megfordítva, egy ilyen (J_m) sorozat létezése maga után vonja, hogy A nullahalmaz. Valóban, tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N természetes szám, hogy

$$\sum_{m>N} |J_m| < \varepsilon,$$

és a J_{m+1}, J_{m+2}, \dots intervallumok továbbra is befedik A -t.

Példák.

- (Harnack⁶) Minden megszámlálható valós $\{a_n\}$ számhalmaz nullahalmaz: tekintsük tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz az

$$(a_n - \varepsilon 3^{-n}, a_n + \varepsilon 3^{-n})$$

intervallumokat.

- (Cantor-féle triadikus halmaz⁷) Léteznek nem-megszámlálható nullahalmazok. Hagyjuk el például az $[0, 1]$ intervallum középső harmadát, az $(1/3, 2/3)$ nyílt intervallumot. Ezt követően hagyjuk el a megmaradt $[0, 1/3]$ és $[2/3, 1]$ diszjunkt, zárt intervallumok középső harmadait; négy diszjunkt, $1/9$ hosszúságú intervallum marad: lásd a 16.2 ábrát. Az eljárást folytatva n lépés után egy C_n halmazt kapunk, amely 2^n darab diszjunkt, egyenként 3^{-n} hosszúságú zárt intervallum egyesítése. A monoton fogyó (C_n) kompakt halmazsorozat metszetét C -vel jelöljük, és Cantor-féle triadikus halmaznak hívjuk. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz $(2/3)^n < \varepsilon$, ha n elég nagy; ekkor a C_n -t alkotó intervallumok C -nek ε -nél kisebb összhosszúságú befedését alkotják. Tehát C nullahalmaz.

A konstrukció szerint C azon x valós számokból áll, amelyek

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}$$

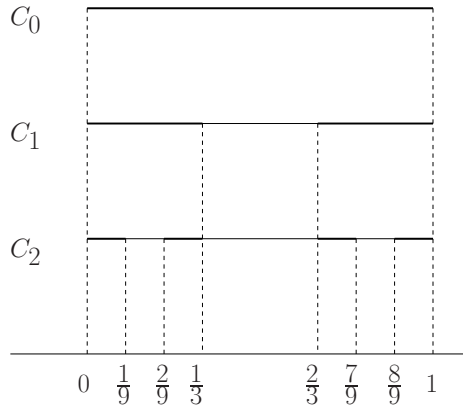
alakban írhatók, ahol $\varepsilon_i = 0$ vagy $\varepsilon_i = 2$ minden i -re. (Az ilyen előállítások egyértelműek.) Következésképpen a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^{i+1}}$$

képlet C -t $[0, 1]$ -re képezi. Minthogy az utóbbi halmaz nem megszámlálható, C sem az.

⁶ Harnack 1885.

⁷ Smith 1875, Cantor 1883 (207. o.).

16.2. ábra. A C_n halmazok

- Borel egyik fontos tétele szerint (lásd alább) nem minden valós számhalmaz nullahalmaz.

16.3. Állítás.

- (a) Az üres halmaz nullahalmaz.
- (b) Nullahalmaz részhalmazai is nullahalmazok.
- (c) Megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése is nullahalmaz.
- (d) (Borel⁸) Ha az (I_k) intervallsorozat befed egy I intervallumot, akkor $|I| \leq \sum |I_k|$. Következésképpen a nem-degenerált intervallumok nem nullahalmazok.

Bizonyítás.

(a) és (b) nyilvánvaló.

(c) Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -ra fedjük be mindegyik A_n nullahalmazt $\varepsilon 2^{-n}$ -nél kisebb összhosszúságú (I_{nk}) intervallsorozattal. Akkor mindezen intervallumok együtt $\cup A_n$ ε -nél kisebb összhosszúságú befedését alkotják.

(d) Feltehető, hogy I nem-degenerált. Tekintsük először azt az esetet, amikor $I = [a, b]$ kompakt, az I_k intervallumok pedig nyíltak. Legyen (a_1, b_1) az (I_k) sorozat első tagja, amelyik tartalmazza a -t. Rekúzióval folytatva, ha $b_n \leq b$ valamely $n \geq 1$ -re, akkor legyen (a_{n+1}, b_{n+1}) az (I_k) sorozat első tagja, amelyik tartalmazza b_n -t.

⁸ Borel 1898. A bizonyításbeli konstrukció Heine 1872 eljárásán alapul (188. o.).

A konstrukció előbb-utóbb megszakad, ugyanis alkalmas N -re $b_N > b$. Valóban, az ellenkező esetben (b_n) valamely $x \leq b$ ponthoz konvergál, és $x \in I_\ell$ alkalmas ℓ -re. Minthogy I_ℓ nyílt, létezik olyan m , hogy $b_n \in I_\ell$ minden $n \geq m$ -re. A konstrukció miatt ez azt jelenti, hogy az (a_{n+1}, b_{n+1}) intervallumok minden $n \geq m$ -re megelőzik I_ℓ -t az (I_k) sorozatban. Ez azonban lehetetlen, hiszen az (a_{n+1}, b_{n+1}) intervallumok páronként különböznek.

A fentiek akapján

$$|I| = b - a < b_N - a_1 = \sum_{i=2}^N (b_i - b_{i-1}) + b_1 - a_1 \leq \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) \leq \sum |I_k|.$$

Az általános esetben rögzítsünk egy $\alpha > 1$ számot, egy $|I|/\alpha$ hosszúságú $J \subset I$ kompakt részintervallumot, és minden n -re egy I_n -t tartalmazó, $\alpha|I_n|$ hosszúságú nyílt J_n intervallumot. A (J_n) sorozat befedi J -t, úgyhogy $\sum |J_n| \geq |J|$ az eddigiek szerint. Más szóval $\sum |I_n| \geq |I|/\alpha$, és a keresett állítás $\alpha \rightarrow 1$ esetén adódik. \square

Vezessünk be még egy kényelmes terminológiát:

Definíció. Egy tulajdonság *majdnem mindenütt*⁹ (röviden *m.m.*) teljesül, ha érvényes egy nullahalmazon kívül.

Most már megfogalmazhatjuk a differenciálhatóságról szóló alapvető eredményt:

16.4. Tétel.

- (a) (Lebesgue¹⁰) Bármely $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvény *m.m. differenciálható*.
 (b) Minden A nullahalmazhoz létezik olyan monoton növekvő $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely A egyetlen pontjában sem differenciálható.

A tétel (a) részét a következő két szakaszban bizonyítjuk majd.

***A (b) rész bizonyítása.** Válasszunk olyan, véges összhosszúságú (J_m) nyílt intervallsorozatot, amelyik végtelen sokszor lefedi A minden pontját. Jelöljük $f_m(x)$ -szel a $J_m \cap (-\infty, x)$ intervallum hosszát, akkor az $f := \sum f_m$ képlet monoton növekvő $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt definiál. Tegyük fel

⁹ Lebesgue 1906 (7. o.).

¹⁰ Lebesgue 1904, 128–129. o. Lebesgue csak folytonos függvényeket vizsgált. Eredménye megcáfolta Weierstrass sejtését, miszerint léteznek folytonos és monoton, de sehol sem differenciálható függvények; lásd Hawkins 2001, 47. o.

indirekt, hogy f differenciálható valamely $a \in A$ pontban. Válasszunk egy $N > f'(a)$ egészt, majd egy olyan kis $\delta > 0$ számot, hogy legalább N darab J_m intervallum tartalmazza $[a, a + \delta]$ -t, mondjuk J_{m_1}, \dots, J_{m_N} . Akkor

$$f(a+h) - f(a) \geq \sum_{k=1}^N f_{m_k}(a+h) - f_{m_k}(a) \geq Nh$$

minden $0 < h < \delta$ -ra, ellentmondva az $f'(a) < N$ egyenlőtlenségnek. \square

16.3. * Ugrófüggvények

Ebben a szakaszban Lipiński és Rubel eljárását követjük.¹¹ Mivel minden intervallum megszámlálható sok kompakt intervallum egyesítése, elegendő Lebesgue tételét abban az esetben igazolnunk, amikor $I = [a, b]$ kompakt. Mutassuk meg először az alábbi segédtelet:

16.5. Lemma. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény. Jelöljük minden $C > 0$ számra E_C -vel azon $a < x < b$ pontok halmazát, amelyekhez találhatók olyan $s = s_x$ és $t = t_x$ számok, hogy $s < x < t$ és

$$f(t) - f(s) > C(t - s). \quad (16.1)$$

Akkor E_C megszámlálható sok olyan (a_n, b_n) intervallum egyesítése, amelyek összhosszúsága legfeljebb $4C^{-1}(f(b) - f(a))$.

Megjegyzés. Az E_C halmaz mindazon pontokat tartalmazza, amelyekben f -nek C -nél nagyobb értékű deriváltja van, de tartalmazhat további pontokat is. Például a $[0, 4]$ intervallumon értelmezett $f(x) := \sqrt{x}$ függvényre $C = 1/\sqrt{2}$ esetén

$$\{f' > C\} = (0, 1/2) \quad \text{és} \quad E_C = (0, 2).$$

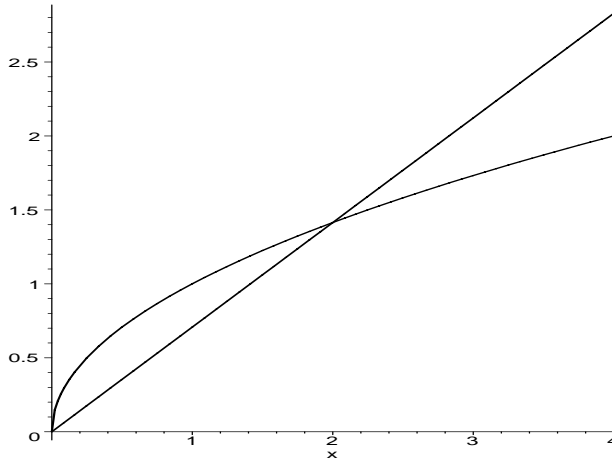
(Lásd a 16.3 ábrát: $0 < x < 2$ esetén $s_x = 0$ és $t_x = 2$ választható.)

Bizonyítás. Az E_C halmaz definíció szerint nyílt, tehát alkalmas, páronként diszjunkt (a_n, b_n) nyílt intervallumok egyesítése. Vegyük észre azt is, hogy $x \in (a_n, b_n)$ esetén definíció szerint $(s_x, t_x) \subset (a_n, b_n)$.

Rögzítsünk minden n -re egy

$$b'_n - a'_n = (b_n - a_n)/2 \quad (16.2)$$

¹¹ Lipiński 1961, Rubel 1963.

16.3. ábra. E_C jelentése

hosszúságú $[a'_n, b'_n] \subset (a_n, b_n)$ kompakt részintervallumot. Ezt befedi az (s_x, t_x) intervallumok, ahol

$$x \in [a'_n, b'_n].$$

Míthogy $[a'_n, b'_n]$ kompakt, kiválasztható véges $(s_1, t_1), \dots, (s_N, t_N)$ részfedés. Válasszunk olyan véges részfedést, amelyre N a lehető legkisebb, akkor $\cup(s_k, t_k)$ egyetlen pontja sincs kettőnél többször lefedve, hiszen ha három intervallumnak van közös pontja, akkor azok közül az egyik hozzátartozik a másik kettő egyesítéséhez. Következésképpen, felhasználva (16.1)-et és az $(s_k, t_k) \subset (a_n, b_n)$ tartalmazási relációkat,

$$b'_n - a'_n \leq \sum_{k=1}^N (t_k - s_k) \leq C^{-1} \sum_{k=1}^N (f(t_k) - f(s_k)) \leq 2C^{-1}(f(b_n) - f(a_n)).$$

Innen a keresett egyenlőtlenség (16.2) felhasználásával adódik:

$$\sum (b_n - a_n) \leq 4C^{-1} \sum (f(b_n) - f(a_n)) \leq 4C^{-1}(f(b) - f(a)). \quad \square$$

A lemma első alkalmazásaként megmutatjuk, hogy monoton növekvő függvénynek nem lehet sok pontban végtelen deriváltja. Pontosabban, fennáll a

16.6. Lemma. *Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény, akkor*

$$Df(x) := \limsup_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \infty \quad m.m. \quad [a, b]\text{-ban.}$$

Bizonyítás. Ha $Df(x) = \infty$, akkor $x \in E_C$ minden $C > 0$ -ra, e pontok halmaza tehát befedhető legfeljebb $4(f(b) - f(a))/C$ összhosszúságú intervallumrendszerrel. Az állítás $C \rightarrow \infty$ esetén adódik. \square

A lemma második alkalmazásaként bebizonyítjuk Lebesgue tételét egy speciális esetben.

Definíció. *Ugrófüggvényen* olyan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, hogy alkalmas $(a_k) \subset I$ pontsorozattal és $\sum S_k$ konvergens, nem-negatív numerikus sorral $f = \sum f_k$, ahol

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 0 & \text{ha } x < a_k, \\ f_k(x) &= S_k & \text{ha } x > a_k, \\ 0 &\leq f_k(a_k) \leq S_k. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy minden ugrófüggvény monoton növekvő.

16.7. Állítás. *Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ugrófüggvény, akkor $f' = 0$ m.m.*

Bizonyítás. Elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $I = [a, b]$ kompakt intervallum. Elég megmutatnunk, hogy bármely rögzített $C > 0$ -ra $Df \leq C$ m.m.

Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot¹², majd válasszunk olyan nagy N -et, hogy

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} S_k < \varepsilon.$$

Akkor a

$$h := \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k$$

függvény monoton növekvő, és $h(b) - h(a) < \varepsilon$. A 16.5 lemma alapján $Dh \leq C$ valamely $4\varepsilon/C$ -nél kisebb összhosszúságú intervallumrendszeren kívül.

Vegyük észre, hogy az

$$f - h = \sum_{k=1}^N f_k$$

¹² Az alábbi bizonyítás Császár Ákostól származik: lásd Szőkefalvi-Nagy 1965.

függvény az a_1, \dots, a_N pontokat kivéve mindenütt differenciálható, és a deriváltja nulla. Következésképpen $Df \leq C$ valamely $4\varepsilon/C$ -nél kisebb összhosszúságú intervallumrendszeren kívül. Innen $\varepsilon \rightarrow 0$ mellett adódik, hogy $Df \leq C$ m.m. \square

Az ugrófüggvények segítségével izolálhatjuk a monoton növekvő függvények nem-folytonos részét:

16.8. Állítás. Minden korlátos, monoton növekvő $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény előállítható egy monoton növekvő, folytonos és egy ugrófüggvény összegeként.

Bizonyítás. Az f függvényt balra és jobbra konstansként kiterjesztve feltehető, hogy $I = \mathbb{R}$. Legyen (a_k) f szakadási helyeinek a (véges vagy végtelen) sorozata, és legyen $S_k = f(a_k + 0) - f(a_k - 0)$. A $\sum S_k$ sor konvergens, mert f korlátos. Vezessük be az f_k függvényeket úgy, mint az ugrófüggvények definíciójában, és legyen $f_k(a_k) = f(a_k) - f(a_k - 0)$. Akkor $h := \sum f_k$ ugrófüggvény, $g := f - h$ pedig monoton növekvő és folytonos. \square

16.4. * A Lebesgue-tétel bizonyítása

A 16.7 és 16.8 állítások fényében elegendő egy *kompakt* intervallumon értelmezett, monoton növekvő és *folytonos* $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt vizsgálni. Riesz Frigyes elemi tárgyalását ismertetjük.¹³

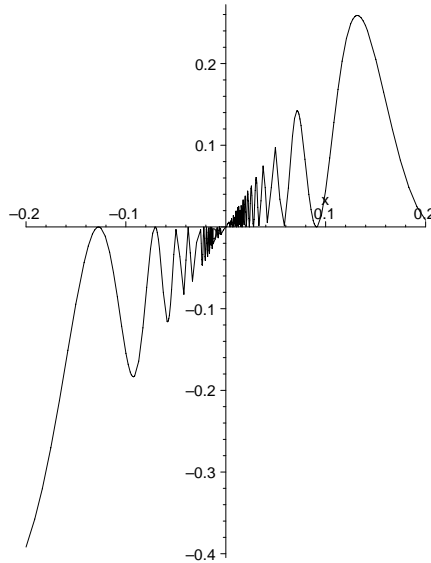
Vezessük be az úgynevezett *Dini-deriváltakat*¹⁴:

$$\begin{aligned} D_- f(x) &:= \limsup_{\substack{y < x \\ y \rightarrow x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, & D_+ f(x) &:= \limsup_{\substack{y > x \\ y \rightarrow x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \\ d_- f(x) &:= \liminf_{\substack{y < x \\ y \rightarrow x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, & d_+ f(x) &:= \liminf_{\substack{y > x \\ y \rightarrow x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \end{aligned}$$

Mivel f monoton növekvő, ezek mind nem-negatívak.

¹³ Riesz 1931, 1932. A bizonyítás adaptálható a nem-folytonos esetre is, lásd Riesz és Szőkefalvi-Nagy 1952, Szőkefalvi-Nagy 1965. A mértékelmélet felhasználásával Austin 1965 még rövidebb bizonyítást adott.

¹⁴ Dini 1878 (sec. 145).



16.4. ábra. Dini-deriváltak

Példa. Az $f(x) := x + x \sin(1/x)$ függvényre

$$D_-f(0) = D_+f(0) = 1 \quad \text{és} \quad d_-f(0) = d_+f(0) = 0;$$

lásd a 16.4 ábrát.

Fogadjuk el egy pillanatra a következő segédtelet:

16.9. Lemma. Majdnem mindenütt fennáll a $D_+f \leq d_-f$ egyenlőtlenség.

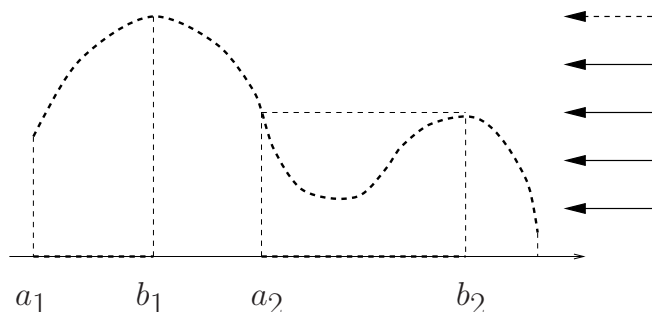
Akkor a segédtelet a $-f(-x)$ függvényre alkalmazva a $D_-f(x) \leq d_+f(x)$ egyenlőtlenség is teljesül, és így

$$0 \leq D_+f(x) \leq d_-f(x) \leq D_-f(x) \leq d_+f(x) \leq D_+f(x)$$

majdnem mindenütt. Minthogy $D_+f(x) < \infty$ m.m. a 16.6 lemma alapján, innen következik, hogy a négy deriváltszám véges és majdnem mindenütt egyenlő, ami Lebesgue tételét igazolja.

A 16.9 segédtelet bizonyításának fő eszköze a Riesz-féle „felkelő Nap” lemma. A megfogalmazásához vezessük be a következő fogalmat:

Definíció. Legyen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kompakt intervallumon folytonos függvény. Az $a < x < b$ pont (jobbról) láthatatlan, ha van olyan $y > x$, hogy $g(y) > g(x)$. (Lásd a 16.5 ábrát.)



16.5. ábra. Jobbról láthatatlan pontok

16.10. Lemma. („Felkelő Nap”¹⁵) A folytonos $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre nézve (jobbról) láthatatlan pontok halmaza olyan páronként diszjunkt (a_k, b_k) nyílt intervallumok egyesítése, hogy $g(a_k) \leq g(b_k)$ minden k -ra.

Bizonyítás. A láthatatlan pontok halmaza g folytonossága miatt nyílt, tehát megszámlálható sok nyílt intervallum egyesítése.

Tegyük fel indirekt, hogy $g(a_k) > g(b_k)$ ezen (a_k, b_k) intervallumok valamelyikére. Rögzítsünk egy $g(a_k) > c > g(b_k)$ számot, és vezessük be az

$$x := \sup\{a_k \leq t \leq b_k : g(t) \geq c\}$$

pontot. Akkor $g(x) = c$ és $a_k < x < b_k$ a c pont választása és g folytonossága miatt, létezik tehát olyan $y > x$ pont, amelyre $g(x) < g(y)$. Ez azonban lehetetlen, hiszen x értelmezése szerint egyrészt

$$c > g(y) \quad \text{ha} \quad x < y \leq b_k,$$

másrészt

$$c > g(b_k) \geq g(y) \quad \text{ha} \quad y > b_k,$$

mert b_k látható. □

A 16.9 lemma bizonyítása. Elegendő megmutatnunk, hogy tetszőlegesen rögzített $c_1 < c_2$ racionális számok esetén

$$E := \{x \in (a, b) : d_-f(x) < c_1 < c_2 < D_+f(x)\}$$

nullahalmaz: ekkor ezek uniója is nullahalmaz, és rajta kívül $d_-f(x) \geq D_+f(x)$.

¹⁵ Riesz 1931, 1932.

Meg fogjuk mutatni, hogy (a, b) tetszőlegesen rögzített (a', b') nyílt rész-intervallumára $E \cap (a', b')$ befedhető $(c_1/c_2)(b' - a')$ -nél kisebb összhosszúságú megszámlálható nyílt intervallumrendszerrel. Az eljárást iterálva adódni fog, hogy $E = E \cap (a, b)$ tetszőleges n természetes számra befedhető

$$(c_1/c_2)^n(b - a)\text{-nél}$$

kisebb összhosszúságú megszámlálható nyílt intervallumrendszerrel. Mint-hogy az utóbbi kifejezés $n \rightarrow \infty$ esetén végtelenhez tart, innen következni fog, hogy E nullahalmaz.

Ha $x \in E \cap (a', b')$, akkor alkalmas $a' < y < x$ -re

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < c_1,$$

vagyis

$$f(y) - c_1 y > f(x) - c_1 x.$$

Más szóval x balról láthatatlan¹⁶ a

$$g(t) := f(t) - c_1 t, \quad t \in [a', b']$$

képlettel értelmezett g függvényre nézve. Alkalmazva a 16.10 lemmát a $t \mapsto g(-t)$ függvényre, $E \cap (a', b')$ befedhető megszámlálható sok olyan, páronként diszjunkt (a_k, b_k) nyílt intervallummal, hogy $g(a_k) \geq g(b_k)$ minden k -ra, vagyis

$$f(b_k) - f(a_k) \leq c_1(b_k - a_k)$$

minden k -ra.

Tekintsünk most egy ilyen (a_k, b_k) intervallumot. Ha $x \in E \cap (a_k, b_k)$, akkor alkalmas $x < y < b_k$ -ra

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > c_2,$$

vagyis

$$f(y) - c_2 y > f(x) - c_2 x.$$

Más szóval x jobbról láthatatlan a

$$h(t) := f(t) - c_2 t, \quad t \in [a_k, b_k]$$

¹⁶ Azt mondjuk, hogy x balról láthatatlan egy g függvényre nézve, ha $-x$ jobbról láthatatlan a $t \mapsto g(-t)$ függvényre nézve.

képlettel értelmezett h függvényre nézve. Alkalmazva a 16.10 lemmát $E \cap (a_k, b_k)$ befedhető megszámlálható sok olyan, páronként diszjunkt (a_{km}, b_{km}) nyílt intervallummal, hogy $g(a_{km}) \leq g(b_{km})$ minden m -re, vagyis

$$f(b_{km}) - f(a_{km}) \geq c_2(b_{km} - a_{km})$$

minden m -re.

Következésképpen mindezen (a_{km}, b_{km}) intervallumok összessége befedi $E \cap (a', b')$ -t, és

$$\begin{aligned} \sum_{k,m} (b_{km} - a_{km}) &\leq \frac{1}{c_2} \sum_{k,m} f(b_{km}) - f(a_{km}) \\ &\leq \frac{1}{c_2} \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \\ &\leq \frac{c_1}{c_2} \sum_k (b_k - a_k) \\ &\leq \frac{c_1}{c_2} (b' - a'). \end{aligned} \quad \square$$

16.5. * Korlátos változású függvények

Két monoton növekvő függvény különbsége nem feltétlenül monoton. A 16.2 állításból és a 16.4 tételből (125. és 129. o.) mégis könnyen következik, hogy az ilyen függvényeknek is csak megszámlálható sok szakadási helye lehet, és hogy ezek is majdnem mindenütt differenciálhatóak. Ebben a szakaszban röviden tanulmányozzuk ezeket a függvényeket.

Definíció. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *korlátos változású*¹⁷, ha van olyan A szám, hogy

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq A$$

minden I -beli véges $x_0 < \dots < x_n$ pontsorozatra.

A legkisebb ilyen A számot f teljes változásának hívjuk.

Megjegyzések.

- Korlátos I intervallum esetén f pontosan akkor korlátos változású, ha rektifikálható, vagyis ha a gráfja véges ívhosszúságú.

¹⁷ Jordan 1881.

- Minden monoton, korlátos függvény korlátos változású.
- A korlátos változású függvények vektorteret alkotnak.

Az utóbbi megjegyzések alapján két monoton, korlátos függvény különbsége korlátos változású. Ennek a megfordítása is igaz:

16.11. Állítás. (Jordan¹⁸) Minden korlátos változású függvény előállítható két monoton növekvő és korlátos függvény különbségeként.

Bizonyítás. Jegyezzük meg, hogy egy korlátos változású $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény bármely részintervallumra való leszűkítése is korlátos változású. Tetszőleges $x \in I$ -re jelöljük $g(x)$ -szel $f|_{I \cap (-\infty, x)}$ -re vett leszűkítésének a teljes változását. Akkor $0 \leq g \leq T$, ahol T az f függvény teljes változását jelöli I -n, úgyhogy g korlátos függvény.

Ha $y \in I$ és $x < y$, akkor $g(x) + |f(y) - f(x)| \leq g(y)$ a teljes változás definíciója alapján. Ebből következik, hogy g monoton növekvő, majd hogy $g - f$ is monoton növekvő, mert

$$\begin{aligned} (g - f)(y) - (g - f)(x) &= (g(y) - g(x)) - (f(y) - f(x)) \\ &\geq (g(y) - g(x)) - |f(y) - f(x)| \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Mivel f és g korlátos, $h := g - f$ is az. Az $f = g - h$ előállítás tehát rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. \square

Megjegyzés. Jordan tételéből azonnal következik, hogy minden korlátos változású $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény korlátos, és \bar{I} minden pontjában véges bal- és jobboldali határértékkel rendelkezik.

¹⁸ Jordan 1881.

17. fejezet

Lebesgue-integrál \mathbb{R} -en

Rémülettel és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk!

Ch. Hermite

Régebben, ha egy új függvényt felfedeztek, ezt valami gyakorlati célból tették; ma kimondottan azért találják fel ezeket, hogy atyáink következtetéseire rácsáfoljanak, s soha nem is fogják ezeket másra használni.

H. Poincaré

A Riemann-integrál két zavaró vonása, hogy sok fontos függvény nem integrálható, és bonyolultak a határátmenetről szóló tételek.

Példák.

- (Dirichlet-függvény¹) Az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ racionális;} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény nem Riemann-integrálható. Ugyanakkor $f = 0$ m.m., és természetes volna az $\int f \, dx := 0$ definíció.

- Rendezzük a racionális számokat egy (r_n) sorozatba. Akkor az

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x = r_1, \dots, r_n; \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvények Riemann-integrálhatóak, $\int f_n \, dx = 0$ minden n -re, és $f_n \rightarrow f$ mindenütt. Mégsem következik innen, hogy $\int f_n \, dx \rightarrow \int f \, dx$, hiszen $\int f \, dx$ nincs értelmezve.

¹ Dirichlet 1829, 131–132. o.

- Az (f_n) függvényt sorozat Cauchy-féle a Riemann-integrálható függvények vektortérében értelmezett $\|g\| := \int |g| dx$ normára nézve, azonban nem konvergens erre a normára nézve.

A Lebesgue-integrál kiküszöböli az ilyen jellegű nehézségeket: lényegesen több függvény integrálható, és nagyon hatékony határátmeneti tételek érvényesek. Az elmélet egyik kulcsa, hogy nem teszünk különbséget m.m. azonos függvények között:

Definíció. Az $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ és $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények *majdnem mindenütt egyenlők*, ha

$$D_1 \setminus D_2, \quad D_2 \setminus D_1 \quad \text{és} \quad \{x \in D_1 \cap D_2 : f_1(x) \neq f_2(x)\}$$

mind nullahalmazok.

Ez ekvivalenciareláció, amely kompatibilis a szokásos algebrai műveletekkel: ha $f_1 = g_1$ és $f_2 = g_2$ m.m., akkor

$$\begin{aligned} |f_1| &= |g_1| \quad \text{m.m.}, \\ f_1 \pm f_2 &= g_1 \pm g_2 \quad \text{m.m.}, \\ f_1 f_2 &= g_1 g_2 \quad \text{m.m.}, \\ \min\{f_1, f_2\} &= \min\{g_1, g_2\} \quad \text{m.m.}, \\ \max\{f_1, f_2\} &= \max\{g_1, g_2\} \quad \text{m.m.} \end{aligned}$$

Ha ráadásul $f_2 \neq 0$ m.m., akkor $f_1/f_2 = g_1/g_2$ m.m. Végül, ha $f_n \rightarrow f$ m.m., és $f_n = g_n$ m.m. minden n -re, akkor $g_n \rightarrow f$ -hez m.m. is igaz.²

A fentiek alapján gyakran azonosítjuk a m.m. egyenlő függvényeket.

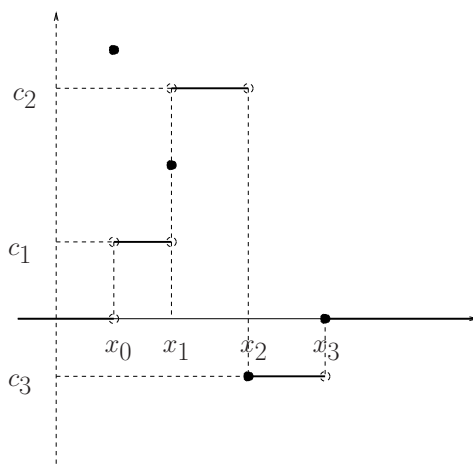
17.1. Lépcsős függvények

Definíció. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *lépcsős függvény*, ha alkalmas

$$-\infty < x_0 < \cdots < x_n < \infty$$

pontokkal és c_1, \dots, c_n valós számokkal m.m. fennáll a következő egyenlőség:

² Itt lényeges, hogy a nullahalmazok definíciójában *megszámlálható* befedéseket használtunk.



17.1. ábra. Lépcsős függvény

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < x_0, \\ c_1 & \text{ha } x_0 < x < x_1, \\ \dots & \\ c_n & \text{ha } x_{n-1} < x < x_n, \\ 0 & \text{ha } x_n < x. \end{cases}$$

(Lásd a 17.1 ábrát.) A lépcsős függvények osztályát C_0 -al jelöljük.

Megjegyzések.

- A definícióban mindig hozzávehetünk véges sok, tetszőlegesen választott x_i pontot. Következésképpen véges sok adott lépcsős függvény esetén mindig feltehető, hogy ugyanazokkal az x_i pontokkal vannak definiálva.
- Adott x_i pontok esetén a hozzá tartozó c_i értékek viszont egyértelműen meg vannak határozva, mert a nem-degenerált intervallumok nem nullahalmazok.

Definíció. A lépcsős függvények *integrálját* az

$$\int \varphi \, dx := \sum_{i=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$$

képlettel értelmezzük.

A definíció korrektségének az igazolása előtt vezessünk be két hasznos fogalmat:

Definíciók. A C vektortér *vektorháló*, ha

$$\varphi, \psi \in C \implies \max\{\varphi, \psi\}, \min\{\varphi, \psi\} \in C.$$

A C vektorhálón értelmezett $L : C \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál *pozitív*, ha

$$\varphi \geq 0 \implies L\varphi \geq 0.$$

Megjegyzések.

- A $|\varphi| = \max\{\varphi, -\varphi\}$ és

$$\max\{\varphi, \psi\} = \frac{\varphi + \psi + |\varphi - \psi|}{2}, \quad \min\{\varphi, \psi\} = \frac{\varphi + \psi - |\varphi - \psi|}{2}$$

összefüggések segítségével könnyen látható, hogy a C vektortér pontosan akkor vektorháló, ha

$$\varphi \in C \implies |\varphi| \in C.$$

- Minden pozitív lineáris funkcionál *monoton* is: ha $\varphi \geq \psi$, akkor $L\varphi \geq L\psi$.

A lépcsős függvények definícióját követő megjegyzés segítségével igazolható a következő

17.1. Állítás.

- (a) C_0 vektorháló.
 (b) A lépcsős függvények integrálja független az x_i pontok speciális választásától.
 (c) A lépcsős függvények integrálja pozitív lineáris funkcionál C_0 -on.

A következő két „ártatlan” segédétel Riesz-től származik. Mint látni fogjuk, rajtuk alapul szinte az egész Lebesgue-féle elmélet.

Az első Dini egyik klasszikus tételének³ elemi változata:

17.2. Lemma. Ha lépcsős függvények (φ_n) sorozatára $\varphi_n(x) \searrow 0$ m.m., akkor $\int \varphi_n dx \rightarrow 0$.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $[a, b]$ kompakt intervallumot és egy olyan $M > 0$ számot, hogy $\varphi_1 = 0$ $[a, b]$ -n kívül, $\varphi_1 < M$ $[a, b]$ -ben. Szükség esetén alkalmas nullahalmazon megváltoztatva a φ_n függvények értékét feltehető, hogy mind eltűnnek $[a, b]$ -n kívül.

³ Lásd a 20.24 állítást, 246. o.

Rögzítsünk egy tetszőlegesen kis $\varepsilon > 0$ számot. Alkalmas E nullahalmazon kívül a φ_n függvények mindegyike folytonos, és a sorozatuk nullához tart. Fedjük be E -t $\varepsilon/(2M)$ -nél kisebb összhosszúságú, megszámlálható, nyílt $\{I\}$ intervallumrendszerrel.

Ha $x_0 \notin E$, akkor $\varphi_n(x_0) \rightarrow 0$, és így alkalmas n_0 indexre

$$\varphi_{n_0}(x_0) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Mínt hogy φ_{n_0} folytonos x_0 -ban,

$$\varphi_{n_0}(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

valamely x_0 -t tartalmazó $J = J(x_0)$ nyílt intervallum minden pontjában. Végül, a (φ_n) sorozat monoton fogyása miatt

$$\varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

minden $x \in J$ -re és $n \geq n_0$ -ra.

A *kompakt* $[a, b]$ intervallum befedhető véges sok ilyen I és J intervallummal. Jelöljük N -nel a kiválasztott J intervallumokhoz tartozó n_0 indexek legnagyobbikát, és A -val ezen J intervallumok egyesítését. Akkor

$$\varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

minden $x \in A$ -ra és $n \geq N$ -re. Következésképpen a $\varphi_n \chi_A$ lépcsős függvény integrálja, ahol χ_A az A halmaz *karakterisztikus függvényé*⁴ jelöli, legfeljebb $\varepsilon/2$.

Az $[a, b]$ intervallum megmaradó része véges sok zárt intervallum egyesítése, amelyeket befednek a kiválasztott I intervallumok. Mínt hogy az utóbbiak összhosszúsága $\varepsilon/(2M)$ -nél kisebb, $\varphi_n(1 - \chi_A)$ integrálja is legfeljebb $\varepsilon/2$.

A két egyenlőséget összeadva kapjuk, hogy

$$0 \leq \int \varphi_n dx \leq \varepsilon$$

minden $n \geq N$ -re. □

A következő eredménynél sokkal többet igazolunk később.⁵

⁴ de la Vallée Poussin 1915 (440. o.): $\chi_A := 1$ A -n, és $\chi_A := 0$ A -n kívül.

⁵ Lásd Beppo Levi tételét, 148. o.

17.3. Lemma. *Tekintsük lépcsős függvények m.m. monoton növekvő (φ_n) sorozatát. Ha az integráljaik sorozata felülről korlátos, akkor a függvénytársorozatnak m.m. véges határértéke van.*

Megjegyzés. A 17.1 állítás miatt az $\int \varphi_n dx$ integrálok sorozata monoton növekvő is, tehát konvergens.

Bizonyítás. Szükség esetén φ_n -et $\varphi_n - \varphi_1$ -re cserélve feltehető, hogy a φ_n függvények nem-negatívak. Meg kell mutatnunk, hogy a $\varphi_n(x) \rightarrow \infty$ tulajdonságú pontok E_0 halmaza nullahalmaz.

Legyen $\int f_n dx \leq A$ minden n -re. Tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ -ra jelöljük $E_{\varepsilon,n}$ -nel a $\varphi_n(x) > A/\varepsilon$ tulajdonságú pontok halmazát, $n = 1, 2, \dots$. Minthogy $E_\varepsilon := \cup E_{\varepsilon,n}$ tartalmazza E_0 -t, elegendő E_ε -t befedni legfeljebb ε összhosszúságú, megszámlálható intervallumrendszerrel.

Az $(E_{\varepsilon,n})$ halmazsorozat monoton növekvő a (φ_n) sorozat hasonló tulajdonsága miatt. Következésképpen $E_{\varepsilon,1}$ és valamennyi $E_{\varepsilon,n} \setminus E_{\varepsilon,n-1}$ különbség véges sok páronként diszjunkt intervallum egyesítése, mondjuk

$$E_{\varepsilon,1} = \bigcup_{k=1}^{K_1} I_{1k}$$

és

$$E_{\varepsilon,n} \setminus E_{\varepsilon,n-1} = \bigcup_{k=1}^{K_n} I_{nk}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ezen intervallumok összessége befedti E_ε -t. Továbbá az összhosszúságuk legfeljebb ε , mert

$$\sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{K_n} \frac{A}{\varepsilon} |I_{nk}| \leq \int_{E_{\varepsilon,1}} \varphi_1 dx + \sum_{n=2}^m \int_{E_{\varepsilon,n} \setminus E_{\varepsilon,n-1}} \varphi_n dx \leq \int \varphi_m dx \leq A$$

minden m -re. □

17.2. Integrálható függvények

Két lépésben kibővítjük az integrálható függvények osztályát. Az első lépés a 17.2 és 17.3 lemmán alapul:

Definíció. Jelöljük C_1 -gyel a 17.3 lemmabeli (φ_n) függvénysorozatok f határfüggvényeinek a halmazát, és értelmezzük egy ilyen függvény *integrálját* az

$$\int f \, dx := \lim \int \varphi_n \, dx$$

képlettel.

A definíció korrektségének az igazolásához fogadjuk el egyelőre az alábbi segédételt:

17.4. Lemma. Ha a (φ_n) , (ψ_n) lépcsős függvénysorozatokra $\varphi_n \nearrow f$, $\psi_n \nearrow g$ és $f \leq g$ m.m., akkor

$$\lim \int \varphi_n \, dx \leq \lim \int \psi_n \, dx.$$

17.5. Állítás.

- (a) Az integrál nem függ a (φ_n) sorozat speciális választásától.
- (b) Ha $f \in C_0$, akkor az integrál két definíciója ugyanazt az értéket szolgáltatja.
- (c) Ha $f \in C_1$ és $f = g$ m.m., akkor $g \in C_1$ és $\int f \, dx = \int g \, dx$.
- (d) Ha $f, g \in C_1$ és $f \leq g$ m.m., akkor

$$\int f \, dx \leq \int g \, dx.$$

- (e) Ha $f, g \in C_1$, akkor $\max\{f, g\} \in C_1$ és $\min\{f, g\} \in C_1$.
- (f) Ha $f, g \in C_1$, akkor $f + g \in C_1$, és

$$\int (f + g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx.$$

- (g) Ha $f \in C_1$ és c nem-negatív valós szám, akkor $cf \in C_1$ és

$$\int cf \, dx = c \int f \, dx.$$

Bizonyítás.

- (a) Alkalmazzuk az előző lemmát $f = g$ -vel.
- (b) Legyen $\varphi_n = f$ minden n -re.

(c) Ha f integrálját a (φ_n) sorozat segítségével definiáljuk, akkor $\varphi_n \rightarrow g$ m.m. is teljesül.

(d) Ez az az előző lemma átfogalmazása.

(e), (f) és (g) Ha f és g integrálját a (φ_n) és (ψ_n) sorozatok segítségével definiáljuk, akkor a

$$\max\{\varphi_n, \psi_n\}, \quad \min\{\varphi_n, \psi_n\}, \quad \varphi_n + \psi_n, \quad c\varphi_n$$

képletekkel adott sorozatok is eleget tesznek a 17.3 lemmabeli feltételeknek, és rendre a $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f + g$ és cf függvényekhez tartanak m.m. Az (f), (g)-beli egyenlőségek következnek a lépcsős függvényekre érvényes hasonló egyenlőségekből. \square

A 17.4 lemma bizonyítása. Elegendő megmutatni teszőlegesen rögzített m -re az

$$\int \varphi_m dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dx,$$

vagy ekvivalens módon a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_m - \psi_n dx \leq 0$$

egyenlőtlenséget. A lemma innen $m \rightarrow \infty$ esetén következik.

Ehelyett megmutatjuk az erősebb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (\varphi_m - \psi_n)^+ dx \leq 0$$

relációt, ahol

$$(\varphi_m - \psi_n)^+ := \max\{\varphi_m - \psi_n, 0\}$$

a $\varphi_m - \psi_n$ függvény pozitív részét jelöli. Ehhez elegendő észrevennünk, hogy az $n \mapsto (\varphi_m - \psi_n)^+$ sorozat eleget tesz a 17.2 lemma feltételeinek. \square

Második lépésben kiterjesztjük az integrált a C_1 által generált vektortérre:

Definíció. Az f függvény integrálható, ha alkalmas $f_1, f_2 \in C_1$ -re $f = f_1 - f_2$ m.m. Ilyenkor f integrálját az

$$\int f dx := \int f_1 dx - \int f_2 dx$$

képlettel értelmezzük. Gyakran $\int f(x) dx$ -et is írunk $\int f dx$ helyett.

Az integrálható függvények halmazát C_2 -vel jelöljük.

17.6. Állítás.

(a) C_2 vektorháló.

(b) A C_2 -beli függvények integrálja nem függ az $f = f_1 - f_2$ felbontás speciális választásától.

(c) Ha $f \in C_2$ és $f = g$ m.m., akkor $g \in C_2$, és $\int f \, dx = \int g \, dx$.

(d) Az integrál pozitív lineáris funkcionál C_2 -n.

Bizonyítás.

(a) Legyen $f = f_1 - f_2$ és $g = g_1 - g_2$ m.m., ahol $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$, és legyen c nem-negatív szám. Felhasználva az előző állítást a m.m. érvényes

$$f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2),$$

$$cf = cf_1 - cf_2,$$

$$-cf = cf_2 - cf_1,$$

$$|f| = \max\{f_1, f_2\} - \min\{f_1, f_2\}$$

egyenlőségekből következik, hogy $f + g$, cf , $-cf$ és $|f|$ integrálhatók.

(b) Ha $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ m.m., ahol $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$, akkor $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ m.m., és így

$$\int f_1 \, dx + \int g_2 \, dx = \int f_1 + g_2 \, dx = \int f_2 + g_1 \, dx = \int f_2 \, dx + \int g_1 \, dx$$

a 17.5 állítás alapján. Következésképpen

$$\int f_1 \, dx - \int f_2 \, dx = \int g_1 \, dx - \int g_2 \, dx.$$

(c) Ha $f = f_1 - f_2$ m.m., ahol $f_1, f_2 \in C_1$, akkor $g = f_1 - f_2$ is teljesül m.m.

(d) Ez a 17.5 állítás (d), (f), (g) részeiből és az integrál definíciójából következik. \square

17.3. Beppo Levi tétele

Az előző szakaszban az integrált mint a C_0 vektorhálón értelmezett pozitív lineáris funkcionált kiterjesztettük a bővebb C_2 vektorhálón értelmezett pozitív lineáris funkcionállá. Természetes gondolat, hogy próbáljuk meg az integrál további kiterjesztését ennek az eljárásnak a megismétlésével. A következő meglepő és fontos tétel szerint azonban így nem kapunk újabb integrálható függvényeket:

17.7. Tétel. (Beppo Levi⁶) Tekintsük integrálható függvények m.m. monoton növekvő (f_n) sorozatát. Ha az integrálok sorozata felülről korlátos, akkor (f_n) m.m. konvergál egy integrálható f függvényhez, és

$$\int f_n dx \rightarrow \int f dx. \quad (17.1)$$

Megjegyzés. Igen lényeges itt a m.m. való konvergencia használata: Baire nevezetes eredményei szerint⁷ az analóg konstrukció a végtelenségig folytatható, ha a *mindenütt* való konvergenciát tekintjük.

A tételt két lépésben igazoljuk.

Bizonyítás az $(f_n) \subset C_1$ esetben. Legyen

$$\int f_n dx \leq A$$

minden n -re. Rögzítsünk minden n -re egy m.m. monoton növekvő, f_n -hez tartó (φ_{nk}) lépcsős függvénsorozatot. Akkor a

$$\varphi_n := \sup_{i,k \leq n} \varphi_{ik}$$

képlet olyan, m.m. monoton növekvő, lépcsős függvénsorozatot definiál, hogy

$$\int \varphi_n dx \leq A$$

minden n -re, hiszen $\varphi_{ik} \leq f_i \leq f_n$ minden $i, k \leq n$ esetén, és így $\varphi_n \leq f_n$. A 17.3 lemma alapján $\varphi_n \rightarrow f$ m.m. valamely alkalmas $f \in C_1$ függvényre, és

$$\int \varphi_n dx \rightarrow \int f dx. \quad (17.2)$$

Míthogy $\varphi_{nk} \leq \varphi_k$ m.m. minden $k \geq n$ -re, $k \rightarrow \infty$ esetén innen $f_n \leq f$ m.m. minden n -re. Integrálva a $\varphi_n \leq f_n \leq f$ egyenlőtlenséget, majd felhasználva (17.2)-t a (17.1) relációt kapjuk. \square

Megjegyzés. Hangsúlyozzuk, hogy a most vizsgált speciális esetben az f határfüggvény nemcsak integrálható, de C_1 -beli is. Ezt fel fogjuk használni az általános eset bizonyítása során.

Szükségünk lesz a következő lemmára is:

⁶ Beppo Levi 1906.

⁷ Baire 1898, 1899.

17.8. Lemma. *Tetszőleges nem-negatív $f \in C_2$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz vannak olyan nem-negatív $f_1, f_2 \in C_1$ függvények, hogy $f = f_1 - f_2$ és $\int f_2 dx < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Legyen $f = g_1 - g_2$, ahol $g_1, g_2 \in C_1$. Válasszunk olyan (φ_n) lépcsős függvénysorozatot, amelyre $\varphi_n \nearrow g_2$ m.m. Akkor

$$\int \varphi_n dx \rightarrow \int g_2 dx,$$

és így

$$\int g_2 - \varphi_n dx < \varepsilon,$$

ha n elég nagy. Mivel $-\varphi_n \in C_0 \subset C_1$, az $f_1 := g_1 - \varphi_n$ és $f_2 := g_2 - \varphi_n$ függvények C_1 -beliek. Továbbá $f = f_1 - f_2$ és $\int f_2 dx < \varepsilon$. Végül $f_2 = g_2 - \varphi_n \geq 0$, mert a (φ_n) sorozat monoton növekvő, és $f_1 = f + f_2 \geq 0$, hiszen két nem-negatív függvény összege. \square

A 17.7 tétel bizonyítása az általános esetben. Alkalmazva az $f_{n+1} - f_n$ különbségekre az előző lemmát olyan nem-negatív $g_n, h_n \in C_1$ függvényekhez jutunk, amelyekre

$$f_{n+1} - f_n = g_n - h_n \quad \text{és} \quad \int h_n dx < 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Akkor

$$\int h_1 + \dots + h_n dx < 1$$

minden n -re. Alkalmazva a tétel már bizonyított részét a $\sum h_i$ sor m.m. konvergál valamely $h \in C_1$ függvényhez, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int h_n dx = \int h dx.$$

Következésképpen, feltéve újból, hogy

$$\int f_n dx \leq A$$

minden n -re, fennállnak az

$$\int g_1 + \dots + g_{n-1} dx = \int f_n - f_1 + h_1 + \dots + h_{n-1} dx < A + 1 - \int f_1 dx$$

egyenlőtlenségek is. Alkalmazva ismét a tétel már bizonyított részét a $\sum g_i$ sor m.m. konvergál valamely $g \in C_1$ függvényhez, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n dx = \int g dx.$$

A két sor különbségét képezve adódik, hogy

$$(g_1 + \cdots + g_{n-1}) - (h_1 + \cdots + h_{n-1}) = f_n - f_1$$

m.m. konvergál $g - h \in C_2$ -hez, és

$$\int f_n - f_1 dx \rightarrow \int g - h dx.$$

Következésképpen f_n m.m. konvergál $f_1 + g - h \in C_2$ -hez, és teljesül a (17.1) reláció. \square

Említsük meg a tétel néhány fontos következményét:

17.9. Következmény.

(a) Ha integrálható függvények monoton növekvő (f_n) sorozata m.m. konvergál valamely integrálható f függvényhez, akkor

$$\int f_n dx \rightarrow \int f dx.$$

(b) Ha (f_n) integrálható függvények olyan sorozata, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| dx$$

numerikus sor konvergens, akkor a $\sum f_n$ függvénytör sor m.m. konvergál valamely integrálható f függvényhez, és szabad a sort tagonként integrálni:

$$\int f dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx.$$

(c) Ha f integrálható és $\int |f| dx = 0$, akkor $f = 0$ m.m.

Bizonyítás.

(a) Az $A := \int f dx$ szám valamennyi $\int f_n dx$ integrálnak felső korlátja.

(b) Ha az f_n függvények nem-negatívak, akkor a $\sum f_n$ részletösszegei eleget tesznek a Beppo Levi tétel feltételeinek. Az általános esetben tekintsük helyette a $\sum f_n^+$ és $\sum f_n^-$ sorokat, ahol

$$f_n^+ := \max\{f_n, 0\} \quad \text{és} \quad f_n^- := \max\{-f_n, 0\}$$

az f_n függvények *pozitív* és *negatív részét* jelölik: $f_n^\pm \geq 0$ és $f_n = f_n^+ - f_n^-$ m.m.

(c) Alkalmazzuk (b)-t az $f_n := f$ választással minden n -re. \square

17.4. Lebesgue, Fatou és Riesz–Fischer tételei

Ha $f_n \rightarrow f$ m.m., de az (f_n) függvénysorozat nem monoton, akkor az

$$\int f_n dx \rightarrow \int f dx$$

reláció fennállásához további feltevések szükségesek. A következő alapvető tétel egyidejűleg általánosítja és egyszerűsíti Arzelà-nak és Osgood-nak a Riemann-integrálra vonatkozó korábbi eredményeit ⁸:

17.10. Tétel. (Lebesgue⁹) Legyen (f_n) integrálható függvények olyan sorozata, hogy $f_n \rightarrow f$ m.m. Ha van olyan g integrálható függvény, hogy $|f_n| \leq g$ m.m. minden n -re, akkor f integrálható, és

$$\int f_n dx \rightarrow \int f dx. \quad (17.3)$$

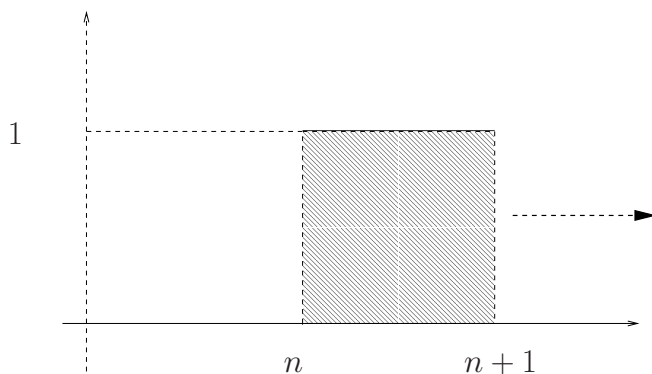
A g függvényt az (f_n) sorozat *integrálható majoránsának* hívjuk.

Példák. Az integrálható majoráns létezésének a feltétele nem hagyható el:

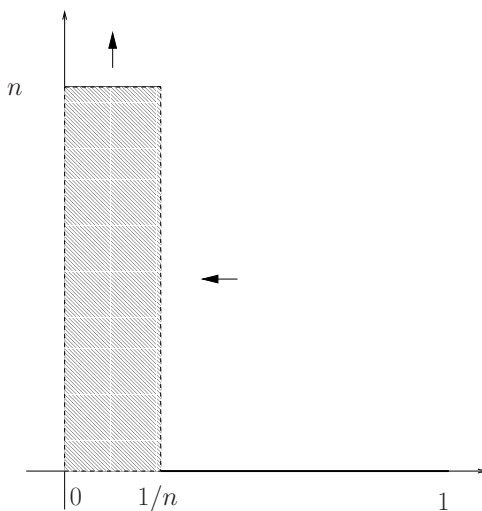
- Ha f_n az $[n, n+1]$ intervallum karakterisztikus függvénye, akkor $f_n \rightarrow 0$ mindenütt, de $\int f_n dx = 1$ minden n -re, és így nem konvergál $\int 0 dx = 0$ -hoz. (Lásd a 17.2 ábrát.)
- Legyen $f_n(x) = n$, ha $0 < x < n^{-1}$, és $f_n(x) = 0$ egyébként. Akkor $f_n \rightarrow 0$ mindenütt, de $\int f_n dx = 1$ minden n -re, és így nem konvergál $\int 0 dx = 0$ -hoz. (Lásd a 17.3 ábrát.)

⁸ Arzelà 1885, 1900 (723–724. o.), Osgood 1897 (183–189. o.).

⁹ Lebesgue 1902 (egyenletesen korlátos függvénysorozatra), 1908 (általános eset, 9–10. o.).



17.2. ábra. Nem majorált sorozat



17.3. ábra. Nem majorált sorozat

Bizonyítás. Vezessük be minden rögzített n természetes számra a

$$g_n := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$$

és

$$g_{nm} := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_m\}, \quad m = n, n+1, \dots$$

függvényeket. A g_{nm} függvények integrálhatók, és integráljaiknak $\int g \, dx$ felső korlátja, hiszen $|g_{nm}| \leq g$ m.m. minden m -re. Minthogy $g_{nm} \nearrow g_n$ m.m., Beppo Levi tétele szerint g_n integrálható.

Vegyük észre, hogy $g_n \searrow f$ m.m., és hogy a g_n függvények integráljainak $\int g \, dx$ felső korlátja, hiszen $|g_n| \leq g$ m.m. minden m -re. Alkalmazva Beppo Levi tételét a $(-g_n)$ függvénysorozatra megállapíthatjuk, hogy f integrálható, és

$$\int g_n \, dx \rightarrow \int f \, dx.$$

Hasonlóan, a

$$h_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$$

függvényekre $h_n \nearrow f$ m.m., és

$$\int h_n \, dx \rightarrow \int f \, dx.$$

Mivel $h_n \leq f_n \leq g_n$ m.m., és így

$$\int h_n \, dx \leq \int f_n \, dx \leq \int g_n \, dx,$$

(17.3) következik a fenti két konvergenciarelációból. □

Kombináljuk Beppo Levi és Lebesgue tételeinek a feltételeit:

17.11. Tétel. (Fatou-lemma¹⁰) Legyen (f_n) nem-negatív, integrálható függvények olyan sorozata, hogy $f_n \rightarrow f$ m.m. Ha az $\int f_n \, dx$ integrálok sorozata felülről korlátos, akkor f integrálható, és

$$\int f \, dx \leq \liminf \int f_n \, dx.$$

Megjegyzés. Az előző példák mutatják, hogy általában nem áll fenn egyenlőség a fenti relációban. Erre a kérdésre később visszatérünk.¹¹

Bizonyítás. Vezessük be ismét a

$$h_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

függvényeket. Az f_n függvények nem-negativitása folytán alkalmazhatjuk Beppo Levi tételét, úgyhogy a h_n függvények integrálhatók.

¹⁰ Fatou 1906, 375. o.

¹¹ Lásd a 22.1 és 22.6 állítások (c) részét, 286. és 294. o.

Minthogy $0 \leq h_n \leq f_n$ m.m.,

$$0 \leq \int h_n dx \leq \int f_n dx$$

minden n -re. A tétel feltevéséből következik tehát, hogy az $\int h_n dx$ integrálok sorozata korlátos. Minthogy továbbá $h_n \nearrow f$ m.m., Beppo Levi tételének újabb alkalmazásával f integrálható, és $\int h_n dx \rightarrow \int f dx$. \square

A következő alapvető tétel szerint az integrálható függvények körében érvényes a Cauchy-kritérium:

17.12. Tétel. (Riesz–Fischer¹²) Legyen (f_n) integrálható függvények olyan sorozata, hogy

$$\int |f_m - f_n| dx \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Akkor létezik olyan integrálható f függvény, hogy

$$\int |f_n - f| dx \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty.$$

Definíció. Ha azonosítjuk a m.m. egyenlő, integrálható függvényeket, akkor olyan L^1 vektortérhez jutunk, amelyen a

$$\|f\|_1 := \int |f| dx$$

képlet normát definiál.

A fenti tétel szerint ez a norma teljes, tehát L^1 Banach-tér.

Igazoljunk először egy segédtelet:

17.13. Lemma. (Riesz¹³) Legyen (f_n) integrálható függvények olyan sorozata, hogy

$$\int |f_m - f_n| dx \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Akkor létezik olyan (f_{n_k}) részsorozat, hogy alkalmas integrálható f, g függvényekkel $|f_{n_k}| \leq g$ m.m. minden k -ra, és $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m.

¹² Riesz 1907 (három cikk) és Fischer 1907 a rokon L^2 térre, Riesz 1909 és 1910 (három cikk az általánosabb L^p terekre). Lásd a 21 fejezetet, 254. o.

¹³ Riesz 1909.

Bizonyítás. Válasszunk olyan (f_{n_k}) részsorozatot, hogy

$$\int |f_n - f_{n_k}| dx \leq 2^{-k} \quad \text{minden } n \geq n_k\text{-ra, } k = 1, 2, \dots$$

Minthogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty,$$

a 17.9 következmény szerint (150. o.) az

$$|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad \text{és} \quad f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$$

függvénysorok m.m. konvergálnak, és a g, f összegfüggvények integrálhatók. Alkalmazva az első sor részletösszegeire a háromszög-egyenlőtlenséget megkapjuk a $|f_{n_k}| \leq g$ m.m. becsléseket, a második sor összegének definíciója alapján pedig $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m. \square

A 17.12 tétel bizonyítása. Az előző lemma szerint létezik olyan (f_{n_k}) részsorozat és olyan integrálható f függvény, hogy $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m.

Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk olyan nagy N -et, hogy

$$\int |f_m - f_n| dx < \varepsilon$$

minden $m, n \geq N$ -re. Legyen $n = n_k$, akkor $k \rightarrow \infty$ esetén a Fatou lemma alapján

$$\int |f_m - f| dx \leq \varepsilon$$

minden $m \geq N$ -re. \square

Befejezésül ismertetjük a Lebesgue-tétel két további fontos alkalmazását. Az első szerint a lépcsős függvények sűrűek a fent bevezetett L^1 normált térben:

17.14. Állítás. Minden integrálható f függvényhez létezik olyan (φ_n) lépcsős függvénsorozat, hogy $\int |f - \varphi_n| dx \rightarrow 0$.

Megjegyzés. Az előző lemma alapján alkalmas részsorozatra térve az is feltehető, hogy $\varphi_n \rightarrow f$ m.m., és alkalmas integrálható g függvénnyel $|\varphi_n| \leq g$ m.m. minden n -re. Az alábbi bizonyítás azonban közvetlenül ilyen függvénsorozatot fog szolgáltatni.

Bizonyítás. Legyen $f = g - h$, ahol $g, h \in C_1$, és válasszunk olyan $(\psi_n), (\varrho_n)$ lépcsős függvénysorozat, hogy $\psi_n \nearrow g$ és $\varrho_n \nearrow h$ m.m. Akkor a $\varphi_n := \psi_n - \varrho_n$ sorozat megfelel. Valóban,

$$\varphi_n \rightarrow g - h = f \quad \text{és} \quad |\varphi_n| \leq \max\{g - \varrho_1, h - \psi_1\}$$

m.m., mert $\psi_n - \varrho_n \leq g - \varrho_1$ és $\varrho_n - \psi_n \leq h - \psi_1$. Befejezésül alkalmazzuk a Lebesgue-féle konvergenciátételt. \square

Tanulmányozzuk végül a paraméteres integrálokat:

17.15. Állítás. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ahol I nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f(\cdot, t)$ minden rögzített $t \in I$ -re integrálható, és legyen

$$F(t) := \int f(x, t) dx, \quad t \in I.$$

(a) Tegyük fel, hogy valamely $t_0 \in I$ pontban $f(x, \cdot)$ m.m. x esetén folytonos. Ha létezik olyan integrálható $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy minden rögzített $t \in I$ -re

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{m.m. } x\text{-re,}$$

akkor F folytonos t_0 -ban.

(b) Tegyük fel, hogy $f(x, \cdot)$ differenciálható I -ben m.m. x esetén. Ha létezik olyan integrálható $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy minden rögzített $t \in I$ -re

$$|D_2 f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{m.m. } x\text{-re,}$$

akkor F differenciálható I -ben, és

$$F'(t) = \int D_2 f(x, t) dx \quad \text{minden } t \in I\text{-re.}$$

Bizonyítás.

(a) Elegendő megmutatnunk, hogy bármely I -beli, t_0 -hoz tartó (t_n) sorozatra $F(t_n) \rightarrow F(t_0)$. Bevezetve a $h_n(x) := f(x, t_n)$ és $h(x) := f(x, t_0)$ jelölést, ez az $\int h_n dx \rightarrow \int h dx$ relációval egyenértékű. A feltevésekből következik, hogy a h_n függvények integrálhatóak, $h_n \rightarrow h$ m.m., és hogy $|h_n| \leq g$ m.m. minden n -re. Alkalmazhatjuk tehát Lebesgue tételét.

(b) Rögzítsünk ismét egy I -beli $t_n \rightarrow t$ sorozatot. Bevezetve most a

$$h_n(x) := \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \quad \text{és} \quad h(x) := D_2 f(x, t)$$

függvényeket, a feltevéseink alapján $h_n \rightarrow h$ m.m., és $|h_n| \leq g$ m.m. minden n -re. (Itt alkalmaztuk a klasszikus Lagrange-féle középtértéktételt is.) Lebesgue tételét alkalmazva $\int h_n dx \rightarrow \int h dx$ adódik, vagyis

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \rightarrow \int D_2 f(x, t) dx. \quad \square$$

17.5. * Mérhető függvények és halmazok

Gyakran célszerű végtelen értékű integrálokat is értelmezni. Vezessük be ennek érdekében a következő fogalmat:

Definíció. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvény *mérhető*, ha létezik olyan (φ_n) lépcsős függvényt sorozat, hogy $\varphi_n \rightarrow f$ m.m.

Hangsúlyozzuk, hogy f végtelen értékeket is felvehet.

Példa. Minden folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mérhető, mert a

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(k/n) & \text{ha } k/n \leq x < (k+1)/n, -n^2 \leq k \leq n^2, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

képlet olyan lépcsős függvényt sorozatot definiál, amely *mindenütt* f -hez tart.

A következő állítás segítségével könnyen igazolható, hogy az analízisban előforduló $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények szinte mindig mérhetőek.¹⁴ Megvilágítjuk továbbá a mérhető és integrálható függvények kapcsolatát is.

17.16. Állítás.

- (a) Ha f mérhető és $f = g$ m.m., akkor g is mérhető.
 (b) Ha $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $F(0) = 0$, és f_1, \dots, f_N véges értékű, mérhető függvények, akkor a $h := F(f_1, \dots, f_N)$ összetett függvény is mérhető. Speciálisan, ha f és g véges értékű, mérhető függvények, akkor

$$|f|, \quad f + g, \quad f - g, \quad fg, \quad \max\{f, g\} \quad \text{és} \quad \min\{f, g\}$$

is mérhető.

- (c) Ha f mérhető és $f \neq 0$ m.m., akkor $1/f$ is mérhető.
 (d) Minden integrálható f függvény mérhető.

¹⁴ Ennél több is igaz: a kiválasztási axióma használata nélkül *lehetetlen* nem-mérhető függvények létezését igazolni: lásd a 162. oldali megjegyzést is.

- (e) Ha f mérhető, g integrálható, és $|f| \leq g$ m.m., akkor f integrálható.
- (f) Ha (f_n) mérhető függvényt sorozat, és $f_n \rightarrow f$ m.m., akkor f is mérhető.

Megjegyzések.

- Minthogy a konstans függvények folytonosak és így mérhetőek, az $F(0) = 0$ feltevés (b)-ben felesleges. Azért tettük fel mégis, hogy az állítás a 19. fejezet általánosabb keretei között is érvényben maradjon majd.
- A (b) tulajdonság általánosítható arra az esetre, amikor az f_1, \dots, f_N függvények végtelen értékeket is felvesznek, $F : \overline{\mathbb{R}}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pedig folytonos az (f_1, \dots, f_N) függvény értékkészletén.

Bizonyítás.

(a) A definíció egyenes következménye.

(b) Rögzítsünk minden f_k -hoz egy m.m. hozzá tartó (φ_{kn}) lépcsős függvényt sorozatot. Akkor a

$$\varphi_n(x) := F(\varphi_{1n}(x), \dots, \varphi_{Nn}(x))$$

képlet olyan (φ_n) lépcsős függvényt sorozatot definiál, amely m.m. h -hoz tart.

(c) Legyen (φ_n) m.m. f -hez tartó lépcsős függvényt sorozat. Akkor a

$$\psi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } \varphi_n(x) = 0, \\ 1/\varphi_n(x) & \text{egyébként} \end{cases}$$

képlet olyan (φ_n) lépcsős függvényt sorozatot definiál, amely m.m. $1/f$ -hez tart.

(d) Ha f integrálható, akkor a 17.14 állítás szerint létezik olyan (φ_n) lépcsős függvényt sorozat, hogy $\int |f - \varphi_n| dx \rightarrow 0$. A 17.13 lemma alapján alkalmas részsorozatra térve az is feltehető, hogy $\varphi_n \rightarrow f$ m.m.

(e) Ha (φ_n) m.m. f -hez tartó lépcsős függvényt sorozat, akkor az

$$f_n := \max\{-g, \min\{g, \varphi_n\}\}$$

függvények integrálhatóak, és $f_n \rightarrow f$ m.m. Továbbá $|f_n| \leq g$ m.m. minden n -re. Befejezésül alkalmazzuk a Lebesgue-tételt.

(f) Rögzítsünk egy *szigorúan pozitív*, integrálható $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt¹⁵, majd vezessük be a

$$g_n := \frac{hf_n}{h + |f_n|} \quad \text{és} \quad g := \frac{hf}{h + |f|}$$

függvényeket. Akkor g_n mérhető és $|g_n| < h$, úgyhogy g_n integrálható. Mivel $g_n \rightarrow g$ m.m., a Lebesgue-tétel alapján g is integrálható, tehát mérhető is. De akkor

$$f = \frac{hg}{h - |g|}$$

is mérhető. □

Rátérünk az integrál általánosítására. Emlékeztetünk arra, hogy az f függvény pozitív és negatív részét az

$$f_+ := \max\{f, 0\}, \quad f_- := \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\}$$

képletekkel definiáltuk, és hogy

$$f_+, f_- \geq 0, \quad f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_- \quad \text{és} \quad f_+ f_- = 0.$$

Ha f mérhető, akkor f_+ és f_- is mérhető.

Definíció. Legyen f mérhető függvény.

- Ha f nem-negatív m.m. és nem integrálható, akkor legyen $\int f \, dx = \infty$.
- Ha f_+ és f_- közül legalább az egyik integrálható, akkor legyen

$$\int f \, dx = \int f_+ \, dx - \int f_- \, dx.$$

Megjegyzés.

- Ha f_+ és f_- egyike sem integrálható, akkor a jobboldali összeg nincs értelmezve.
- Ha f integrálható, akkor f_+ és f_- is az, és az integrál linearitása folytán visszakapjuk a korábbi definíciót.
- Az „integrálható” jelzőt fenntartjuk arra az esetre, amikor az integrál véges.

A szokásos integrálási szabályok érvényben maradnak:

¹⁵ Legyen például $h(x) = 1/n^2$ ha $n - 1 \leq |x| < n$, $n = 1, 2, \dots$

17.17. Állítás.

(a) Ha $\int f \, dx$ létezik és $f = g$ m.m., akkor $\int g \, dx$ is létezik és $\int f \, dx = \int g \, dx$.

(b) Ha $\int f \, dx$ létezik és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\int cf \, dx$ is létezik és ¹⁶

$$\int cf \, dx = c \int f \, dx.$$

(c) Ha $\int f \, dx, \int g \, dx$ léteznek és $f \leq g$ m.m., akkor

$$\int f \, dx \leq \int g \, dx.$$

(d) Ha $\int f \, dx, \int g \, dx$ léteznek és az $\int f \, dx + \int g \, dx$ összeg értelmezve van, akkor $\int f + g \, dx$ is létezik, és

$$\int f + g \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx.$$

(e) (Általánosított Beppo Levi tétel) Ha az f_n függvények mérhetőek, m.m. nem-negatívak és $f_n \nearrow f$ m.m., akkor

$$\int f_n \, dx \rightarrow \int f \, dx.$$

(f) Ha a g_n függvények mérhetőek és m.m. nem-negatívak, akkor

$$\int (\sum g_n) \, dx = \sum \int g_n \, dx.$$

Bizonyítás.

(a) és (b) nyilvánvaló.

(c) Elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $\int g \, dx < \infty$ és $\int f \, dx > -\infty$, vagyis amikor g_+ és f_- integrálható. Akkor f_+ és g_- integrálható a 17.16 állítás (e) része miatt, hiszen

$$0 \leq f_+ \leq g_+ \quad \text{és} \quad 0 \leq g_- \leq f_-$$

m.m. Így f és g integrálható, úgyhogy a kívánt egyenlőtlenség a 17.6 állítás (d) részéből adódik (146. o.).

¹⁶ A $c = 0$ esethez fogadjuk el az integrálelméletben szokásos $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0$ konvenciót.

(d) Ha f és g nem-negatív m.m., akkor az egyenlőség az általánosított integrál definíciójából azonnal adódik. Az általános esetben vegyük észre, hogy

$$h := f_+ + g_+ - (f + g)_+ = f_- + g_- - (f + g)_-$$

mérhető és m.m. nem-negatív függvény; következésképpen

$$\int (f + g)_+ dx + \int h dx = \int f_+ dx + \int g_+ dx$$

és

$$\int (f + g)_- dx + \int h dx = \int f_- dx + \int g_- dx$$

az előző megjegyzésünk szerint. Ha megmutatjuk, hogy legalább az egyik sorban mind a négy integrál véges, akkor a két sor különbségét képezve a keresett egyenlőtlenséget kapjuk.

Ha például $\int f dx + \int g dx < \infty$ ($a > -\infty$ eset analóg), akkor f_+ és g_+ integrálható. Minthogy

$$0 \leq h \leq f_+ + g_+ \quad \text{és} \quad 0 \leq (f + g)_+ \leq f_+ + g_+$$

m.m., innen következik, hogy h és $(f + g)_+$ is integrálható.

(e) Az $\int f_n dx$ integrálok sorozata monoton növekvő (c) miatt. Ha korlátos is, akkor alkalmazhatjuk Beppo Levi tételét. Ellenkező esetben $\int f_n dx \rightarrow \infty$, és $\int f dx = \infty$ is, hiszen $f_n \leq f$ m.m., úgyhogy $\int f_n dx \leq \int f dx$ minden n -re.

(f) Alkalmazzuk (e)-t az $f_n := g_1 + \dots + g_n$ választással. \square

Általánosítsuk az intervallumok hosszának a fogalmát:

Definíció. Az A halmaz *mérhető*, ha a karakterisztikus függvénye mérhető; *Lebesgue-mértékén* a $\mu(A) := \int \chi_A dx \in [0, \infty]$ számot értjük.

Vezessük be még a kényelem kedvéért a következő fogalmat is:

Definíció. Az \mathcal{M} halmazrendszer σ -gyűrű¹⁷, ha eleget tesz a következő három feltételnek:

- $\emptyset \in \mathcal{M}$;
- ha $A, B \in \mathcal{M}$, akkor $A \setminus B \in \mathcal{M}$;
- ha (A_n) diszjunkt halmazsorozat \mathcal{M} -ben, akkor $\cup A_n \in \mathcal{M}$.

¹⁷ Fréchet 1915.

Megjegyzések.

- Itt és a továbbiakban a σ betű *megszámlálható egyesítésre* utal. Ha csak véges (A_n) sorozatokat szerepeltetünk a definícióban, akkor a *gyűrű* fogalmához jutunk; ezzel a fogalommal majd a 19.1. szakaszban foglalkozunk (178. o.).
- Ha \mathcal{M} σ -gyűrű, akkor $A := \cup A_n \in \mathcal{M}$ és $\cap A_n \in \mathcal{M}$ minden véges vagy végtelen $(A_n) \subset \mathcal{M}$ sorozatra. Valóban, végtelen sorozat esetén a

$$B_1 := A_1, \quad B_2 := A_2 \setminus A_1, \quad B_3 := A_3 \setminus (A_2 \cup A_1), \dots$$

formulák olyan *diszjunkt* $(B_n) \subset \mathcal{M}$ halmazsorozatot definiálnak, amelyre $A = \cup B_n$, úgyhogy

$$\cup A_n = \cup B_n \in \mathcal{M}.$$

A véges sorozatok esete erre visszavezethető, ha a sorozatot üres halmazokkal egészítjük ki. Ezek után a

$$\cap A_n = A \setminus \cup (A \setminus A_n)$$

formula segítségével látható, hogy $\cap A_n \in \mathcal{M}$.

Foglaljuk össze a Lebesgue-mérték alaptulajdonságait:

17.18. Állítás.

- (a) A mérhető halmazok \mathcal{M} rendszere σ -gyűrű.
- (b) A $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-mérték nem-negatív, és páronként diszjunkt mérhető halmazok bármely véges vagy megszámlálható (A_n) sorozatára fennáll a

$$\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$$

egyenlőség.

- (c) A nullahalmazok egybeesnek a nulla Lebesgue-mértékű halmazokkal.
- (d) A Lebesgue-mérték teljes a következő értelemben: a nulla Lebesgue-mértékű halmazok részhalmazai is mérhetőek (és nulla mértékűek).

Megjegyzés. Vitali¹⁸ bebizonyította, hogy léteznek nem-mérhető halmazok. Solovay¹⁹ azt is megmutatta, hogy ilyen halmazok létezése a kiválasztási axióma alkalmazása nélkül nem bizonyítható. A kiválasztási axióma alkalmazásával számos meglepő paradoxonhoz juthatunk.²⁰

Bizonyítás.

(a) A nulla függvény lépcsős függvény lévén integrálható, tehát $\emptyset \in \mathcal{M}$. Ha $A, B \in \mathcal{M}$, akkor $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$ mérhető az előző állítás (b) része miatt, úgyhogy $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

Ha $(A_n) \subset \mathcal{M}$ végtelen *diszjunkt* sorozat, és $A = \cup A_n$, akkor az $f_n := \chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n}$ véges összegek mérhetőek az előző állítás (b) része miatt, és $f_n \rightarrow \chi_A$ mindenütt. Az előző állítás (f) része miatt tehát χ_A mérhető. Így $A \in \mathcal{M}$.

(b) A $\mu(A) \geq 0$ et $\mu(\emptyset) = 0$ tulajdonságok nyilvánvalóak. Ha $(A_n) \subset \mathcal{M}$ végtelen *diszjunkt* sorozat, és $A = \cup A_n$, akkor az

$$\sum \chi_{A_n} = \chi_A$$

egyenlőségből az előző állítás (f) része miatt

$$\int \chi_A dx = \sum \int \chi_{A_n} dx$$

következik, vagyis

$$\mu(A) = \sum \int \mu(A_n).$$

(c) Ha A nullahalmaz, akkor $\chi_A = 0$ m.m., tehát $\int \chi_A dx = 0$ a 17.6 állítás (c) része miatt (146. o.). Más szóval $\mu(A) = 0$.

Megfordítva, ha $\mu(A) = 0$, akkor $\int \chi_A dx = 0$. A 17.9 következmény (c) része szerint (150. o.) innen $\chi_A = 0$ m.m., tehát A nullahalmaz.

(d) Ez (c)-ből következik, hiszen nullahalmaz részhalmazai is nullahalmazok (128. o.). \square

¹⁸ Vitali 1905a.

¹⁹ Solovay 1970.

²⁰ Lásd Banach 1923, Banach–Tarski 1924, Hausdorff 1914, Neumann 1929, Laczkovich 1990 munkáit, valamint Laczkovich 1998 és Wagon 1985 könyveit.

Fejezzük be ezt a fejezetet a mérhető függvények újabb jellemzésével. Vezessük be ehhez minden $c \in \overline{\mathbb{R}}$ -ra az f függvény alábbi *nívóhalmazait*:

$$\{f > c\} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\},$$

$$\{f \geq c\} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq c\},$$

$$\{f < c\} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\},$$

$$\{f \leq c\} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq c\}.$$

17.19. Állítás. Az f függvény pontosan akkor mérhető, ha az

$$\{f > c\}, \quad \{f < -c\}, \quad \{f \geq c\}, \quad \{f \leq -c\}$$

nívóhalmazok minden $0 < c < \infty$ -re mérhetőek.

Megjegyzés. Ha f mérhető, akkor a fenti *nívóhalmazok* \mathbb{R} mérhetősége folytán minden $c \in \overline{\mathbb{R}}$ -re is mérhetőek. Jelenlegi, gyengébb formájában az állítás a 19. fejezet általános keretei közt is érvényes lesz.

Bizonyítás. Ha f mérhető és $c > 0$, akkor a

$$\frac{\min\{f, c + n^{-1}\} - \min\{f, c\}}{n^{-1}} \quad \text{és} \quad \frac{\max\{f, -c\} - \max\{f, -c - n^{-1}\}}{n^{-1}}$$

függvények mérhetőek minden $n = 1, 2, \dots$ -re: alkalmazzuk a 17.16 állítás (b) részét. Minthogy a függvények m.m. az $\{f > c\}$ és $\{f \leq -c\}$ halmazok karakterisztikus függvényeihez tartanak, az utóbbiak is mérhetőek. Minthogy továbbá $-f$ függvény is mérhető, ebből következik az

$$\{f < -c\} = \{-f > c\} \quad \text{és} \quad \{f \geq c\} = \{-f \leq -c\}$$

halmazok mérhetősége is.

Megfordítva, ha az $\{f > c\}$ és $\{f < -c\}$ halmazok minden $c > 0$ -ra mérhetőek, akkor $h := 1/n$ jelöléssel az

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{ha } f(x) > n, \\ kh & \text{ha } kh < f(x) \leq (k+1)h, \quad k = 1, \dots, (n^2 - 1), \\ -kh & \text{ha } -(k+1)h \leq f(x) < -kh, \quad k = 1, \dots, (n^2 - 1), \\ -n & \text{ha } f(x) < -n, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

képlet mérhető függvényeket definiál, hiszen valamennyi f_n függvény a fenti típusú *nívóhalmazok* karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációja. Minthogy továbbá $f_n \rightarrow f$ m.m., innen f mérhetősége következik. \square

18. fejezet

* Általánosított Newton–Leibniz formula

Ha Newton és Leibniz azt gondolták volna, hogy a folytonos függvények nem feltétlenül differenciálhatóak — és hogy ez az általános eset —, nem találták volna fel a differenciálszámítást.

É. Picard

A klasszikus analízis egyik legfontosabb (ha nem a legfontosabb) tétele a Newton–Leibniz formula:

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a),$$

amely lehetővé teszi az integrálok egyszerű kiszámítását a primitív függvényük ismeretében. Ebben a fejezetben kiterjesztjük e formula érvényességét minden Lebesgue-integrálható függvényre.¹

A kényelem kedvéért ebben a fejezetben a bővített $\overline{\mathbb{R}}$ számegyenes *zárt* $[a, b]$ intervallumain értelmezett monoton növekvő függvényeket fogunk tekinteni, ahol $\overline{\mathbb{R}}$ a szokásos kompakt topológiával van ellátva. Megengedjük tehát az $a = -\infty$ és/vagy $b = \infty$ eseteket is. Vegyük észre, hogy egy monoton növekvő $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mindig korlátos.

Az előző fejezetben csak az egész számegyenesen vett integrálokkal foglalkoztunk. Vezessük most be az intervallumokon vett integrálokat is:

Definíció. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) függvény *integrálható az I intervallumon*, ha f értelmezve van I m.m. pontjában (tehát $I \setminus D$ nullahalmaz),

¹Még teljesebb eredményeket kapott Denjoy 1912, 1916 és Perron 1914 a Lebesgue-integrál további kiterjesztésével. Henstock 1955, 1961 és Kurzweil 1957 megmutatta, hogy e fogalomhoz a Riemann-integrál alkalmas módosításával is eljuthatunk. Lásd még Bartle 2001.

és ha a

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in I \cap D, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

képlettel értelmezett $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható. Ebben az esetben f integrálját I -n az

$$\int_I f \, dx := \int g \, dx$$

képlettel definiáljuk.

Megjegyzések.

- A 17.16 állítás (b) része alapján (157. o.) az integrálható függvények minden intervallumon is integrálhatóak.
- Minthogy a véges halmazok nullahalmazok, tetszőleges f függvény és $a \leq b$ számok esetén az

$$\int_{(a,b)} f \, dx, \quad \int_{(a,b]} f \, dx, \quad \int_{[a,b)} f \, dx, \quad \int_{[a,b]} f \, dx$$

integrálok egyszerre léteznek vagy nem léteznek, és az első esetben egyenlőek. Ezért a közös értéküket egyszerűen $\int_a^b f \, dx$ -szel jelöljük.

18.1. * Abszolút folytonosság

Ha f integrálható $[a, b]$ -ben, akkor integrálható $[a, b]$ minden részintervallumán is; bevezethető tehát f *határozatlan integrálja* az

$$F(y) := \int_a^y f \, dx, \quad a \leq y \leq b$$

képlettel. Vizsgáljuk meg a határozatlan integrálok tulajdonságait.

Definíció. Az I intervallumon értelmezett $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *abszolút folytonos*², ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely véges diszjunkt, δ -nál kisebb összhosszúságú $\{(a_k, b_k)\}$ nyílt intervallumrendszerre fennáll a

$$\sum |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

² Dini 1880 (24. o.), Harnack 1884 (220. o.), Lebesgue 1904 (128–129. o.), Vitali 1905b. Ekvivalens definícióhoz jutunk, ha véges helyett megszámlálható intervallumrendszereket használunk.

Megjegyzések.

- Minden Lipschitz-folytonos függvény abszolút folytonos. Másrészt az $F(x) := \sqrt{x}$ képlet olyan abszolút folytonos függvényt értelmez $[0, 1]$ -en, amelyik nem Lipschitz-folytonos.
- (Cantor-függvény³) Minden abszolút folytonos függvény egyenletesen folytonos. Tekintsük másrészt a Cantor-féle C triadikus halmazt (128. o.), és értelmezzük az $F : C \rightarrow [0, 1]$ függvényt az alábbi képlettel:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^{i+1}}.$$

Világos, hogy F szuperjektív, monoton növekvő és folytonos. (Lásd a 18.1 ábrát.) A Cantor-halmaz konstrukciója folytán $[0, 1] \setminus C$ megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum egyesítése. Ha (a, b) ilyen intervallum, akkor F szuperjektivitása miatt $F(a) = F(b)$. Legyen $F(x) := F(a)$ minden $a < x < b$ -re, akkor a kiterjesztett $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény kompakt halmazon értelmezett folytonos, tehát egyenletesen folytonos függvény. De F nem abszolút folytonos. Tekintsük ugyanis a C konstrukciója során bevezetett C_n halmazokat. Ezek mindegyike 2^n darab páronként diszjunkt, egyenként 3^{-n} hosszúságú $[a_i, b_i]$ intervallum egyesítése. Az F függvény értelmezése alapján $\sum F(b_i) - F(a_i) = 1$ minden n -re, annak ellenére, hogy az intervallumok $(2/3)^n$ összhosszúsága n növekedtével nullához tart.

- Ha I korlátos, akkor minden I -n értelmezett abszolút folytonos függvény korlátos változású. Az \mathbb{R} -en értelmezett $F(x) := x$ mutatja, hogy nem-korlátos intervallumokon ez általában nem igaz.

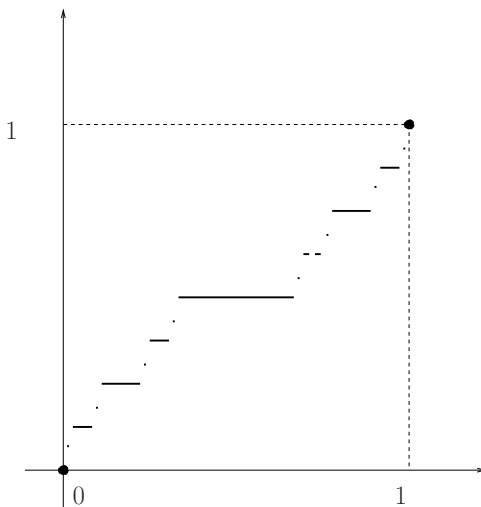
18.1. Állítás. Ha F az integrálható $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határozatlan integrálja, akkor⁴

- F abszolút folytonos;
- F korlátos változású;
- $F' = f$ m.m.

A (c) rész igazolásához fogadjuk el ideiglenesen a következőt:

³ Lebesgue 1904.

⁴ Lebesgue 1904, Vitali 1905b.



18.1. ábra. A Cantor-függvény

18.2. Állítás. (Fubini⁵) Ha a monoton növekvő függvényekből álló $\sum G_n$ sor m.m. konvergál valamely I intervallumon, akkor

$$\left(\sum G_n\right)' = \sum G_n' \quad \text{m.m. } I\text{-ben.} \quad (18.1)$$

A 18.1 állítás bizonyítása.

(a) Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz a 17.16 állítás (d) része alapján választható olyan φ lépcsős függvény, amelyre

$$\int_a^b |f - \varphi| dx < \varepsilon/2.$$

Rögzítsünk egy olyan A számot, hogy $|\varphi| < A$ m.m.

⁵ Fubini 1915.

Tekintsünk véges sok, páronként diszjunkt, $\delta := \varepsilon/2A$ -nál kisebb összhosszúságú (a_k, b_k) intervallumot $[a, b]$ -ben. Akkor

$$\begin{aligned} \sum |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum \left| \int_{a_k}^{b_k} f \, dx \right| \\ &\leq \sum \int_{a_k}^{b_k} |f - \varphi| \, dx + \sum \int_{a_k}^{b_k} |\varphi| \, dx \\ &\leq \int_a^b |f - \varphi| \, dx + A \sum (b_k - a_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + A\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát F abszolút folytonos.

(b) A nem-negatív

$$f_+ := \max\{f, 0\} \quad \text{és} \quad f_- := \max\{-f, 0\}$$

függvények integrálhatók, és $f = f_+ - f_-$. A határozatlan integráljaik korlátos, monoton növekvő függvények, így ezek F különbsége korlátos változású.

(c) Az állítás nyilvánvaló, ha f lépcsős függvény. Ha $f \in C_1$, akkor válasszunk egy m.m. f -hez tartó, monoton növekvő (f_n) lépcsős függvény-sorozatot. Ezek F_n határozatlan integráljaira $F'_n = f_n$ m.m. az előző megjegyzésünk szerint, továbbá $F_n \rightarrow F$ az integrál definíciója alapján.

A 18.2 állítást $G_n := F_{n+1} - F_n$ szereposztással alkalmazva $F'_n - F'_1 \rightarrow F' - F'_1$ m.m., vagyis $f_n \rightarrow f$ m.m. Másrészt $f_n \rightarrow f$ m.m., tehát $F' = f$ m.m.

Az általános eset abból következik, hogy minden integrálható függvény két C_1 -beli függvény különbsége. \square

A 18.2 állítás bizonyítása. Minthogy minden intervallum megszámlálható sok kompakt intervallum egyesítése, feltehető, hogy $I = [a, b]$ kompakt. Továbbá G_n -t $G_n - G_n(a)$ -re cserélve az is feltehető, hogy a G_n függvények nem-negatívak.

(a) Megmutatjuk, hogy a $\sum G'_n$ sor m.m. konvergens. Legyen $S_n = G_1 + \dots + G_n$, akkor

$$S_n \rightarrow S \quad [a, b]\text{-ben mindenütt}, \quad (18.2)$$

ahol $S := \sum G_n$.

Mínthogy az S_n és S függvények monoton növekvők, alkalmas nullahalmaztól eltekintve az S_n és S függvények $[a, b]$ minden pontjában differenciálhatóak. A $\sum G'_n(x)$ sor, vagyis az $(S'_n)(x)$ sorozat minden ilyen x pontban konvergens. Valóban, G_n monoton növekvő lévén

$$\frac{S_n(x+h) - S_n(x)}{h} \leq \frac{S_{n+1}(x+h) - S_{n+1}(x)}{h} \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

minden olyan h -ra, amelyre $x+h \in [a, b]$, és innen

$$S'_n(x) \leq S'_{n+1}(x) \leq S'(x) < \infty$$

minden n -re.

(b) A (18.1) reláció igazolásához elég ezek után olyan $n_1 < n_2 < \dots$ indexsorozatot találnunk, amelyre

$$S'(x) - S'_{n_k}(x) \rightarrow 0. \quad (18.3)$$

Válasszunk olyan n_k számokat, hogy $S(b) - S_{n_k}(b) < 2^{-k}$ minden k -ra; ez (18.2) lehetséges. Akkor a

$$\sum (S(b) - S_{n_k}(b))$$

sor konvergens. Mínthogy

$$0 \leq S(x) - S_{n_k}(x) \leq S(b) - S_{n_k}(b)$$

minden $a \leq x \leq b$ -re, innen következik, hogy a

$$\sum (S - S_{n_k})$$

sor az egész $[a, b]$ intervallumon konvergens.

Az utóbbi sor ugyanolyan alakú, mint $\sum G_n$. Alkalmazva rá a már bizonyított (a)-beli tulajdonságot, a

$$\sum (S' - S'_{n_k})$$

sor m.m. konvergens. De akkor az általános tagja m.m. nullához tart, tehát (18.3) teljesül. \square

Fubini tételének újabb alkalmazásához vezessük be egy halmaz pontbeli sűrűségét:

Definíció. Azt mondjuk, hogy a mérhető A halmaz d sűrűségű az $x \in \mathbb{R}$ pontban, ha bármely x -et tartalmazó, nem-degenerált (I_n) intervallumsorozatra

$$\frac{\mu(A \cap I_n)}{|I_n|} \rightarrow d \quad \text{ha} \quad |I_n| \rightarrow 0. \quad (18.4)$$

Világos, hogy $0 \leq d \leq 1$; például egy halmaz minden belső pontjában 1 sűrűségű. Ennél azonban lényegesen több is igaz:

18.3. Állítás. (Lebesgue⁶) *Tetszőleges mérhető A halmaz m.m. pontjában 1 sűrűségű.*

Bizonyítás. Lokális tulajdonságról lévén szó, feltehető, hogy A korlátos. Akkor χ_A integrálható, és az F határozatlan integráljára $F' = \chi_A$ m.m. a 18.1 állítás szerint (167. o.).

Az $F'(x) = \chi_A(x)$ egyenlőség azt jelenti, hogy (18.4) teljesül, ha x végpontja az I_n intervallumoknak. Az általános eset a minden $t, s > 0$ -ra érvényes

$$\frac{F(x+t) - F(x-s)}{t+s} = \frac{t}{t+s} \frac{F(x+t) - F(x)}{t} + \frac{s}{t+s} \frac{F(x) - F(x-s)}{s}$$

azonosságból következik, ha figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{t}{t+s} + \frac{s}{t+s} = 1. \quad \square$$

18.2. * Primitív függvény

A 18.1 állítás alapján természetes a következő

Definíció. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ -nek, ha F abszolút folytonos, korlátos változású, és $F' = f$ m.m.

Fennáll a Newton–Leibniz formula messzemenő általánosítása:

18.4. Tétel. (Lebesgue–Vitali⁷) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Pontosan akkor létezik f -nek primitív függvénye, ha integrálható.

(b) Ha F primitív függvénye f -nek, akkor

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a).$$

⁶ Lebesgue 1904, 123–124. o. A mértékelmélet felhasználásával közvetlen bizonyítást is adott Zajček 1979.

⁷ Lebesgue 1904, Vitali 1905. Tételük jelentősen továbbfejlesztette Darboux 1875 (111–112. o.) és Dini 1878 (sec. 197) korábbi eredményeit. Még teljesebb eredményre jutott később Denjoy 1912 (két közlemény), 1916; lásd például Natanson 1974, Bartle 2001.

A bizonyítást előkészítésére egészítsük ki Lebesgue differenciálhatósági tételét (129. o.):

18.5. Állítás.

- (a) Ha $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor F' integrálható.
 (b) Ha $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, akkor⁸

$$\int_a^b F' dx \leq F(b) - F(a).$$

Példák. Az abszolút folytonosság hiányában a fenti egyenlőtlenség helyett általában nem írható egyenlőség.

- A legegyszerűbb példa a nem-folytonos *előjel* függvény:

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}' dx = 0 < 2 = \operatorname{sgn}(1) - \operatorname{sgn}(-1).$$

- Az előző szakaszban bevezetett $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Cantor-függvény példája sokkal meglepőbb. Emlékeztetünk arra, hogy F folytonos, monoton növekvő és szuperjektív. Továbbá $F'(x) = 0$ m.m., hiszen konstrukciója folytán $F' = 0$ C komplementumán. Tehát⁹

$$\int_0^1 F' dx = 0 < 1 = F(1) - F(0).$$

- Léteznek folytonos és *szigorúan* monoton növekvő függvények is, amelyek deriváltja m.m. nulla.¹⁰

Bizonyítás. Jordan tétele alapján (138. o.) feltehető, hogy F monoton növekvő. Az értelmezési tartományától balra és jobbra konstansként kiterjesztve az is feltehető, hogy $[a, b] = \overline{\mathbb{R}}$. Végül a 16.7 és 16.8 állítások miatt (132. o.) feltehető, hogy F folytonos.

A

$$D_n(x) := n(F(x + n^{-1}) - F(x)), \quad n = 1, 2, \dots$$

képlet nem-negatív, folytonos függvényeket definiál \mathbb{R} -en. E függvények integráljai korlátosak bármely $[-N, N]$ kompakt intervallumon, mert F folytonossága miatt

$$\int_{-N}^N D_n dx = n \int_N^{N+n^{-1}} F dx - n \int_{-N}^{-N+n^{-1}} F dx \rightarrow F(N) - F(-N),$$

⁸ Lebesgue 1904.

⁹ Lebesgue 1904. F gráfját az *ördög lépcsőjének* is hívják; lásd a 18.1 ábrát, 168. o.

¹⁰ Lásd például Szökefalvi-Nagy 1965.

ha $n \rightarrow \infty$. Minthogy Lebesgue tétele (129. o.) alapján $D_n \rightarrow F'$ m.m. $[-N, N]$ -en, F' integrálható $[-N, N]$ -en a Fatou-lemma szerint (153. o.), és

$$\int_{-N}^N F' dx \leq F(N) - F(-N).$$

Mivel F monoton növekvő, innen

$$\int F' \chi_{[-N, N]} dx \leq F(\infty) - F(-\infty), \quad N = 1, 2, \dots$$

Végül $F' \chi_{[-N, N]} \neq F'$ m.m., úgyhogy Beppo Levi tételét alkalmazva F' integrálható, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} F' dx \leq F(\infty) - F(-\infty).$$

□

A 18.4 tétel (a) részének a bizonyítása. Ha f integrálható, akkor a határozatlan integrálja f primitív függvénye a 18.1 állítás alapján. Megfordítva, ha f -nek F primitív függvénye, akkor $f = F'$ m.m., és így f integrálható az előző állítás miatt. □

A bizonyítás folytatásához szükségünk van egy segédtétele:

18.6. Lemma. Legyen $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő és abszolút folytonos. Ha $H' = 0$ m.m., akkor H konstans.

Bizonyítás. Elég azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $I = [a, b]$ kompakt. Azon $x \in [a, b]$ pontok, amelyekben H nem differenciálható, vagy ahol a deriváltja nullától különböző, egy E nullahalmazt alkotnak. Mutassuk meg, hogy a $H(E)$ képhalmaz is nullahalmaz. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -t, majd válasszunk egy $\delta > 0$ számot az abszolút folytonosság definíciójának megfelelően. Fedjük be E -t δ -nál kisebb összhosszúságú félig nyílt $I_k = [a_k, b_k)$ intervallumokkal. Ha mindegyik I_k -t felcseréljük

$$I_k \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{k-1})$$

komponenseivel, akkor feltehetjük, hogy az I_k halmazok páronként diszjunktak. Akkor a $[H(a_k), H(b_k)]$ intervallumok befedik $H(E)$ -t, és az összhosszúságuk legfeljebb ε , mert a

$$\sum (H(b_k) - H(a_k))$$

sor minden részletösszege kisebb ε -nál. Tehát $H(E)$ nullahalmaz.

Mutassuk most meg, hogy a komplementer $F := [a, b] \setminus E$ halmaz képe is nullahalmaz. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Míthogy $H' = 0$ F -en, minden $x \in F$ -hez van olyan $x < y < b$, hogy

$$\frac{H(y) - H(x)}{y - x} < \varepsilon.$$

Így x jobbról láthatatlan a $g(t) := \varepsilon t - H(t)$ függvényre nézve. Alkalmazva a „felkelő Nap” lemmát (135. o.), F befedhető megszámlálható sok páronként diszjunkt, nyílt (a_k, b_k) intervallummal, amelyekre $g(a_k) \leq g(b_k)$, vagyis

$$H(b_k) - H(a_k) \leq \varepsilon(b_k - a_k).$$

Ezek szerint $H(F)$ befedhető a legfeljebb $\varepsilon(b - a)$ összhosszúságú

$$[H(a_k), H(b_k)]$$

intervallumokkal. Míthogy ε tetszőlegesen kicsinek választható, innen következik, hogy $H(F)$ nullahalmaz.

Az eddigiek alapján a $H(I) = H(E) \cup H(F)$ intervallum nullahalmaz, így szükségképpen egyetlen pontból áll. Más szóval H konstans. \square

A 18.4 tétel (b) részének a bizonyítása. Meg kell mutatnunk, hogy ha $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút folytonos és korlátos változású, akkor

$$\int_a^b F' dx = F(b) - F(a).$$

Tegyük fel először, hogy F monoton növekvő. Akkor a 18.5 állítás miatt

$$\int_c^d F' dx \leq F(d) - F(c) \quad \text{minden} \quad a \leq c \leq d \leq b\text{-re.}$$

Jelöljük F' határozatlan integrálját G -vel, akkor

$$\int_c^d F' dx = G(d) - G(c) \quad \text{minden} \quad a \leq c \leq d \leq b\text{-re.}$$

Befejezésül elég megmutatnunk, hogy a $H := F - G$ függvény konstans.

Abszolút folytonos függvények különbsége lévén H is abszolút folytonos. Továbbá H monoton növekvő, mert az előző két reláció alapján

$$G(d) - G(c) \leq F(d) - F(c) \quad \text{minden} \quad a \leq c \leq d \leq b\text{-re.}$$

A 18.6 lemma szerint tehát H konstans.

A tétel bizonyításának a befejezéséhez elég megmutatnunk, hogy minden abszolút folytonos és korlátos változású $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

előállítható két abszolút folytonos, monoton növekvő és korlátos függvény különbségeként.

A Jordan-tétel bizonyításához hasonlóan (138. o.) jelöljük $g(x)$ -szel F teljes változását az $[a, x]$ intervallumban. Már tudjuk, hogy g és $h := F - g$ monoton növekvő és korlátos. Elég megmutatnunk, hogy g abszolút folytonos.

Tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk $\delta > 0$ -t F abszolút folytonossága alapján. Ha $\{[a_k, b_k]\}$ δ -nál kisebb összhosszúságú diszjunkt intervallumrendszer $[a, b]$ -ben, akkor

$$\sum |F(b_k) - F(a_k)| \leq \varepsilon.$$

Ha mindegyik $[a_k, b_k]$ -t felbontjuk véges sok, páronként diszjunkt $[a_{kn}, b_{kn}]$ intervallum egyesítésére, akkor az intervallumok összhossza nem változik, továbbra is δ -nál kisebb marad, tehát

$$\sum |F(b_{kn}) - F(a_{kn})| \leq \varepsilon.$$

Az összeg felső határa az összes ilyen felbontásra nézve $\sum |g(b_k) - g(a_k)|$ -val egyenlő. Tehát

$$\sum |g(b_k) - g(a_k)| \leq \varepsilon,$$

és így g abszolút folytonos. □

Megjegyzés. (Lebesgue-felbontás¹¹) Legyen $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású függvény, és jelöljük F' határozatlan integrálját G -vel. Akkor $H := F - G$ is korlátos változású, és $H' = 0$ m.m. Az ilyen függvényeket *szingulárisaknak* nevezzük. Tehát minden korlátos változású $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felírható két olyan korlátos változású függvény különbségeként, amelyek egyike abszolút folytonos, a másik pedig szinguláris.

18.3. * Parciális és helyettesítései integrálás

18.7. Állítás. Ha F és G az $[a, b]$ -ben integrálható f és g függvények primitív függvényei, akkor fG és Fg is integrálható $[a, b]$ -ben, és

$$\int_a^b fG \, dx + \int_a^b Fg \, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) =: [FG]_a^b.$$

¹¹ Lebesgue 1910, 232–249. o.

Bizonyítás. F és G kompakt intervallumon folytonos függvények, tehát majorálhatók valamely M konstanssal. A 17.16 állítás (157. o.) (b) és (e) része miatt fG és Fg is integrálható. Továbbá az $[a, b]$ minden $[\alpha, \beta]$ részintervallumára érvényes

$$\begin{aligned} |F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha)| &= |(F(\beta) - F(\alpha))G(\beta) - F(\alpha)(G(\beta) - G(\alpha))| \\ &\leq M|F(\beta) - F(\alpha)| + M|G(\beta) - G(\alpha)| \end{aligned}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy FG abszolút folytonos és korlátos változású. Minthogy

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \quad \text{m.m.,}$$

a 18.4 tétel alapján (171. o.)

$$\int_a^b fG \, dx + \int_a^b Fg \, dx = \int_a^b fG + Fg \, dx = [FG]_a^b. \quad \square$$

18.8. Állítás. (*de la Vallée-Poussin*¹²) Legyen $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő és abszolút folytonos függvény. Ha f integrálható $[x(\alpha), x(\beta)]$ -ben, akkor $(f \circ x)x'$ integrálható $[\alpha, \beta]$ -ban, és

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t) \, dt. \quad (18.5)$$

Bizonyítás.

(a) Az állítás nyilvánvaló, ha f lépcsősfüggvény.

(b) Mutassuk meg, hogy ha E nullahalmaz $[x(\alpha), x(\beta)]$ -ban, akkor

$$D := \{t \in [\alpha, \beta] : x(t) \in E \text{ és } x'(t) > 0\}$$

nullahalmaz $[\alpha, \beta]$ -ban. Legyen ugyanis $\{I_k\}$ olyan, véges összhosszúságú nyílt intervallumrendszer, amelyik E minden pontját végtelen sokszor lefedi. Akkor a

$$\sum_{k=1}^n \chi_{I_k}(x(t))x'(t)$$

függvények m.m. monoton növekvő függvényt sorozatot alkotnak, és az integráljaik felülről korlátosak, mert (a) felhasználásával

$$0 \leq \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^n \chi_{I_k}(x(t))x'(t) \, dt = \sum_{k=1}^n \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} \chi_{I_k}(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \infty.$$

¹² de la Vallée-Poussin 1915, 467. o.

Beppo Levi tétele alapján a függvénysorozat m.m. konvergál. Minthogy a sorozat minden $t \in D$ pontban végtelenhez tart, D szükségképpen nullahalmaz.

(c) Legyen most $f \in C_1$, és válasszunk egy m.m. f -hez tartó, monoton növekvő (φ_n) lépcsős függvénysorozatot. Jelöljük E -vel azon kivételes x pontok halmazát, amelyekben $\varphi_n(x) \not\rightarrow f(x)$, és legyen D a hozzátartozó, előbb definiált nullahalmaz.

Mivel $x'(t) \geq 0$ m.m., a

$$\varphi_n(x(t))x'(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

mérhető függvények sorozata m.m. monoton növekvő. Továbbá

$$\varphi_n(x(t))x'(t) \rightarrow f(x(t))x'(t) \quad [\alpha, \beta]\text{-ban m.m.,}$$

mert a kivételes pontok vagy D -hez tartoznak, vagy pedig azon pontok halmazához, ahol x nem differenciálható, és mindkét halmaz nullahalmaz. Végül az integráljaik sorozata korlátos, mert (a) miatt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x(t))x'(t) dt = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx.$$

Beppo Levi tételét alkalmazva $(f \circ x)x'$ integrálható, és a (18.5) egyenlőség teljesül. \square

Megjegyzés. A (18.5) formula érvényben marad, ha f integrálja létezik és végtelen. A pozitív és negatív részek vizsgálatával elegendő ezt nem-negatív, mérhető függvényekre igazolni. Válasszunk egy m.m. f -hez tartó, monoton növekvő integrálható (φ_n) függvénysorozatot, és ismételjük meg a fenti (c) lépést egyetlen módosítással: Beppo Levi tétele helyett alkalmazzuk az általánosított Beppo Levi tételt, vagyis a 17.17 állítás (e) részét (160. o.).

19. fejezet

Integrál mértékterekben

Véleményem szerint a matematikusoknak, mint olyanoknak, nem kell filozófiai kérdésekkel foglalkozniuk; ezt a véleményt egyébként számos filozófus is osztja.

H. Lebesgue

A 17. fejezetben a Lebesgue-integrált \mathbb{R} -en értelmezett függvényekre értelmeztük. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy az elmélet jóval általánosabb keretek között is érvényben marad, ráadásul a korábbi bizonyítások szinte szóról-szóra megismételhetők.¹ Az itt ismertetett eredmények tartalmazzák a többváltozós függvények integrálelméletét, és lehetőséget nyújtanak a valószínűségszámítás szilárd megalapozásához is.²

19.1. Mértékek

Ebben a szakaszban általánosítjuk a hosszúság, terület és térfogat fogalmát. Emlékeztetünk arra, hogy egy páronként diszjunkt halmazokból álló (A_n) halmazsorozatot röviden *diszjunkt* halmazsorozatnak nevezünk. A diszjunkttság hangsúlyozására $\cup A_n$ helyett gyakran $\cup^* A_n$ -t írunk.

¹ Radon 1913, Fréchet 1915. Mi ebben a könyben csak valós értékű függvényekkel foglalkozunk, bár Bochner 1933 az elméletet Banach-tér értékű függvényekre is kiterjesztette, és ennek fontos alkalmazásai vannak például a parciális differenciálegyenletek elméletében. Lásd például Dunford–Schwartz 1957, Edwards 1965, Yosida 1980, Lions–Magenes 1968–1970.

² Kolmogorov 1933.

Jelöljük 2^X -szel az X halmaz *hatványhalmazát*, vagyis X összes részhalmazainak a rendszerét. E szokásos jelölést az indokolja, hogy ha X -nek n eleme van, akkor a hatványhalmaza 2^n elemű.

Definíció. Adott X halmazbeli *félgyűrűn*³ olyan $\mathcal{P} \subset 2^X$ halmazrendszer értünk, amely teljesíti a következő feltételeket:

- $\emptyset \in \mathcal{P}$;
- ha $A, B \in \mathcal{P}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{P}$;
- ha $A, B \in \mathcal{P}$, akkor létezik olyan \mathcal{P} -beli véges diszjunkt C_1, \dots, C_n sorozat, hogy

$$A \setminus B = C_1 \cup^* \dots \cup^* C_n.$$

Megjegyzés. Rekurzióval megmutatható, hogy $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \mathcal{P}$ minden \mathcal{P} -beli véges A_1, \dots, A_k sorozatra is.

Példák.

- Minden σ -gyűrű félgyűrű is.
- Az \mathbb{R} -beli intervallumok félgyűrűt alkotnak.
- Adott $k \geq 0$ egészre az X halmaz legfeljebb k pontból álló részhalmazai félgyűrűt alkotnak.
- (*Leszűkítés*) Ha \mathcal{P} X -beli félgyűrű, és $Y \subset X$, akkor

$$\mathcal{P}_Y := \{P \in \mathcal{P} : P \subset Y\}$$

Y -beli félgyűrű.

- (*Direkt szorzat*) Ha \mathcal{P} X -beli félgyűrű és \mathcal{Q} Y -beli félgyűrű, akkor

$$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$$

$X \times Y$ -beli félgyűrű.

Definíciók. A \mathcal{P} félgyűrűn értelmezett *nem-negatív* $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvényt *mértéknek*⁴ nevezzük, ha $\mu(\emptyset) = 0$, és ha μ σ -*additív* a következő értelemben: ha $(A_n) \subset \mathcal{P}$ diszjunkt halmazsorozat és $A := \cup^* A_n \in \mathcal{P}$, akkor⁵

³ Halmos 1950 némileg speciálisabb struktúrát nevezett félgyűrűnek, őt követően azonban hamarosan elterjedt az itt bevezetésre kerülő fogalom.

⁴ Borel 1898.

⁵ Minthogy $\mu(\emptyset) = 0$, a (19.1) egyenlőség a diszjunkt *véges* sorozatokra is teljesül. A csak *végesen additív* halmazfüggvényeket Borel előtt már Harnack 1881, Cantor 1884 (229–236. o.), Stolz 1884, Peano 1887 (154–158. o.) és Jordan 1892 (76–79. o.) is tanulmányozták.

$$\mu(A) = \sum \mu(A_n). \quad (19.1)$$

Ebben az esetben az (X, \mathcal{P}, μ) hármast *mértéktérnek* nevezzük.

Példák.

- A 17.18 állítás alapján (171. o.) az intervallumok hosszúsága mérték.
- (*Számoság-mérték*) Adott X halmaz A részhalmazainak az elemszámát $\mu(A)$ -val jelölve $\mathcal{P} := 2^X$ -en értelmezett mértéket kapunk.
- (*Dirac-mérték*) Rögzített $x \in X$ pont esetén a

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in A, \\ 0 & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

képlet mértéket értelmez $\mathcal{P} := 2^X$ -en.

- (*Leszűkítés*) Ha μ a \mathcal{P} félgűrűn adott mérték és $Y \in \mathcal{P}$, akkor μ -nek a \mathcal{P}_Y -ra való leszűkítése is mérték.
- (*Direkt szorzat*) Adott $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ és $\nu : \mathcal{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mértékek esetén a

$$(\mu \times \nu)(P \times Q) := \mu(P)\nu(Q)$$

képlet mértéket definiál $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ -n.

- (*Mérték véges része*) Tetszőleges $\varrho : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mértéknek a

$$\mathcal{P} := \{A \in \mathcal{R} : \varrho(A) < \infty\}$$

félgűrűre vett leszűkítése véges értékű mérték.

Vezessük be a következő, a félgűrűknél könnyebben kezelhető struktúrát is:

Definíció. Adott X halmazbeli gyűrűn olyan $\mathcal{R} \subset 2^X$ halmazrendszert értünk, amely teljesíti a következő feltételeket:

- $\emptyset \in \mathcal{R}$;
- ha $A, B \in \mathcal{R}$, akkor $A \setminus B \in \mathcal{R}$;
- ha $A, B \in \mathcal{R}$ diszjunkt halmazok, akkor $A \cup^* B \in \mathcal{R}$.

Megjegyzés. Ha \mathcal{R} gyűrű, akkor az $A \cup B = (A \setminus B) \cup^* B$ egyenlőségből következik, hogy $A, B \in \mathcal{R}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{R}$, tehát a diszjunkság feltétele nem szükséges. Ebből indukcióval következik, hogy $A := A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{R}$ minden \mathcal{R} -beli véges A_1, \dots, A_k sorozatra is.

$A \cap A_n = A \setminus \cup (A \setminus A_n)$ egyenlőség alapján innen adódik, hogy tetszőleges \mathcal{R} -beli véges A_1, \dots, A_k sorozatra $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \mathcal{R}$ is teljesül. Ez azt is mutatja, hogy minden gyűrű félgűrű is.

Példák.

- Minden σ -gyűrű gyűrű is. Speciálisan minden halmaz hatványhalmaza gyűrű.
- Adott X halmaz véges részhalmazai gyűrűt alkotnak.
- Adott X halmaz véges részhalmazai és ezek komplementumai gyűrűt alkotnak.

Bármely $\mathcal{A} \subset 2^X$ halmazrendszerhez létezik őt tartalmazó legkisebb gyűrű: vegyük egyszerűen az \mathcal{A} -t tartalmazó összes gyűrű közös részét. Ezt a gyűrűt az \mathcal{A} által generált gyűrűnek hívjuk

A félgyűrűk által generált gyűrűk egyszerűen előállíthatók:

19.1. Lemma. A \mathcal{P} félgyűrű által generált gyűrű az összes

$$R = P_1 \cup^* \dots \cup^* P_n, \quad P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P} \quad n = 1, 2, \dots \quad (19.2)$$

alakú véges diszjunkt egyesítésekből áll.

Bizonyítás. Mivel minden \mathcal{P} -t tartalmazó gyűrű szükségképpen tartalmazza a (19.2) halmazokat, elegendő megmutatni, hogy az utóbbiak \mathcal{R} rendszere már gyűrű. Ezt több lépésben igazoljuk.

(a) Először is $\emptyset \in \mathcal{R}$, mert $\emptyset \in \mathcal{P}$.

(b) Ha $R_1, \dots, R_m \in \mathcal{R}$ páronként diszjunkt halmazok valamely m -re, akkor $R := R_1 \cup^* \dots \cup^* R_m$ is \mathcal{R} -hez tartozik: ha ugyanis mindegyik R_i -t (19.2)-höz hasonlóan felbontjuk, akkor R -nek is ilyen alakú felbontását nyerjük.

(c) Ha $P', P \in \mathcal{P}$, akkor $P' \setminus P \in \mathcal{R}$ a félgyűrű és \mathcal{R} definíciója miatt.

(d) Ha $R \in \mathcal{R}$ és $P \in \mathcal{P}$, akkor $R \setminus P \in \mathcal{R}$. Ugyanis R (19.2) típusú felbontását tekintve, (b) és (c) felhasználásával az

$$R \setminus P = (P_1 \setminus P) \cup^* \dots \cup^* (P_n \setminus P) \in \mathcal{R}$$

egyenlőséget kapjuk.

(e) Ha $R', R \in \mathcal{R}$, akkor $R' \setminus R \in \mathcal{R}$. Tekintsük ugyanis R (19.2) típusú felbontását, és alkalmazzuk n -szer egymás után a (d) tulajdonságot:

$$R' \setminus R = (\dots (R' \setminus P_1) \setminus P_2) \dots \setminus P_n \in \mathcal{R}. \quad \square$$

Most már bebizonyíthatjuk az ígért kiterjesztési tételt:

19.2. Állítás. Minden félgyűrűn értelmezett mérték egyértelműen kiterjeszthető a félgyűrű által generált gyűrűn értelmezett mértékké.

Bizonyítás. Legyen $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ az adott mérték és \mathcal{R} a \mathcal{P} által generált gyűrű. Ha létezik \mathcal{R} -re kiterjesztett mérték, akkor azt továbbra is μ -vel jelölve, szükségképpen

$$\mu(R) = \mu(P_1) + \cdots + \mu(P_n)$$

minden (19.2) alakú felbontásra. Mivel a jobboldali halmazok \mathcal{P} -beliek, ez mutatja a kiterjesztés egyértelműségét. A létezéshez mutassuk meg először, hogy a fenti egyenlőség korrektül definiálja $\mu(R)$ -et, vagyis ha

$$R = P'_1 \cup^* \cdots \cup^* P'_m$$

egy tetszőleges másik (19.2) alakú felbontás, akkor

$$\mu(P_1) + \cdots + \mu(P_n) = \mu(P'_1) + \cdots + \mu(P'_m).$$

Ez azonnal adódik $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ additivitásából, mert mindkét összeg a

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \mu(P_j \cap P'_i)$$

kifejezéssel egyenlő. A kiterjesztett halmazfüggvény nyilvánvalóan nem-negatív, így csak a σ -additivitás igazolása maradt hátra. Meg kell tehát mutatnunk, hogy ha $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ olyan diszjunkt unió, hogy $R, R_k \in \mathcal{R}$, akkor $\mu(R) = \sum \mu(R_k)$.

Mindegyik R_k -t (19.2) alakú felbontásával helyettesítve és felhasználva $\mu(R_k)$ definícióját feltehetjük, hogy $R_k \in \mathcal{P}$ minden k -ra. Tekintsük most R -nek is egy (19.2) alakú felbontását. Akkor

$$P_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_j \cap R_k)$$

minden egyes j -re. Mivel itt $P_j, P_j \cap R_k \in \mathcal{P}$, és μ σ -additív \mathcal{P} -n,

$$\mu(P_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_j \cap R_k).$$

Összegezve $j = 1, \dots, n$ -re a keresett egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{aligned} \mu(R) &= \sum_{j=1}^n \mu(P_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_j \cap R_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \mu(P_j \cap R_k) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k). \quad \square \end{aligned}$$

A kiterjesztési tétel segítségével igazoljuk a mértékek további fontos tulajdonságait:

19.3. Állítás. Minden (félgyűrűn értelmezett) $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték eleget tesz a következő feltételeknek:

- (a) (monotonitás) ha $A, B \in \mathcal{P}$ és $A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- (b) (σ -szubadditivitás) ha $(A_n) \subset \mathcal{P}$ megszámlálható befedése $A \in \mathcal{P}$ -nek, akkor $\mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$;
- (c) (folytonosság) ha $(A_n) \subset \mathcal{P}$ monoton növekvő halmazsorozat és $A := \bigcup A_n \in \mathcal{P}$, akkor $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$;
- (d) (folytonosság) ha $(A_n) \subset \mathcal{P}$ olyan monoton fogyó halmazsorozat, amelyre $\mu(A_1) < \infty$ és $A := \bigcap A_n \in \mathcal{P}$, akkor $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Példa. Az \mathbb{R} -beli $A_n := [n, \infty)$ halmazok mutatják, hogy a $\mu(A_1) < \infty$ feltétel nem hagyható el (d)-ben.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján feltehetjük, hogy \mathcal{P} gyűrű.

- (a) A mértékek nem-negativitása és additivitása folytán

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

- (b) Legyen

$B_1 := A \cap A_1$ és $B_{n+1} := (A \cap A_{n+1}) \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$, $n = 1, 2, \dots$, akkor $A = \bigcup^* B_n$. Továbbá $B_n \in \mathcal{P}$ (ugyanis \mathcal{P} gyűrű), és $B_n \subset A_n$. Következésképpen (a) felhasználásával a kívánt egyenlőséget kapjuk:

$$\mu(A) = \sum \mu(B_n) \leq \sum \mu(A_n).$$

- (c) Legyen $A_0 = \emptyset$, akkor az $A_k \setminus A_{k-1}$ halmazok a \mathcal{P} gyűrűhöz tartoznak. Minthogy

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1}) \quad \text{és} \quad A_n = \bigcup_{k=1}^n (A_k \setminus A_{k-1})$$

minden n -re,

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \mu(A).$$

- (d) A $\mu(A_n)$ mértékek végeessége miatt mindegyik A_n -t $A_n \setminus A$ -ra cserélve feltehető, hogy $A = \emptyset$. Az $A_k \setminus A_{k+1}$ halmazok a \mathcal{P} gyűrűhöz tartoznak.

Minthogy

$$A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1}),$$

a σ -additivitás miatt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) = \mu(A_1).$$

A $\mu(A_1) < \infty$ feltevés alapján a sor konvergens, úgyhogy $n \rightarrow \infty$ esetén

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) \rightarrow 0.$$

Befejezésül vegyük észre, hogy a fenti összeg $\mu(A_n)$ -nel egyenlő, hiszen

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1}) = A_n. \quad \square$$

19.2. Véges mértékhez rendelt integrál

Definíció. *Végesnek* nevezzük egy mértéket, ha csak véges értékeket vesz fel.

Példa.

- A korlátos intervallumok hosszúsága véges (de nem korlátos) mérték.
- Mérték véges része véges mérték.

Legyen \mathcal{P} adott X halmazbeli félgűrű, és $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ véges mérték.

Definíció. A \mathcal{P} -beli halmazok karakterisztikus függvényeinek a

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{P_k}$$

lineáris kombinációit *lépcsős függvényeknek* nevezzük; *integráljukat* az

$$\int \varphi d\mu := \sum_{k=1}^n c_k \mu(P_k)$$

képlettel értelmezzük.

A 17.1 állítás (142. o.) érvényben marad: a mérték additivitása folytán az integrál értéke nem függ a lépcsős függvény reprezentációjának speciális választásától.

Definíció. Az A halmaz *nullahalmaz*, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $(P_k) \subset \mathcal{P}$ sorozat, hogy $A \subset \cup A_n$ és $\sum \mu(P_k) \leq \varepsilon$. Ekvivalens módon A nullahalmaz, ha létezik olyan $(P_k) \subset \mathcal{P}$ sorozat, hogy $\sum \mu(P_k) < \infty$, és minden $x \in A$ pont végtelen sok P_k -nak eleme.

A 16.3 állítás (128. o.) a következő alakot ölti:

19.4. Állítás.

- (a) Az üres halmaz nullahalmaz.
- (b) Nullahalmaz részhalmazai is nullahalmazok.
- (c) Megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése is nullahalmaz.
- (d) $P \in \mathcal{P}$ pontosan akkor nullahalmaz, ha $\mu(P) = 0$.

Bizonyítás.

(a), (b) és (c) Megismételhető a 16.3 állítás bizonyítása.

(d) Ha $\mu(P) = 0$, akkor P definíció szerint nullahalmaz. Megfordítva, ha $P \in \mathcal{P}$ nullahalmaz, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $(P_k) \subset \mathcal{P}$ sorozat, hogy $P \subset \cup P_k$ és $\sum \mu(P_k) \leq \varepsilon$. A mérték szubadditivitása alapján innen $\mu(P) \leq \varepsilon$ minden $\varepsilon > 0$ -ra, és így $\mu(P) = 0$. \square

A 17. fejezetet úgy írtuk meg, hogy *minden* ott kimondott tétel, állítás, következmény és lemma változtatás nélkül érvényben marad. A bizonyítások közül is csak kettő szorul módosításra:

- a 17.2 lemma igazolásához (142. o.) felhasználtuk az intervallumok *topológiai* tulajdonságait;
- a 17.16 állítás (f) részének a bizonyításához (157. o.) felhasználtunk egy integrálható, mindenütt pozitív függvényt. A jelen szakasz végén megmutatjuk, hogy bizonyos mértékekre nincs ilyen függvény.

Az alábbi, alternatív bizonyítások mindig érvényesek:

A 17.2 lemma bizonyítása. Terjesszük ki μ -t a \mathcal{P} által generált \mathcal{R} gyűrűre a 19.2 állítás alapján.

Legyen $Y \subset X$ olyan nullahalmaz, hogy $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ minden $x \in X \setminus Y$ -ra, majd tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk olyan \mathcal{P} -beli (H_i) halmazsorozatot, hogy $Y \subset \cup H_i$ és $\sum \mu(H_i) < \varepsilon$. Akkor az $S_n := H_1 \cup \dots \cup H_n$ formula olyan \mathcal{R} -beli halmazsorozatot definiál, hogy

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots,$$

és $\mu(S_n) < \varepsilon$ minden n -re.

Vezessük be az \mathcal{R} -beli

$$K_0 := \{x \in X : \varphi_1(x) > 0\} \quad \text{és} \quad K_n := \{x \in X : \varphi_n(x) > \varepsilon\}$$

halmazokat ($n = 1, 2, \dots$); jegyezzük meg, hogy

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

Ha φ_1 maximumát M -mel jelöljük, akkor

$$\varphi_n \leq M \quad K_n\text{-en}, \quad \varphi_n \leq \varepsilon \quad K_0 \setminus K_n\text{-en}, \quad \text{és} \quad \varphi_n = 0 \quad X \setminus K_0\text{-on}.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned} 0 \leq \int \varphi_n d\mu &\leq \varepsilon \mu(K_0 \setminus K_n) + M \mu(K_n) \\ &= \varepsilon \mu(K_0 \setminus K_n) + M \mu(K_n \cap S_n) + M \mu(K_n \setminus S_n) \\ &\leq \varepsilon \mu(K_0) + M \varepsilon + M \mu(K_n \setminus S_n). \end{aligned}$$

A $(K_n \setminus S_n)$ halmazsorozat monoton fogyó, mert (K_n) monoton fogyó és (S_n) monoton növekvő. E halmazsorozat metszete üres. Ugyanis ha $x \in \cap K_n$, akkor $\varphi_n(x) \not\rightarrow 0$, úgyhogy $x \in Y$; de ekkor elég nagy n -re $x \in S_n$, tehát $x \notin K_n \setminus S_n$.

Mivel

$$\mu(K_1 \setminus S_1) \leq \mu(K_0) < \infty,$$

a 19.3 állítás (d) része miatt $\mu(K_n \setminus S_n) \rightarrow 0$. Így az előző becslésből elég nagy n -re a keresett

$$0 \leq \int \varphi_n d\mu < (\mu(K_0) + M + 1)\varepsilon$$

egyenlőtlenséget kapjuk. □

A 17.16 állítás (f) részének a bizonyítása. Ha létezik olyan \mathcal{P} -beli (P_k) halmazsorozat, hogy mindegyik f_n eltűnik $\cup P_k$ -n kívül, akkor megismételhetjük a korábbi bizonyítást a

$$h := \sum_k \frac{\chi_{P_k}}{k^2(1 + \mu(P_k))}$$

függvény használatával, és a g_n és g függvényeket $\cup P_k$ -n kívül nullaként definiálva.

A következő lemma biztosítja ilyen (P_k) sorozat létezését. □

19.5. Lemma. *Tetszőleges mérhető f függvényhez létezik olyan \mathcal{P} -beli diszjunkt (P_k) halmazsorozat, hogy $\cup^* P_k$ -n kívül $f = 0$.*

Bizonyítás. Legyen (φ_n) olyan lépcsős függvénysorozat, amelyre $\varphi_n \rightarrow f$ m.m. A nullahalmazok definíciója alapján van olyan \mathcal{P} -beli (A_{0j}) halmazsorozat, hogy $\cup A_{0j}$ -n kívül $\varphi_n \rightarrow f$. Továbbá a lépcsős függvények definíciója alapján minden n -hez van olyan \mathcal{P} -beli véges (A_{nj}) halmazsorozat, hogy $\cup A_{0j}$ -n kívül $\varphi_n = 0$. Rendezzük mindezen A_{nj} halmazokat egyetlen (P_k) sorozatba, akkor $\cup P_k$ -n kívül $f = 0$.

Az $P_2 \setminus P_1, (P_3 \setminus P_2) \setminus P_1, \dots$ különbségek mindegyikét \mathcal{P} -ben felbontva azt is feltehetjük, hogy a (P_k) sorozat diszjunkt. \square

***Példa.** Tekintsük egy nem-megszámlálható X halmaz véges részhalmazainak a \mathcal{P} gyűrűjét, és jelöljük $\mu(A)$ -val a \mathcal{P} -beli A halmazok elemszámát. A most igazolt lemmából következik, hogy erre a mértékre nézve nincsenek mérhető és mindenütt pozitív függvények.

Befejezésül vizsgáljuk meg, hogy mely mértékek kaphatók meg véges mértékből kiindulva az integrálelmélet eljárásával.

Definíció. A \mathcal{Q} félgűrűn értelmezett μ mérték σ -véges, ha bármely \mathcal{Q} -beli halmaz befedhető megszámlálható sok véges mértékű halmazzal.

Megjegyzés. A félgűrű definíciójából könnyen következik, hogy a σ -véges esetben bármely \mathcal{Q} -beli halmaz előáll megszámlálható sok *diszjunkt* véges mértékű halmaz egyesítéseként is.

Példák.

- Minden véges mérték σ -véges is.
- Adott \mathcal{R} félgűrűn értelmezett ϱ mérték esetén a megszámlálható sok véges mértékű halmazzal befedhető \mathcal{R} -beli halmazok is félgűrűt alkotnak. A ϱ mérték e félgűrűre vett leszűkítését ϱ σ -véges részének hívjuk. Például nem megszámlálható X alaphalmazon a számosság mérték nem σ -véges; σ -véges része az X megszámlálható részhalmazainak a σ -gyűrűjén van definiálva.

A következő állítás első része magában foglalja a 17.18 állítást (162. o.):

19.6. *Állítás.

- Tetszőleges véges $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ mértékből kiindulva az integrálelmélet során nyert $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték σ -véges és teljes.*
- Megfordítva, bármely σ -véges, teljes mérték megegyezik a véges részéből kiindulva kapott $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mértékkel.*
- Általánosabban bármely σ -véges mérték a véges részéből kiindulva kapott $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték leszűkítése.*

Bizonyítás.

(a) a 17.18 állítás (162. o.) és az előző lemma következménye.

(b) és (c) a mérték konstrukciójából következik. \square

Az állítás (b) és (c) része lehetővé teszi, hogy tetszőlegesen adott σ -véges mérték szerinti integrálról beszélhessünk, azon a mérték véges részéhez hozzárendelt integrálfogalmat értve.

19.3. Szorzatterek: Fubini és Tonelli tételei

A klasszikus analízisben⁶ a kettős integrálok kiszámítása visszavezethető az egyváltozós esetre a

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, dx \right) dy \quad (19.3) \end{aligned}$$

formula alkalmazásával. Megmutatjuk, hogy ez az eljárás érvényben marad a Lebesgue-integrálra is.

Tekintsünk két véges $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\nu : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mértéket, ahol \mathcal{P} X -beli, \mathcal{Q} pedig Y -beli félggyűű. Akkor $\mu \times \nu : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ véges mérték az $X \times Y$ -beli $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ félggyűűn. A jelölések egyszerűsítésére a következőkben az

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, dx \, dy, \quad \int_X g(x) \, dx \quad \text{és} \quad \int_Y h(y) \, dy$$

írásmódot alkalmazzuk

$$\int f \, d(\mu \times \nu), \quad \int g \, d\mu \quad \text{és} \quad \int h \, d\nu$$

helyett. A nullahalmazok és a m.m. kifejezések értelemszerűen X -ben a μ , Y -ban a ν , $X \times Y$ -ban pedig a $\mu \times \nu$ mértékre vonatkoznak.

A következő tétel messzemenően általánosítja a klasszikus eredményeket:

19.7. Tétel. (Fubini⁷) Ha f integrálható $X \times Y$ -ben, akkor a (19.3)-beli szukcesszív integrálok is léteznek, és a három kifejezés egyenlő.

⁶ Euler 1770, Dirichlet 1839, Stolz 1886 (93–94. o.).

Megjegyzések.

- A tétel indukcióval mértékek tetszőleges (véges) direkt szorzatára is általánosítható.
- A jelen szakasz végén példát mutatunk arra, hogy a szukcesszív integrálok létezése nem vonja maga után azok egyenlőségét, és így f integrálhatóságát sem.

A bizonyítás előkészítésére világítsuk meg a három tér nullahalmazainak a kapcsolatát:

19.8. Lemma. *Ha E nullahalmaz $X \times Y$ -ben, akkor E*

$$\{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

„szekciói” majdnem minden $x \in X$ -re nullahalmazok Y -ban.

Bizonyítás. Rögzítsünk olyan $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ -beli $R_n = P_n \times Q_n$ téglalapokat, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(R_n) < \infty,$$

és E minden pontját végtelen sok téglalap lefedi.

A lépcsősfüggvények integráljának a definíciója alapján

$$(\mu \times \nu)(R_n) = \int_{X \times Y} \chi_{R_n}(x, y) \, dx \, dy = \int_X \left(\int_Y \chi_{R_n}(x, y) \, dy \right) dx$$

(a közös értékük $\mu(P_n)\nu(Q_n)$), úgyhogy feltételünk szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \left(\int_Y \chi_{R_n}(x, y) \, dy \right) dx$$

sor konvergens. Beppo Levi tétele alapján a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \chi_{R_n}(x, y) \, dy$$

függvénysor m.m. $x \in X$ -re konvergens. Ha x_0 ilyen pont, akkor Beppo Levi tételének újabb alkalmazása mutatja, hogy a

⁷ Lebesgue 1902 (korlátos függvényekre), Fubini 1907. Fubini bizonyítása hibás volt, Hobson 1910 és de la Vallée-Poussin 1910 adtak először helyes bizonyítást; lásd Hawkins 2001.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{R_n}(x_0, y)$$

függvénysor m.m. $y \in Y$ -ra konvergens. Ha y_0 ilyen pont, akkor $(x_0, y_0) \notin E$, mert E pontjaiban $\sum \chi_{R_n} = \infty$. \square

A 19.7 tétel bizonyítása. Szimmetriaokokból elegendő az

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, dx \, dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, dy \right) \, dx \quad (19.4)$$

egyenlőséget igazolni. Meg kell mutatnunk, hogy

- az $\int_Y f(x, y) \, dy$ integrál m.m. $x \in X$ -re értelmezve van;
- az $x \mapsto \int_Y f(x, y) \, dy$ függvény integrálható X -en;
- a (19.4)-beli két kifejezés egyenlő.

Az előző lemma bizonyítása során már meggyőződünk e tulajdonságokról abban az esetben, amikor f egy „téglalap” karakterisztikus függvénye. Lineáris kombinációkat képezve e tulajdonságok minden lépcsős függvényre is érvényben maradnak. Mivel minden integrálható függvény két C_1 -beli függvény különbsége, elegendő ezek után a három tulajdonságot C_1 -beli függvényekre igazolni.

Legyen tehát $f \in C_1$, és legyen (φ_n) olyan monoton növekvő lépcsős függvénysorozat, hogy alkalmas $E \subset X \times Y$ nullahalmazzal

$$\varphi_n(x, y) \nearrow f(x, y) \quad \text{minden } (x, y) \in (X \times Y) \setminus E\text{-re,} \quad (19.5)$$

és így

$$\int_{X \times Y} \varphi_n(x, y) \, dx \, dy \rightarrow \int_{X \times Y} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Mivel (19.4) teljesül f helyett φ_n -re, az utolsó összefüggés átírható az

$$\int_X \left(\int_Y \varphi_n(x, y) \, dy \right) \, dx \rightarrow \int_{X \times Y} f(x, y) \, dx \, dy \quad (19.6)$$

alakban. Beppo Levi tételét alkalmazva innen következik, hogy az

$$\int_Y \varphi_n(x, y) \, dy \quad (19.7)$$

integrálok monoton növekvő sorozata m.m. $x \in X$ -re konvergens, és így korlátos.

Rögzítsünk egy olyan $x \in X$ pontot, ahol fennáll a konvergencia, és amelyre az

$$\{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

szekció nullahalmaz. (Az előző lemma miatt m.m. $x \in X$ ilyen.) Akkor (19.5) alapján

$$\varphi_n(x, y) \nearrow f(x, y) \quad \text{m.m. } y \in Y\text{-ra,}$$

úgyhogy a (19.7)-beli integrálok korlátossága miatt ismét alkalmazható Beppo Levi tétele: az

$$y \mapsto f(x, y)$$

függvény integrálható Y -ban, és

$$\int_Y \varphi_n(x, y) dy \nearrow \int_Y f(x, y) dy.$$

Emlékeztetünk arra, hogy ez a konvergencia m.m. $x \in X$ -re teljesül. Minthogy továbbá az

$$\int_X \left(\int_Y \varphi_n(x, y) dy \right) dx$$

integrálok sorozata (19.6) és f integrálhatósága alapján korlátos, Beppo Levi tételét harmadszor alkalmazva nyerjük, hogy az

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) dy$$

függvény integrálható X -ben, és

$$\int_X \left(\int_Y \varphi_n(x, y) dy \right) dx \rightarrow \int_X \left(\int_Y f dy \right) dx. \quad (19.8)$$

A (19.4) egyenlőség (19.6)-ból és (19.8)-ból következik. \square

Fubini tétele érvényben marad általánosított (végtelen értékeket is megengedő) integrálokra is:

19.9. Tétel. (Tonelli⁸) *Ha létezik az f függvény integrálja $X \times Y$ -ban, akkor a (19.3)-beli szukcesszív integrálok is léteznek, és a három kifejezés egyenlő.*

Megjegyzések.

- Akárcsak Fubini tétele, Tonellié is kiterjeszthető indukcióval tetszőleges véges számú mérték direkt szorzatára.
- Emlékeztetünk arra, hogy minden nem-negatív, mérhető függvénynek létezik az integrálja.

⁸ Tonelli 1909.

Bizonyítás. Az f függvény pozitív és negatív részét tekintve, legalább az egyikükre alkalmazható Fubini tétele. Elegendő tehát nem-negatív, mérhető f függvényekkel foglalkoznunk.

Alkalmazva a 19.5 lemmát rögzítsük véges mértékű A_n halmazok olyan monoton növekvő sorozatát, hogy $\cup A_n$ -en kívül $f = 0$, és vezessük be a

$$\varphi_n := \chi_{A_n} \min\{f, n\}$$

függvényeket. E függvények integrálhatók $X \times Y$ -on a 17.16 állítás (e) része szerint (157. o.), és a konstrukció folytán $\varphi_n \nearrow f$ m.m. Választhatunk tehát olyan E nullahalmazt $X \times Y$ -ban, hogy

$$\varphi_n(x, y) \nearrow f(x, y) \quad \text{minden} \quad (x, y) \in (X \times Y) \setminus E\text{-re.}$$

Figyeljük meg, hogy formálisan ez a reláció azonos (19.5)-tel. Ezért megismételhetjük az előző bizonyítást két apró változtatással:

- Beppo Levi tétele helyett az általánosított Beppo Levi tételt, vagyis a 17.17 állítás (e) részét alkalmazzuk (160. o.);
- a (19.4) egyenlőség érvényessége f helyett φ_n -re most a Fubini tételből következik.

□

Példák. Jelöljük μ -vel a számosság-mértéket \mathbb{R} véges részhalmazain, továbbá legyen \mathbb{R} tetszőleges véges A részhalmazára $\nu(A) = 0$ és $\nu(\mathbb{R} \setminus A) = 1$. A következő példák mutatják, hogy f mérhetőségének a feltétele nem hagyható el.⁹

- A

$$D := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

halmaz f karakterisztikus függvénye a 19.5 lemma alapján nem mérhető, így integrálja sem létezik. A (19.3)-beli két szukcesszív integrál rendre 0-val és 1-gyel egyenlő.

- A

$$D := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{és} \quad E := \{(x, x + 1) : x \in \mathbb{R}\}.$$

halmazok karakterisztikus függvényeinek f különbsége sem mérhető. Ennek ellenére a (19.3)-beli szukcesszív integrálok léteznek, és mindketten nullával egyenlőek.

⁹ Cauchy 1827 (394. o.), Thomae 1878 és du Bois-Reymond 1883 korábbi ellenpéldái a Riemann-integrálható függvények osztályának szűkösségén alapultak.

19.4. * Lebesgue-felbontás

A 18.2. szakasz végén láttuk, hogy minden korlátos változású F függvény előállítható $F = G + H$ alakban, ahol G abszolút folytonos, H pedig szinguláris. Általánosítsuk ezt az eredményt:

Definíciók. Legyen μ, ν és σ három mérték \mathcal{M} -en.

- Azt mondjuk, hogy ν *abszolút folytonos* μ -re nézve, jelben $\nu \ll \mu$, ha

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

- Azt mondjuk, hogy μ és σ *szingulárisak*, jelben $\sigma \perp \mu$, ha van olyan $X = M \cup^* S$ felbontás, hogy $A \in \mathcal{M}$ esetén

$$A \subset S \implies \mu(A) = 0,$$

$$A \subset M \implies \sigma(A) = 0.$$

Más szóval μ és σ a diszjunkt M és S halmazokra vannak koncentrálnak.

Véges ν mértékre ekvivalens definíció adható a szokásos $\varepsilon - \delta$ jelöléssel:

19.10. *Lemma. Ha ν a μ -re nézve abszolút folytonos, véges mérték, akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\mu(A) < \delta$ esetén $\nu(A) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy valamely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan (A_n) sorozat, hogy $\mu(A_n) < 2^{-n}$ és $\nu(A_n) \geq \varepsilon$ minden n -re. Akkor a $B_m := A_m \cup A_{m+1} \cup \dots$ halmazok olyan *monoton fogyó* sorozatot alkotnak, hogy

$$\mu(B_m) < \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} = 2^{1-n} \quad \text{és} \quad \nu(B_m) \geq \nu(A_m) \geq \varepsilon$$

minden m -re. Minthogy a $\mu(B_1)$ és $\nu(B_1)$ mértékek végesek, innen $m \rightarrow \infty$ esetén a

$$\mu(\cap B_m) = 0 \quad \text{és} \quad \nu(\cap B_m) \geq \varepsilon$$

összefüggések adódnak, ellentmondva a $\nu \ll \mu$ relációnak. \square

19.11. Tétel. (Lebesgue-felbontás¹⁰) Legyen μ és φ két mérték az \mathcal{M} σ -gyűrűn. Ha φ σ -véges, akkor léteznek olyan egyértelmű ν és σ mértékek, hogy

$$\nu \ll \mu, \quad \sigma \perp \mu \quad \text{és} \quad \varphi = \nu + \sigma.$$

Bizonyítás.

A létezés bizonyítása véges (tehát korlátos) φ mértékekre. Az

$$\alpha := \sup\{\varphi(A) : A \in \mathcal{M} \text{ et } \mu(A) = 0\}$$

felső határ felvétetik, és így φ korlátossága folytán véges szám. Legyen ugyanis (A_n) olyan sorozat, hogy $\mu(A_n) = 0$ minden n -re, és $\varphi(A_n) \rightarrow \alpha$. Akkor $S := \cup A_n \in \mathcal{M}$ -re $\mu(S) = 0$ és $\varphi(A) = \alpha$.

A

$$\sigma(A) := \varphi(A \cap S) \quad \text{és} \quad \nu(A) := \varphi(A \setminus S)$$

képletek olyan σ és ν mértékeket definiálnak \mathcal{M} -en, amelyek összege φ . Továbbá tetszőleges $A \in \mathcal{M}$ -re

$$\sigma(A \setminus S) = \varphi((A \setminus S) \cap S) = \varphi(\emptyset) = 0,$$

úgyhogy az $M := X \setminus S$ választással $\sigma \perp \mu$.

Ha $\mu(A) = 0$, akkor $\mu(A \cup S) = 0$, tehát $\varphi(A \cup S) \leq \alpha = \varphi(S)$ α és S értelmezése miatt. Következésképpen

$$\nu(A) = \varphi(A \setminus S) = \varphi(A \cup S) - \varphi(S) \leq 0.$$

Ez mutatja, hogy $\nu \ll \mu$.

A létezés bizonyítása az általános esetben. Rögzítsünk olyan \mathcal{M} -beli diszjunkt (P_n) halmazzorozatot, hogy $\varphi(P_n) < \infty$ minden n -re, és $\varphi = 0$ a $P := \cup^* P_n$ halmazon kívül. Alkalmazva az előző lépést minden egyes P_n -en, olyan $S_n \subset P_n$ halmazokat kapunk, hogy $\mu(S_n) = 0$, továbbá

$$A \subset P_n \quad \text{és} \quad \mu(A) = 0 \quad \implies \quad \varphi(A \setminus S_n) = 0.$$

Legyen $S = \cup^* S_n$, és

$$\sigma(A) := \varphi(A \cap S), \quad \nu(A) := \varphi(A \setminus S)$$

minden $A \in \mathcal{M}$ -re. Akkor $\varphi = \nu + \sigma$, továbbá $\sigma \perp \mu$, mert

$$\mu(S) = \sum \mu(S_n) = 0, \quad \text{és} \quad \sigma(A \setminus S) = \varphi(\emptyset) = 0$$

minden $A \in \mathcal{M}$ -re.

¹⁰ Lebesgue 1910, 232–249. o.

Végül $\nu \ll \mu$, mert ha $A \in \mathcal{M}$ és $\mu(A) = 0$, akkor

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \varphi(A \setminus S) \\ &= \varphi((A \setminus P) \setminus S) + \sum \varphi((A \cap P_n) \setminus S) \\ &= \varphi(A \setminus P) + \sum \varphi((A \cap P_n) \setminus S_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben $\varphi(A \setminus P) = 0$ P választása miatt, és $\varphi((A \cap P_n) \setminus S_n) = 0$ S_n választása miatt.

Egyértelműség. Meg kell mutatnunk, hogy ha ν' és σ' is olyan mértékek \mathcal{M} -en, hogy

$$\nu' \ll \mu, \quad \sigma' \perp \mu \quad \text{és} \quad \varphi = \nu' + \sigma',$$

akkor a $\varrho := \nu' - \nu = \sigma - \sigma'$ előjeles mérték azonosan nulla.

Tekintsük a megfelelő $X = M \cup^* S = M' \cup^* S'$ felbontásokat. Tetszőleges $Q \in \mathcal{M}$ esetén

$$\mu(Q \cap (S \cup S')) \leq \mu(S) + \mu(S') = 0,$$

úgyhogy ν' és ν abszolút folytonossága miatt $\varrho(Q \cap (S \cup S')) = 0$.

Másrészt $Q \cap (M \cap M') \subset M \cap M'$ folytán

$$\sigma(Q \cap (M \cap M')) = \sigma'(Q \cap (M \cap M')) = 0,$$

és így $\varrho(Q \cap (M \cap M')) = 0$. Következésképpen

$$\varrho(Q) = \varrho(Q \cap (M \cap M')) + \varrho(Q \cap (S \cup S')) = 0. \quad \square$$

***Példa.** A σ -végesség feltétele nem hagyható el. Tekintsük például a nem-megszámlálható X alaphalmaz megszámlálható A részhalmazaiból és azok komplementumaiból álló \mathcal{M} σ -gyűrűt, és legyen $\mu(A) = 0$, $\mu(X \setminus A) = 1$. Könnyen ellenőrizhető, hogy μ -re nézve az \mathcal{M} -en értelmezett φ számságmértéknek nincs Lebesgue-felbontása.

19.5. Előjeles mértékek. Hahn- és Jordan-felbontás

Tekintsük az X -beli \mathcal{P} félgűrűn adott μ véges mértékhez tartozó integrálelméletet, és jelöljük \mathcal{M} -mel a mérhető halmazok σ -gyűrűjét. Célszerű bevezetni az

$$\int_A f \, d\mu := \int f \chi_A \, d\mu$$

jelölést.

Általánosítsuk a határozatlan integrál fogalmát:

19.12. Állítás. *Ha létezik a mérhető f függvény integrálja, akkor a*

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu$$

képlet σ -additív $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvényt definiál, és $\nu(\emptyset) = 0$.

Bizonyítás. Az f függvény pozitív és negatív részét képezve feltehető, hogy f nem-negatív m.m. Akkor az állítás következik a 17.17 állítás (f) részéből (160. o.). \square

A fenti példa indokolja a mértékek következő általánosításának a bevezetését:

Definíció. *Előjeles mértéken olyan, félgyűrűn értelmezett σ -additív μ halmazfüggvényt értünk, amelyre $\mu(\emptyset) = 0$.*

Példák.

- Minden mérték előjeles mérték is.
- Két mérték különbsége, amelyek közül legalább az egyik véges, előjeles mérték.
- (Szmoljanov¹¹) Tekintsük a nem-megszámlálható X halmazon a következő gyűrűt:

$$\mathcal{R} := \{A \subset X : A \text{ vagy } X \setminus A \text{ véges}\}.$$

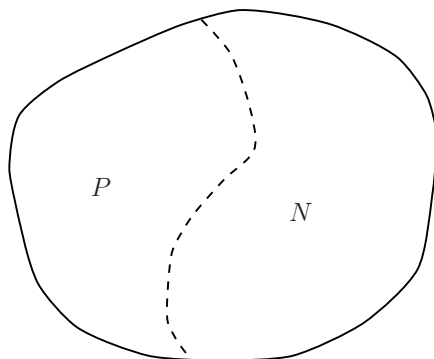
A

$$\mu(A) := |A|, \quad \mu(X \setminus A) := -|A|$$

képletek, ahol $|A|$ a véges A halmaz elemszámát jelöli, előjeles mértéket definiálnak \mathcal{R} -en.

Az előjeles mértékek vizsgálata igen általános feltételek mellett visszavezethető a mértékekére:

¹¹ Lásd Gurevich–Silov 1966, 180. o.



19.1. ábra. Hahn-felbontás

19.13. Tétel. Legyen μ előjeles mérték az \mathcal{M} σ -gyűrűn.

(a) (Hahn-felbontás¹²) Létezik olyan $X = P \cup^* N$ felbontás, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{M}$ -re $A \cap P, A \cap N \in \mathcal{M}$,

$$\mu(A \cap P) \geq 0 \quad \text{és} \quad \mu(A \cap N) \leq 0.$$

(Lásd a 19.1 ábrát.)

(b) (Jordan-felbontás¹³) A

$$\mu_+(A) := \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{M}, B \subset A\}$$

és

$$\mu_-(A) := -\inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{M}, B \subset A\}$$

képletek olyan mértékeket értelmeznek \mathcal{M} -en, amelyekre $\mu = \mu_+ - \mu_-$.

Definíció. A $|\mu| := \mu_+ + \mu_-$ mértéket μ teljes változásának hívjuk.

Megjegyzések.

- A bizonyítás azt is mutatni fogja, hogy μ felülről vagy alulról korlátos, és így a μ_+, μ_- mértékek közül legalább az egyik korlátos. Továbbá az első esetben $P \in \mathcal{M}$, a második esetben pedig $N \in \mathcal{M}$.
- A tételben \mathcal{M} σ -gyűrű volta lényeges: például a Szmoljanov-féle előjeles mértéknek nincs Hahn-felbontása. Egy ilyen felbontásra ugyanis szükségképpen $N = \emptyset$ -nak kellene teljesülnie, de akkor

¹² Hahn 1921, 404. o.

¹³ Jordan 1881.

μ nem vehetne fel negatív értékeket. A Jordan-féle felbontás sem érvényes ebben az esetben, mert egyszerűen látható, hogy $\mu_+(X) = \mu_-(X) = \infty$, tehát $\mu_+(X) - \mu_-(X)$ nincs értelmezve.

- Vegyük észre, hogy σ -gyűrűn értelmezett véges előjeles mérték szükségképpen korlátos is, hiszen ha például alkalmas halmazsorozatra $\mu(A_n) > 2^n$ minden n -re, akkor $\mu(\cup A_n) = \infty$.

A következő segédítél előkészíti a tétel bizonyítását.

Definíció. Legyen μ előjeles mérték \mathcal{M} -en. Az $A \in \mathcal{M}$ halmazt *negatívnak* hívjuk, ha $\mu(B) \leq 0$ A minden \mathcal{M} -hez tartozó részhalmazára.

19.14. Lemma. Legyen $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték az \mathcal{M} σ -gyűrűn.

(a) Ha $A, B \subset \mathcal{M}$ és $B \subset A$, akkor

$$\mu(A) < \infty \implies \mu(B) < \infty \quad \text{és} \quad \mu(A) > -\infty \implies \mu(B) > -\infty.$$

(b) μ nem veheti fel mindkét végtelen értéket.

(c) Ha $A \in \mathcal{M}$ és $\mu(A) < 0$, akkor létezik olyan negatív A' részhalmaza A -nak, amelyre $\mu(A') \leq \mu(A)$.

Bizonyítás.

(a) Ez azonnal következik az $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$ egyenlőségből, amelyben az összeg definíció szerint értelmezve van.

(b) Ha két halmazra $\mu(B) = \infty$ és $\mu(C) = -\infty$ volna, akkor $\mu(B \cup C)$ nem lehetne értelmezve (a) miatt.

(c) Legyen k_1 a legkisebb természetes szám, amelyhez található A -nak $\mu(A_1) \geq 1/k_1$ tulajdonságú részhalmaza. Ha nincs ilyen k_1 , akkor az $A' := A$ választás megfelel. Egyébként

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A \setminus A_1),$$

és innen $\mu(A \setminus A_1) \leq \mu(A)$.

Legyen most k_2 a legkisebb természetes szám, amelyhez található $A \setminus A_1$ -nek $\mu(A_2) \geq 1/k_2$ tulajdonságú részhalmaza. Ha nincs ilyen k_2 , akkor az $A' := A \setminus A_1$ választás megfelel. Az eljárást folytatva vagy előbb-utóbb egy megfelelő

$$A' := A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

halmazhoz jutunk, vagy pedig A részhalmazainak olyan \mathcal{M} -beli, diszjunkt (A_n) sorozatát kapjuk, hogy alkalmas k_n természetes számokkal $\mu(A_n) \geq 1/k_n$ minden n -re.

Vegyük észre, hogy az utóbbi esetben

$$\sum \frac{1}{k_n} \leq \sum \mu(A_n) = \mu(\cup^* A_n) < \infty,$$

hiszen $\cup^* A_n \in \mathcal{M}$ és $\cup^* A_n \subset A$ folytán $\mu(A) < \infty$ az előző lemma (a) része miatt. Innen következik, hogy $k_n \rightarrow \infty$.

Legyen $A' := A \setminus \cup^* A_n$, akkor $A' \in \mathcal{M}$ és

$$\mu(A) = \mu(A') + \mu(\cup^* A_n)$$

az additivitás miatt. Következésképpen $\mu(A') \leq \mu(A)$.

Megmutatjuk végül, hogy ha $B \in \mathcal{M}$ és $B \subset A'$, akkor $\mu(B) \leq 0$. Mivel $k_n \rightarrow \infty$, $k_n \geq 2$ és $\mu(B) < 1/(k_n - 1)$ minden elég nagy n -re. Innen $n \rightarrow \infty$ esetén a keresett $\mu(B) \leq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. \square

A 19.13 tétel bizonyítása.

(a) A19.14 lemma (b) része alapján feltehető, hogy μ nem veszi fel például a $-\infty$ értéket. Legyen

$$a = \inf \mu(A),$$

ahol A végigfutja \mathcal{M} negatív halmazait; minthogy az üres halmaz negatív halmaz, $a \leq 0$.

Tekintsük negatív halmazok olyan (A_n) sorozatát, amelyre $\mu(A_n) \rightarrow a$. Akkor $N := \cup A_n \in \mathcal{M}$ is negatív halmaz, és $\mu(N) = a$. Minthogy μ nem veszi fel a $-\infty$ értéket, innen következik, hogy $a > -\infty$, tehát a véges szám.

Legyen $P = X \setminus N$, akkor $X = P \cup^* N$. Ha $A \in \mathcal{M}$, akkor $N \in \mathcal{M}$ miatt

$$A \cap N \in \mathcal{M} \quad \text{és} \quad A \cap P = A \setminus (A \cap N) \in \mathcal{M}.$$

Továbbá N negativitása miatt $\mu(A \cap N) \leq 0$. Hátra van még a $\mu(A \cap P) \geq 0$ egyenlőtlenség igazolása.

Az ellentétes $\mu(A \cap P) < 0$ esetben az előző lemma alapján volna $A \cap P$ -nek $\mu(A') \leq \mu(A \cap P)$ tulajdonságú *negatív* A' részhalmaza. Akkor $N \cup^* A'$ is negatív volna, azonban akkor a

$$\mu(N \cup^* A') = \mu(N) + \mu(A') = a + \mu(A') < a$$

egyenlőtlenség ellentmondana a definíciójának.

(b) Tegyük fel újra, hogy μ nem veszi fel például a $-\infty$ értéket, és tekintsük az imént kapott $X = P \cup^* N$ felbontást. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\mu_+(A) = \mu(A \cap P) \quad \text{és} \quad \mu_-(A) = -\mu(A \cap N)$$

minden $A \in \mathcal{M}$ -re. Ebből következik, hogy μ_+ és μ_- mérték, és hogy $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Végül a μ_- mérték korlátos, hiszen

$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \leq -\mu(N) = -a < \infty$$

minden $A \in \mathcal{M}$ -re. □

19.6. Radon–Nikodým tétel

Az előző szakasz elején megmutattuk, hogy a határozatlan integrálok előjeles mértékek. Felmerül a kérdés, hogy mely előjeles mértékek származtathatók ilyen módon. A jelen szakaszban általánosítjuk a Lebesgue–Vitali-féle Newton–Leibniz formulát (171. o.).

Rögzítsünk az egész szakaszra valamely X -beli \mathcal{P} félgűrűn értelmezett véges μ mértéket, és tekintsük a hozzátartozó integrálelméletet. Jelöljük a mérhető halmazok \mathcal{M} σ -gűrűjére kiterjesztett mértéket is μ -vel.

Definíciók. Legyen ν előjeles mérték \mathcal{M} -en.

- Azt mondjuk, hogy ν *abszolút folytonos* μ -re nézve, jelben $\nu \ll \mu$, ha

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

- Azt mondjuk, hogy ν *mérhető tartójú* μ -re nézve, ha van olyan $M \in \mathcal{M}$ halmaz, hogy $\nu(A) = 0$ minden M -től diszjunkt $A \in \mathcal{M}$ halmazra.

Megjegyzés. A Hahn-felbontás felhasználásával könnyen látható, hogy mindkét definícióban $\nu(A) = 0$ helyett a $|\nu|(A) = 0$ konklúzió is érvényes.

A következő alapvető tételben azonosítunk két mérhető függvényt, ha m.m. egyenlők egymással.¹⁴

¹⁴ Ha az alábbi tételnek csak a véges mértékekre vonatkozó részét kívánjuk bizonyítani, akkor a következő lemma (b) része elhagyható, és elég a tétel bizonyításának hat lépése közül csak az első hármat tekinteni.

19.15. Tétel. (Radon–Nikodým¹⁵) A

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{M} \quad (19.9)$$

formula bijekciót létesít a μ -re nézve mérhető és integrállal rendelkező f függvények, valamint a μ -re nézve abszolút folytonos és mérhető tartójú előjeles ν mértékek között. Emellett

- $f \geq 0$ m.m. $\iff \nu$ mérték;
- f integrálható $\iff \nu$ véges (és akkor korlátos).

Definíció. A tételbeli f függvényt ν μ -re vonatkozó Radon–Nikodým deriváltjának hívjuk, és $d\nu/d\mu$ -vel jelöljük.

Példa. A fenti elnevezés magyarázatára jegyezzük meg, hogy ha $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút folytonos függvény az $[a, b]$ kompakt intervallumon a 18. fejezet értelmében, akkor a

$$\nu(I) := F(d) - F(c), \quad I = [c, d]$$

képlet olyan előjeles mértéket definiál az $[a, b]$ -beli félig nyílt intervallumok félgűrűjén, hogy

$$\nu(I) = \int_I F' \, d\mu$$

mindezen intervallumokra a 18.4 tétel értelmében (171. o.).

Megjegyzés. A következő bizonyítás nem konstruktív. Speciális esetekben konstruktív bizonyítás is adható.¹⁶

Szükségünk lesz az alábbi segédtétele:

19.16. Lemma. Tegyük fel, hogy a μ mérték véges (tehát korlátos), és legyen ν a μ -re nézve abszolút folytonos mérték.

(a) Ha ν nem azonosan nulla, akkor létezik olyan $A \in \mathcal{M}$ halmaz és $\varepsilon > 0$ szám, hogy $\mu(A) > 0$, és

$$\varepsilon \mu(A \cap B) \leq \nu(A \cap B) \quad \text{minden } B \in \mathcal{M}\text{-re.}$$

(b) Létezik véges ν -mértékű halmazoknak olyan diszjunkt (F_n) sorozata, hogy bármely $F := \cup F_n$ -től diszjunkt, mérhető A halmazra $\mu(A) = 0$ és $\nu(A) = \infty$ egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül.

¹⁵ Radon 1913 (1342–1351. o.), Nikodým 1930 (167–179. o.).

¹⁶ Lásd például Rudin 1986. Ugyanitt megtalálható Neumann 1940 (124–130. o.) alternatív, a merőleges vetítésen alapuló szép bizonyítása is.

Bizonyítás.

(a) Tekintsük minden n természetes számra az $\nu - n^{-1}\mu$ előjeles mértéknek valamely $X = P_n \cup^* N_n$ Hahn-felbontását, és legyen

$$P = \cup P_n, \quad N = \cap N_n.$$

Mivel $\nu - n^{-1}\mu$ felülről korlátos, $P_n \in \mathcal{M}$ minden n -re. Elég belátni, hogy valamely n -re $\mu(P_n) > 0$, hiszen akkor az $A := P_n$ és $\varepsilon := 1/n$ választás megfelel.

Tetszőleges N -beli mérhető B halmaz esetén $\nu(B) = 0$, hiszen $N \subset N_n$ folytán

$$0 \leq \nu(B) \leq \frac{1}{n}\mu(B)$$

minden n -re. Mivel ν nem azonosan nulla, innen $\nu(P) > 0$, de akkor ν abszolút folytonossága miatt $\mu(P) > 0$ is teljesül. A σ -szubadditivitás miatt

$$0 < \mu(P) \leq \sum \mu(P_n),$$

úgyhogy $\mu(P_n) > 0$ legalább egy n -re.

(b) Jelöljük \mathcal{A} -val azon mérhető halmazok σ -gyűrűjét, amelyek befedhetők megszámlálható sok véges ν -mértékű halmazzal.¹⁷ Az

$$\alpha := \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}\}$$

felső határ felvétetik valamely F halmazon, mert ha $(B_n) \subset \mathcal{A}$ és $\mu(B_n) \rightarrow \alpha$, akkor $F := \cup B_n \in \mathcal{A}$ és $\mu(B_n) \leq \mu(F)$ minden n -re, ahonnan $\mu(F) = \alpha$. Vegyük észre azt is, hogy μ korlátossága miatt α véges szám.

Meg kell mutatnunk, hogy ha valamely F -től diszjunkt, mérhető A halmazra $\nu(A) < \infty$, akkor $\mu(A) = 0$. Minthogy $F \cup^* A \in \mathcal{A}$,

$$\alpha \geq \mu(F \cup^* A) = \mu(F) + \mu(A) = \alpha + \mu(A);$$

α végeessége miatt ebből a $\mu(A) = 0$ egyenlőség következik. \square

A 19.15 tétel bizonyítása. A következőkben az „integrálható”, „m.m.”, abszolút folytonos”, „mérhető tartójú” jelzők mindig a μ mértékre vonatkoznak, és a rövidség kedvéért elhagyjuk a „ μ -re nézve” kifejezést.

Első lépés. Ha f mérhető, m.m. nem-negatív függvény, akkor a 19.12 állítás alapján (196. o.) a (19.9) képlet mértéket definiál. Ez a ν mérték μ -re nézve abszolút folytonos, mert $\mu(A) = 0$ esetén $f\chi_A = 0$ m.m., és így $\nu(A) = 0$. Továbbá ν mérhető tartójú is, hiszen f eltűnik valamely mérhető halmazon kívül a 19.5 lemma miatt (186. o.), és ezen a halmazon kívül ν

¹⁷ Szokás ezeket a halmazokat ν -re nézve mérhetőknak vagy σ -végeseknek is nevezni.

is eltűnik. A definícióból az is világos, hogy integrálható f -re a ν mérték korlátos.

Az általános eset a fentiekből következik f pozitív és negatív részeinek a szétválasztásával.

Második lépés. Megmutatjuk f egyértelműségét. Ha a g függvény is analóg tulajdonságokkal rendelkezik, akkor a h különbségükre $\int_A h \, d\mu = 0$ minden $A \in \mathcal{M}$ esetén. Válasszunk m.m. h -hoz tartó (φ_n) lépcsős függvénysorozatot. Akkor $\int \varphi_n h \, d\mu = 0$ minden n -re, és $\varphi_n h \rightarrow h^2$ m.m. A Fatou-lemmát (153. o.) alkalmazva innen $\int h^2 \, d\mu = 0$, tehát $h = 0$ m.m. a 17.9 következmény (c) része alapján (150. o.).

Harmadik lépés. Legyenek μ és ν véges mértékek, és tegyük fel, hogy ν abszolút folytonos. Jelöljük \mathcal{F} -fel mindazon integrálható és m.m. nem-negatív f függvények halmazát, amelyekre

$$\int_A f \, d\mu \leq \nu(A)$$

minden $A \in \mathcal{M}$ esetén. Minthogy ν véges és így korlátos, az

$$\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} \int f \, d\mu$$

képlet nem-negatív (mert $0 \in \mathcal{F}$), véges számot definiál.

A felső határ felvétetik. Legyen ugyanis $(f_n) \in \mathcal{F}$ olyan sorozat, hogy

$$\int f_n \, d\mu \rightarrow \alpha,$$

akkor $g_n := \max\{f_1, \dots, f_n\} \in \mathcal{F}$ minden n -re. Ugyanis minden $A \in \mathcal{M}$ halmaznak van olyan $A_1 \cup^* \dots \cup^* A_n$ partíciója, hogy $g_n = f_j$ mindegyik A_j -n, és ekkor

$$\int_A g_n \, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f_j \, d\mu \leq \sum_{j=1}^n \nu(A_j) = \nu(A).$$

Beppo Levi tétele alapján a g_n függvények egy integrálható és m.m. nem-negatív f függvényhez tartanak m.m. Alkalmazva a Fatou-lemmát a $(\chi_A g_n)$ függvénysorozatra, az $\int_A g_n \, d\mu \leq \nu(A)$ egyenlőtlenségekből következik, hogy $f \in \mathcal{F}$. Végül a m.m. érvényes $f_n \leq g_n \leq f$ egyenlőtlenségekből és az $\int f_n \, d\mu \rightarrow \alpha$ relációból a keresett $\int f \, d\mu = \alpha$ egyenlőség adódik.

Befejezésül megmutatjuk, hogy a

$$\nu_0(A) := \nu(A) - \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

képlettel definiált véges mérték azonosan nulla. Ellenkező esetben az előző lemma (a) része alapján volna olyan $A \in \mathcal{M}$ halmaz és $\varepsilon > 0$ szám, hogy $\mu(A) > 0$, és

$$\varepsilon\mu(A \cap B) \leq \nu(A \cap B) - \int_{A \cap B} f \, d\mu$$

minden $B \in \mathcal{M}$ -re. Minthogy $f \in \mathcal{F}$ miatt

$$0 \leq \nu(B \setminus A) - \int_{B \setminus A} f \, d\mu,$$

a két egyenlőséget összeadva azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon\mu(A \cap B) \leq \nu(B) - \int_B f \, d\mu,$$

vagyis

$$\int_B f + \varepsilon\chi_A \, d\mu \leq \nu(B)$$

minden $B \in \mathcal{M}$ -re. Így $f + \varepsilon\chi_A \in \mathcal{F}$, ez azonban lehetetlen, mert

$$\int f + \varepsilon\chi_A \, d\mu = \int f \, d\mu + \varepsilon\mu(A) = \alpha + \varepsilon\mu(A) > \alpha.$$

Negyedik lépés. Legyen μ véges mérték, ν pedig abszolút folytonos, mérhető tartójú mérték. Ha (F_n) az előző lemma (b) része által biztosított halmazsorozat, akkor bármely F_n -re alkalmazható az előző lépés a μ és ν mértékek F_n -re vett leszűkítéseire. Jelöljük f_n -nel a megfelelő Radon–Nikodým deriváltat. Értelmezzük az f függvényt az $f := f_n$ képlettel az F_n halmazokon, és az $f := \infty$ képlettel a $\cup F_n$ halmaz E komplementumán. Világos, hogy f mérhető, és m.m. nem-negatív. Igazoljuk a (19.9) egyenlőséget.

Mivel minden $A \in \mathcal{M}$ az $A \cap E$ és $A \cap F_n$ halmazok diszjunkt uniója, és mivel f_n értelmezése folytán

$$\nu(A \cap F_n) = \int_{A \cap F_n} f_n \, d\mu$$

minden n -re, elég megmutatnunk, hogy

$$\nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} \infty \, d\mu;$$

ezeket összeadva ugyanis (19.9) következni fog.

Ha $\nu(A \cap E) = \infty$, akkor ν abszolút folytonossága miatt $\mu(A \cap E) > 0$, és így $\int_{A \cap E} \infty \, d\mu = \infty$. Egyébként $\mu(A \cap E) = 0$ az E halmaz értelmezése

miatt; innen nyilván $\int_{A \cap E} \infty d\mu = 0$, másrészt $\nu(A \cap E) = 0$ az abszolút folytonosság miatt.

Ötödik lépés. Legyen μ tetszőleges, ν pedig abszolút folytonos és mérhető M tartójú mérték. Legyen $M = \cup^* M_n$, ahol $\mu(M_n) < \infty$ minden n -re. Alkalmazva az előző lépést minden M_n -re, az f_n függvényeket kapjuk. Értelmezzük az f függvényt az $f := f_n$ képlettel az M_n halmazon, és az $f := 0$ képlettel az M halmaz komplementumán. Világos, hogy f mérhető, és m.m. nem-negatív. Végül minden $A \in \mathcal{M}$ -re fennáll a következő egyenlőség, amely (19.9)-et bizonyítja:

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap M) = \sum \nu(A \cap M_n) \\ &= \sum \int_{A \cap M_n} f d\mu = \int_{A \cap M} f d\mu = \int_A f d\mu. \end{aligned}$$

Hatodik lépés. Rátérve az általános esetre, Jordan tétele (197. o.) alapján ν két olyan ν_+ és ν_- mérték különbsége, amelyeknek legalább az egyike korlátos. Továbbá a konstrukciójuk miatt μ mérhető tartóján kívül ezek is eltűnnek. Az edigiek alapján léteznek tehát olyan mérhető és m.m. nem-negatív f_{\pm} függvények, amelyek közül legalább az egyik integrálható, és amelyek teljesítik a (19.9) egyenlőséget f és ν helyett f_{\pm} -szal és ν_{\pm} -szal. A két egyenlőség különbségét véve (19.9) adódik. \square

A Radon–Nikodým tétel segítségével messzemenően általánosítható a helyettesítéssel integrálás szabálya.¹⁸ Ha adva van egy másik ν mérték is \mathcal{M} -en, akkor tekintsük a ν véges részéhez tartozó integrálméletet is. Az integrál konstrukciója folytán a ν -re nézve mérhető halmazok \mathcal{N} rendszere része \mathcal{M} -nek.

19.17. Állítás. Legyen ν a μ -re nézve abszolút folytonos és mérhető tartójú mérték, és jelöljük a rövidség kedvéért f -fel a $d\nu/d\mu$ Radon–Nikodým deriváltat. Ha az $\int g d\nu$ integrál létezik, akkor az $\int gf d\mu$ integrál is létezik, és

$$\int gf d\mu = \int g d\nu. \quad (19.10)$$

¹⁸ A következő állítás kiterjeszti Euler 1769 (303. o.), Lagrange 1773 (624. o.) és Jacobi 1841 (436. o.) klasszikus eredményeit.

Bizonyítás.

(a) Ha $\nu(P) = 0$, akkor $f = 0$ P -n μ -m.m., úgyhogy $\mu(P) = 0$. Ugyanis f -et P pontjaiban 0-val helyettesítve az új függvény is teljesíti a Radon–Nikodým deriváltra kirótt feltételeket, márpedig a Radon–Nikodým derivált μ -nullahalmaztól eltekintve egyértelmű.

(b) Tegyük fel egyelőre, hogy a μ mérték véges (tehát korlátos). Ha g valamely \mathcal{M} -beli halmaz karakterisztikus függvénye, akkor (19.10) a Radon–Nikodým tételbeli (19.9) egyenlőségre redukálódik. Véges ν -mértékű halmazok karakterisztikus függvényeinek a lineáris kombinációit véve adódik, hogy (19.10) ν -lépcsős függvényekre is fennáll. (A μ mérték végeessége miatt ezek μ -lépcsősök is.)

Ha ν -lépcsős függvények (g_n) sorozatára $g_n \nearrow g$ ν -m.m., ahol g ν -integrálható, akkor $(g_n f)$ ν -mérhető függvények olyan sorozata, hogy $g_n f \nearrow g f$ ν -m.m. Az (a) pont szerint ez a reláció μ -m.m. is érvényes, úgyhogy Beppo Levi tétele alapján g eleget tesz (19.10)-nek.

Minthogy minden ν -integrálható függvény két fenti típusú függvény különbsége, innen adódik, hogy (19.10) minden ν -integrálható függvényre teljesül.

(c) Véges μ mértékek esetén a bizonyítás befejezéséhez elegendő megmutatnunk, hogy (19.10) fennáll minden olyan g függvényre is, amely ν -m.m. nem-negatív, és amelynek létezik a ν -integrálja. A $g_n := \min\{g, n\}$ függvények ν -integrálhatóak, tehát az előző lépés alapján

$$\int g_n f \, d\mu = \int g_n \, d\nu$$

minden n -re. Továbbá $g_n \nearrow g$ ν -m.m., ahonnan (a) miatt $g_n f \nearrow g f$ μ -m.m. Alkalmazva az általánosított Beppo Levi tételt innen (19.10) adódik.

(d) Ha μ nem véges, akkor válasszunk olyan diszjunkt $(P_n) \subset \mathcal{M}$ halmazsorozatot, hogy $\nu(P_n) < \infty$ minden n -re, és ν, f eltűnnek $\cup^* P_n$ -en kívül. Alkalmazva mindegyik P_n halmazon az előző lépésbeli eredményt, a keresett egyenlőséget kapjuk:

$$\int g f \, d\mu = \sum \int \chi_{P_n} g f \, d\mu = \sum \int \chi_{P_n} g \, d\nu = \int g_n \, d\nu. \quad \square$$

A Radon–Nikodým tétel másik alkalmazásként tanulmányozzuk a mértékek kiterjesztésének egyértelműségét. A következő eredmény lényegesen általánosítja a 19.2 állítást (181. o.):

19.18. *Állítás. *Ha valamely $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték megegyezik μ -vel \mathcal{P} -n, akkor valójában $\mu = \nu$ az egész \mathcal{M} -en is.*

Bizonyítás. Tetszőlegesen adott $M \in \mathcal{M}$ -re tekintsük μ és ν leszűkítését $\{M \cap A : A \in \mathcal{M}\}$ -re. A leszűkített mértékeket továbbra is ugyanúgy jelölve ν abszolút folytonos és mérhető tartójú μ -re nézve. (Az utóbbi tulajdonság a 19.5 lemmából következik, 186. o.). A megfelelő $f := d\mu/d\nu$ Radon–Nikodým derivált egyértelműsége miatt elég megmutatnunk, hogy

$$\int gf \, d\mu = \int g \, d\mu$$

minden $\{M \cap A : A \in \mathcal{M}\}$ -beli halmaz g karakterisztikus függvényére. Ennél többet igazolunk: az egyenlőség minden olyan mérhető függvényre teljesül, amelyre a jobboldali integrál értelmezve van.

Az egyenlőség a Radon–Nikodým tételből következik, ha g valamely \mathcal{P} -beli P halmaz karakterisztikus függvénye, mert $\nu(P) = \mu(P)$. Innen következik az egyenlőség minden (μ -re nézve) lépcsős függvényre, majd a Beppo Levi tétel alapján minden C_1 -beli g függvényre, végül pedig különbségképzéssel minden μ -integrálható függvényre is. Az általános eset ezek után az általánosított Beppo Levi tétel alkalmazásával, majd újabb különbségképzéssel adódik. \square

19.7. * Mértékek kiterjesztése σ -algebrákra

Az eddig felépített integrálmélet zavaró vonása, hogy a konstans függvények, illetve az alaphalmaz nem mindig mérhetőek, és így az integráljuk, illetve a mértékük sincs mindig értelmezve. Ezen azonban könnyen segíthetünk:

Definíció. Az f függvény *lokálisan mérhető*, ha $f\chi_P$ minden $P \in \mathcal{P}$ -re mérhető.

Megjegyzések.

- Ha f lokálisan mérhető, akkor az fg szorzat minden mérhető g függvényre mérhető. Lépcsős g függvényekre ez azonnal következik a definícióból. Az általános esetben rögzítsünk m.m. g -hez tartó (φ_n) lépcsős függvényt. Akkor az $f\varphi_n$ függvények mérhetőek, és $f\varphi_n \rightarrow fg$ m.m., tehát fg is mérhető.
- A mérhetőség maga után vonja a lokális mérhetőséget.

- A konstans függvények mindig lokálisan mérhetőek. Ha mérhetőek is, akkor a mérhetőség és a lokális mérhetőség fogalma egybeesik. Ez a helyzet például a 17. fejezetben tanulmányozott $X = \mathbb{R}$ esetben, általánosabban \mathbb{R}^N -ben, valamint a valószínűesszámtáti alkalmazásokban.

A 17.16 állítás (157. o.) bizonyításának egyszerű adaptálásával adódik a

19.19. Állítás.

- (a) *A konstans függvények lokálisan mérhetőek.*
- (b) *Ha f lokálisan mérhető, és $f = g$ m.m., akkor g is lokálisan mérhető.*
- (c) *Ha $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és f_1, \dots, f_N véges értékű, lokálisan mérhető függvények, akkor a $h := F(f_1, \dots, f_N)$ összetett függvény is lokálisan mérhető. Speciálisan, ha f, g véges értékű és lokálisan mérhető függvények, akkor $|f|$, $f + g$, $f - g$, fg , $\max\{f, g\}$ és $\min\{f, g\}$ is ilyenek.*
- (d) *Ha f lokálisan mérhető függvény és $f \neq 0$ m.m., akkor $1/f$ is lokálisan mérhető.*
- (e) *Ha f lokálisan mérhető, g integrálható, és $|f| \leq g$ m.m., akkor f is integrálható.*
- (f) *Ha lokálisan mérhető függvények (f_n) sorozatára $f_n \rightarrow f$ m.m., akkor f is lokálisan mérhető.*

Tovább általánosítjuk az integrált is:

Definíció. Legyen f lokálisan mérhető függvény.

- Ha f nem-negatív m.m. és nem integrálható, akkor legyen $\int f \, dx = \infty$.
- Ha f_+ és f_- közül legalább az egyik integrálható, akkor legyen

$$\int f \, dx = \int f_+ \, dx - \int f_- \, dx.$$

Megjegyzések.

- Ha f_+ és f_- egyike sem integrálható, akkor a jobboldali összeg nincs értelmezve.
- Ha f integrálható, akkor f_+ és f_- is az, és az integrál linearitása folytán visszakapjuk a korábbi definíciót.
- Az „integrálható” jelzőt továbbra is fenntartjuk arra az esetre, amikor az integrál véges.

Az integrálási szabályokra vonatkozó 17.17 állítás (160. o.) szó szerint érvényben marad, a bizonyításban is csak a (d) részben kell h mérhetősége helyett annak lokális mérhetőségére hivatkozni.

Az integrál után általánosítsuk a mértéket is:

Definíció. Az A halmaz *lokálisan mérhető*, ha a karakterisztikus függvénye lokálisan mérhető.

Megjegyzés. Az X alaphalmaz mindig lokálisan mérhető. A 19.5 lemma alapján (186. o.) X pontosan akkor mérhető, ha befedhető megszámlálható sok \mathcal{P} -beli (tehát véges mértékű) halmazzal.

A lokálisan mérhető halmazok struktúrájának a leírásához vezessük be a következő fogalmat:

Definíció. X -beli σ -algebrán olyan X -beli σ -gyűrűt értünk, amely tartalmazza X -et. Ekvivalens módon X -beli halmazok \mathcal{M} rendszere σ -algebra, ha teljesíti a következő feltételeket:

- $\emptyset \in \mathcal{M}$;
- ha $A \in \mathcal{M}$, akkor $X \setminus A \in \mathcal{M}$;
- ha (A_n) diszjunkt \mathcal{M} -beli halmazsorozat, akkor $\cup^* A_n \in \mathcal{M}$.

Például $\{\emptyset, X\}$ és 2^X X -beli σ -algebrák.

Könnyen igazolható a 17.18 állítás (162. o.) alábbi változata:

19.20. Állítás.

- (a) A lokálisan mérhető halmazok σ -algebrát alkotnak.
 (b) Ha f lokálisan mérhető függvény, akkor az

$$\{f > c\}, \quad \{f < c\}, \quad \{f \geq c\}, \quad \{f \leq c\}$$

halmazok lokálisan mérhetőek minden $c \in \overline{\mathbb{R}}$ -ra. Megfordítva, ha a négyféle halmaz egyike minden $c \in \mathbb{R}$ -re lokálisan mérhető, akkor f is lokálisan mérhető.

Az eddigiek alapján a

$$\mu(A) := \int \chi_A d\mu$$

képlet lehetővé teszi a μ mérték kiterjesztését a lokálisan mérhető halmazok $\overline{\mathcal{M}}$ σ -algebrájára. Érvényes a 19.6 állítás (187. o.) következő változata:

19.21. Állítás.

- (a) Tetszőleges véges $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ mértékből kiindulva a fenti módon nyert $\mu : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték teljes.

- (b) Megfordítva, bármely teljes mérték megegyezik a véges részből kiindulva kapott $\mu : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mértékkel.
- (c) Általánosabban bármely mérték a véges részből kiindulva kapott $\mu : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték leszűkítése.

Megjegyzés. Az állítás alapján a félreértés veszélye nélkül beszélhetünk egy tetszőleges mértéktér szerinti integrálról, azon a mérték véges részéhez rendelt integrálméleletet értve.

Bizonyítás.

(a) egyszerűen adódik a 19.6 állításból, ha megjegyezzük, hogy $\mu(A) = \infty$ minden $A \in \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$ halmazra.

(b) és (c). Legyen $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\varrho : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték véges része, és $\mu : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a fenti módon kiterjesztett mérték. Elegendő megmutatnunk, hogy $\mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{M}}$, és $\varrho(A) = \mu(A)$ minden $A \in \mathcal{R}$ -re.

Ha $A \in \mathcal{R}$ és $P \in \mathcal{P}$, akkor $A \cap P \in \mathcal{R}$, hiszen $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$; továbbá ϱ monotonitása és \mathcal{P} értelmezése miatt

$$\varrho(A \cap P) \leq \varrho(P) = \mu(P) < \infty.$$

Innen \mathcal{P} definíciója miatt $A \cap P \in \mathcal{P}$, tehát speciálisan $A \cap P \in \mathcal{M}$. Figyelembe véve $\overline{\mathcal{M}}$ definícióját innen $A \in \overline{\mathcal{M}}$, tehát $\mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{M}}$.

Hátra van $A \in \mathcal{R}$ esetén a $\mu(A) = \varrho(A)$ egyenlőség igazolása. Ez nyilvánvaló, ha mindkét oldal végtelen. Ha $\varrho(A) < \infty$, akkor $A \in \mathcal{P}$, tehát $\mu(A) = \varrho(A)$.

Ha $\mu(A) < \infty$, akkor χ_A integrálható, és így mérhető. A 19.5 lemma alapján (186. o.) van olyan diszjunkt $(P_n) \subset \mathcal{P}$ sorozat, hogy $A \subset \cup^* P_n$. Mivel $A \in \mathcal{R}$, P_n -t $A \cap P_n$ -nel helyettesítve az is feltehető, hogy $A = \cup^* P_n$. Akkor

$$\varrho(A) = \sum \varrho(P_n) = \sum \mu(P_n) = \mu(A),$$

mert \mathcal{P} -n $\varrho = \mu$. □

Mindazonáltal a következő megjegyzések mutatják, hogy a σ -algebra és a lokális mérhetőség nem olyan hasznos fogalmak, mint a σ -gyűrű és a mérhetőség:

Megjegyzések.

- Azt várhatnánk, hogy a Radon–Nikodým tételbeli (19.9) képlet kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a lokálisan mérhető f függvények és az abszolút folytonos előjeles mértékek között. A

válasz azonban nemleges: minden lokálisan mérhető függvény előjeles mértéket definiál ily módon, de nem minden előjeles mérték ilyen alakú.¹⁹

- Tonelli tétele a szukcesszív integrálásról nem marad érvényben a most általánosított integrálra: a 191. oldali ellenpéldákban szereplő f függvények lokálisan mérhetőek.
- A mértékek egyértelmű kiterjesztéséről szóló 19.18 állítás (206. o.) nem marad érvényben az $\overline{\mathcal{M}}$ σ -algebrára.²⁰ Tekintsük ugyanis a nem-megszámlálható X alaphalmaz véges részhalmazainak a \mathcal{P} félgyűrűjén az azonosan nulla μ mértéket. Akkor \mathcal{M} a megszámlálható részhalmazokból áll, $\overline{\mathcal{M}}$ pedig a megszámlálható halmazokból és azok komplementumaiból. Továbbá az integrálelmélet alapján kapott $\mu : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérték is azonosan nulla. Azonban végtelen sok más kiterjesztést is kaphatunk: legyen tetszőlegesen rögzített pozitív α számra $\nu(A) = 0$ és $\nu(X \setminus A) = \alpha$ minden megszámlálható $A \subset X$ halmazra.

¹⁹ Lásd például Halmos 1950, 122. o.

²⁰ Ezt a példát Czách László közölte a szerzővel.

6. rész

Függvényterek

Mindennek ellen lehet állni, csak a kísértésnek nem.

O. Wilde

A funkcionálanalízis a folytonos függvények $C(I)$ terének mélyebb vizsgálatával kezdődött, ahol I korlátos és zárt intervallum. A „függvényszerű” gondolata már Riemann doktori disszertációjában (1851) felmerült. Dini (1878) megmutatta, hogy *monoton* függvénysorozatokra a pontonkénti konvergencia maga után vonja az egyenletes konvergenciát. Ascoli (1883) elégséges feltételt adott $C(I)$ -beli halmazok kompaktságára. Ezen alapult Peano tétele (1886), miszerint az $x' = f(t, x)$ alakú differenciálegyenletek minden folytonos f esetén megoldhatók: a Lipschitz-feltétel csak az egyértelműséghez szükséges. Arzelà (1889) megmutatta, hogy Ascoli feltétele szükséges is a kompaktsághoz.

Weierstrass (1885) bebizonyította a polinomok sűrűségét $C(I)$ -ben. Le Roux (1895) és Volterra (1896–1897) integrálegyenletek széles osztályára igazoltak egzisztencia- és unicitástételeket. Fredholm (1900) felfedezte, hogy az integrálegyenletek általános elmélete lényegesen egyszerűbb, mint ahogy korábban képzelték. Riesz (1910) elegáns jellemzést adott $C(I)$ duális terére.

Cantor halmazelméleti munkásságának hatása alatt Borel (1894), Baire (1899) és Lebesgue (1901–1902) kiszélesítették a tanulmányozandó függvények osztályait. Hadamard irányításával készített doktori értekezésében Fréchet (1906) bevezette a metrikus tereket, valamint a kompaktság, teljesség és a szeparabilitás fogalmát. Riesz (1907) és Fischer (1907) bebizonyították a Lebesgue-integrálon alapuló függvényszerű teljességét, Riesz (1907, 1910) és Fréchet (1907) jellemezték e terek duálisait, és a tudományág robbanásszerű fejlődésnek indult.

A történeti aspektusokat mélyebben elemzik a következő munkák: [32], [42], [54], [87], [97], [168], [280], [315], [340], [364].

A könyvnek ez a befejező része szintézisül is szolgál: míg az előző négy rész nagyjából egymástól független, és csak az első rész (topológia) eredményeit használja szisztematikusan, addig most gyakran alkalmazzuk mind az öt korábbi rész eredményeit.

Az előző részekről eltérően nem állunk ellen a *kísértésnek*, hogy ugyanazt az eredményt időnként többféleképpen is igazoljuk: vagy azért, mert nem tudtunk választani több szép és elegáns bizonyítás között, vagy pedig azért, hogy valamely fontos kérdés különböző szögekből történő megvilágítása révén elősegítsük a témakör mélyebb megértését.

20. fejezet

Folytonos függvények terei

A matematika szempontjából századunkat akár a Függvénytan századának is nevezhetnénk...

V. Volterra, 1900

Ebben a fejezetben K betűvel mindig kompakt Hausdorff-teret jelölünk. Emlékeztetünk arra¹, hogy az $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények $C(K)$ tere Banach-tér a

$$\|f\|_{\infty} := \max_{t \in K} |f(t)|$$

normára nézve, és hogy a megfelelő konvergencia a K -n vett egyenletes konvergencia. Csak néhány alaperedmény ismertetésére szorítkozunk.²

A $C(K)$ terek csak érdektelen, degenerált esetekben reflexívek. Adjunk két példát:

Példák.

- Tekintsük az $X := C(I)$, $I := [0, 1]$ térben az

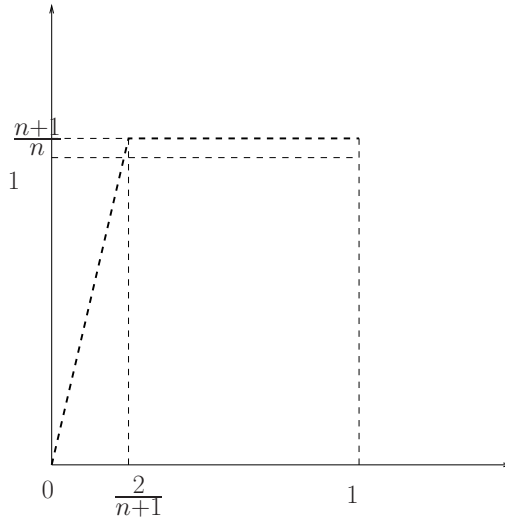
$$M := \left\{ f \in C(I) : f(0) = 0 \quad \text{és} \quad \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}$$

zárt, affin lineáris alteret. Ennek az altérnek nincs minimális normájú eleme, úgyhogy a $\text{dist}(0, M)$ távolság nem vétetik fel. A nyilvánvaló, minden $f \in M$ -re érvényes

$$1 = \int_0^1 f(t) dt \leq \|f\|_{\infty} \tag{20.1}$$

¹ *Topológia*, I. kötet, 4., 8., 42., 51., 61., 70. o.

² Bővebb ismeretanyag található Gillman–Jerison 1960 és Semadeni 1971 munkáiban.

20.1. ábra. f_n gráfja

becslésből ugyanis egyrészt $\text{dist}(0, M) \geq 1$. Másrészt az

$$f_n(t) := \begin{cases} (n+1)^2 t / (2n) & \text{ha } 0 \leq t \leq 2/(n+1), \\ (n+1)/n & \text{ha } 2/(n+1) \leq t \leq 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

képlet (lásd a 20.1 ábrát) olyan M -beli (f_n) függvénysorozatot definiál, amelyre $\|f_n\|_\infty = (n+1)/n \rightarrow 1$, tehát $\text{dist}(0, M) = 1$.

Azonban a távolság nem vétetik fel, mert a (20.1)-beli egyenlőtlenség minden $f \in M$ -re szigorú f folytonossága és az $f(0) = 0$ feltétel miatt. A 14.25 állítás alapján (75. o.) a $C(I)$ tér nem lehet tehát reflexív.

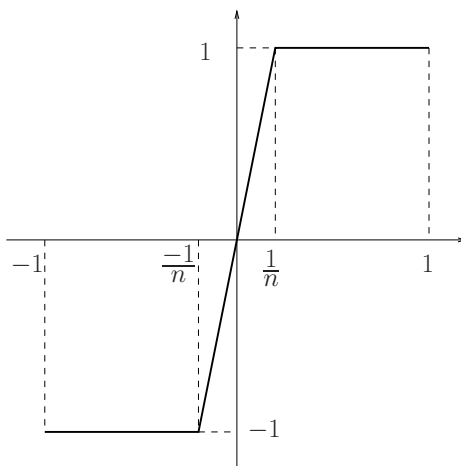
- Tekintsük $X := C(I)$ -ben, ahol $I = [-1, 1]$, a

$$\varphi(f) := \int_{-1}^1 (\text{sgn } t) f(t) dt$$

lineáris funkcionált. A nyilvánvaló

$$|\varphi(f)| \leq \int_{-1}^1 |f(t)| dt \leq 2\|f\|_\infty \quad (20.2)$$

becslés mutatja, hogy φ folytonos, és $\|\varphi\| \leq 2$.

20.2. ábra. g_n gráfja

Másrészt a

$$g_n(t) := \begin{cases} -1 & \text{ha } -1 \leq t \leq -1/n, \\ nt & \text{ha } -1/n \leq t \leq 1/n, \\ 1 & \text{ha } 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

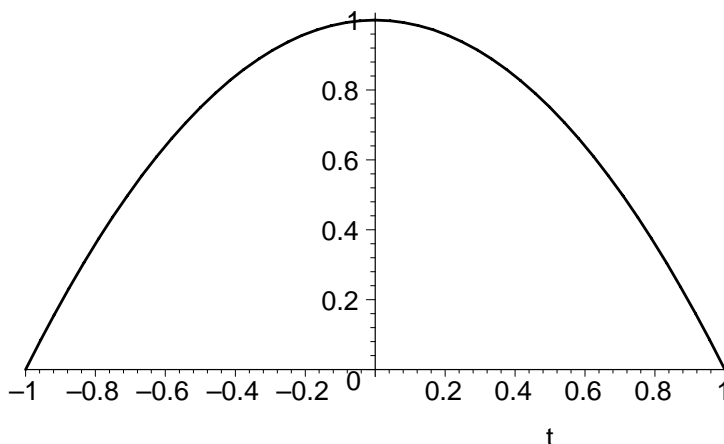
képlet (lásd a 20.2 ábrát) olyan egységnormájú (g_n) sorozatot definiál, amelyre $\varphi(g_n) \rightarrow 2$. Tehát $\|\varphi\| = 2$.

De a norma nem vétetik fel, mert ha $f \in X$ nem azonosan nulla, akkor $|\varphi(f)| < 2\|f\|_\infty$. Ugyanis csak akkor állhatna fel egyenlőség (20.2)-ben, ha $(\operatorname{sgn} t)f(t)$ konstans volna $[-1, 1]$ -ben, ez pedig csak az azonosan nulla függvényre teljesül.

Alkalmazva ismét a 14.25 állítást $C(I)$ nem lehet tehát reflexív.

A nem-reflexivitásra később direkt bizonyítást is adunk (252. o.).

A reflexivitás hiányának ellenére e terek gyakran előfordulnak az alkalmazásokban, úgyhogy indokolt a jelen fejezetet a tanulmányozásukra szentelni.

20.3. ábra. q gráfja $R = 1$ esetén

20.1. Weierstrass approximációs tételei

Korábban³ már igazoltuk a következő fontos tételt:

20.1. Tétel. (Weierstrass⁴) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallumon értelmezett, folytonos függvény. Létezik olyan (p_n) algebrai polinomsorozat, amelyik egyenletesen tart f -hez $[a, b]$ -ben.

A tételből az is következik, hogy $C([a, b])$ szeparábilis: a racionális együtthatós polinomok $[a, b]$ -re vett leszűkítései megszámlálható, sűrű alteret alkotnak.

Fontosságára való tekintettel ismertetjük a tétel Landautól⁵ származó bizonyítását is. Vezessük be az $R = b - a$ és

$$q(t) := \begin{cases} R^2 - t^2 & \text{ha } |t| \leq R, \\ 0 & \text{ha } |t| \geq R \end{cases}$$

jelöléseket (lásd a 20.3 ábrát). Igazoljuk először a következő segédtelet:

³ Első kötet, 8.9 tétel, 184. o.

⁴ Weierstrass 1885, 5. o.

⁵ Landau 1908.

20.2. Lemma. *Tetszőlegesen rögzített $\delta > 0$ -ra $n \rightarrow \infty$ esetén*

$$\frac{\int_{|t|>\delta} q(t)^n dt}{\int_{-\infty}^{\infty} q(t)^n dt} \rightarrow 0.$$

Bizonyítás. A $\delta \geq R$ eset nyilvánvaló lévén feltehető, hogy $\delta < R$. Figyeljük meg, hogy q folytonos, páros, a $(0, R)$ intervallumban pozitív és szigorúan monoton fogyó, a $(-R, R)$ intervallumon kívül pedig nulla. Ebből következik, hogy

$$\int_{|t|>\delta} q(t)^n dt < (2R - 2\delta)q(\delta)^n < 2Rq(\delta)^n$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(t)^n dt > \int_{|t|\leq\delta/2} q(t)^n dt > \delta q(\delta/2)^n,$$

ahonnan

$$0 \leq \frac{\int_{|t|>\delta} q(t)^n dt}{\int_{-\infty}^{\infty} q(t)^n dt} \leq \frac{2R}{\delta} \left(\frac{q(\delta)}{q(\delta/2)} \right)^n.$$

Befejezésül jegyezzük meg, hogy az utolsó kifejezés $n \rightarrow \infty$ esetén nullához tart, mert $0 < q(\delta) < q(\delta/2)$. \square

A 20.1 tétel bizonyítása. Szükség esetén affin függvény hozzáadásával feltehető, hogy $f(a) = f(b) = 0$. Terjesszük ki f -et nullaként az egész \mathbb{R} -en értelmezett, folytonos függvényre. Vegyük észre, hogy f egyenletesen folytonos, úgyhogy $\delta \searrow 0$ esetén⁶

$$\omega(f, \delta) := \sup \{|f(x) - f(t)| : |x - t| \leq \delta\} \rightarrow 0.$$

Bevezetve $n = 1, 2, \dots$ -re a

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)^n dt \quad \text{és} \quad Q_n(t) = c_n^{-1} q(t)^n$$

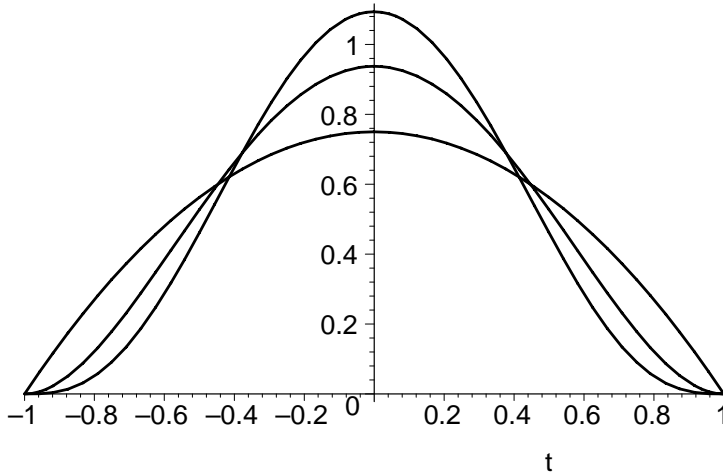
jelölést,

$$Q_n \geq 0 \quad \mathbb{R}\text{-en}, \quad (20.3)$$

$$Q_n(t) = 0 \quad \text{ha} \quad |t| \geq R, \quad (20.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(t) dt = 1. \quad (20.5)$$

⁶ $\omega(f, \delta)$ -t f egyenletes folytonossági modulusának hívjuk.

20.4. ábra. Q_1 , Q_2 és Q_3 gráfja $R = 1$ esetén

Továbbá az előző lemma miatt minden rögzített $\delta > 0$ -ra

$$\int_{|t|>\delta} Q_n(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty; \quad (20.6)$$

lásd a 20.4 ábrát.

Legyen

$$p_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) Q_n(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alkalmazva (20.3)-at és (20.5)-öt minden valós x -re fennáll a következő becslés:

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(t)) Q_n(x-t) dt \right| \\ &\leq \int_{|x-t| \leq \delta} |f(x) - f(t)| Q_n(x-t) dt \\ &\quad + \int_{|x-t| > \delta} |f(x) - f(t)| Q_n(x-t) dt \\ &\leq \omega(f, \delta) + 2\|f\|_{\infty} \int_{|s| > \delta} Q_n(s) ds. \end{aligned} \quad (20.7)$$

Tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk olyan $\delta > 0$ -t, hogy $\omega(f, \delta) < \varepsilon/2$, majd (20.6) alkalmazásával válasszunk olyan N -et, hogy

$$2\|f\|_{\infty} \int_{|s|>\delta} Q_n(s) ds < \varepsilon/2 \quad \text{minden } n \geq N\text{-re.}$$

Akkor (20.7) alapján $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re és $n \geq N$ -re.

Befejezésül mutassuk meg, hogy p_n -nek $[a, b]$ -re vett *leszűkítése* polinom. Alkalmazva (20.4)-et és felhasználva, hogy f eltűnik $[a, b]$ -n kívül, minden $a \leq x \leq b$ -re érvényes a következő egyenlőség:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) Q_n(x-t) dt \\ &= \int_{x-R}^{x+R} f(t) c_n^{-1}(R^2 - (x-t)^2)^n dt \\ &= \int_a^b f(t) c_n^{-1}(R^2 - (x-t)^2)^n dt. \end{aligned}$$

Mínt hogy alkalmas $a_j(t)$ polinomokkal

$$c_n^{-1}(R^2 - (x-t)^2)^n = \sum_{j=0}^{2n} a_j(t) x^j,$$

innen adódik, hogy

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} b_j x^j, \quad \text{ahol } b_j = \int_a^b f(t) a_j(t) dt. \quad \square$$

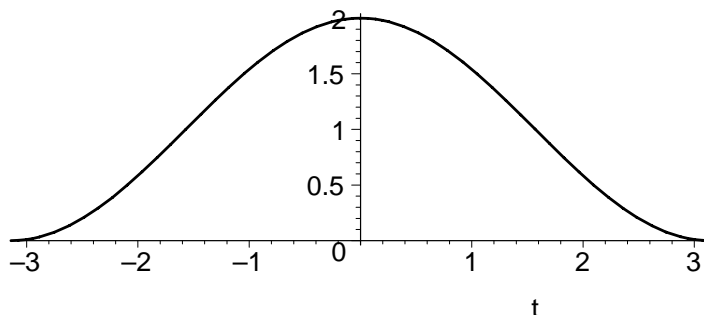
Megjegyzés. A most ismertetett bizonyítás példát szolgáltat a *konvolúcióval való regularizálásra*. Ezt a technikát gyakran alkalmazzák függvényterekbeni halmazok sűrűségének az igazolására.⁷

Weierstrass hasonló eredményt kapott periodikus függvényekre is. A folytonos és 2π -periodikus függvények $C_{2\pi}$ rendszere zárt lineáris altere a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Banach-térnek, így maga is Banach-tér a $\|\cdot\|_{\infty}$ normára nézve.

20.3. Tétel. (Weierstrass⁸) Tetszőleges $f \in C_{2\pi}$ -hez található olyan (p_n) trigonometrikus polinomsorozat, amely \mathbb{R} -en egyenletesen f -hez tart.

⁷ Lásd a 21.3 szakasz hivatkozásait, 267. o.

⁸ Weierstrass 1885.

20.5. ábra. q gráfja $R = 1$ -re

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy *trigonometrikus polinomokon* az

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots$$

függvények véges lineáris kombinációit értjük. A

$$2 \cos kt \cos mt = \cos(k-m)t + \cos(k+m)t,$$

$$2 \sin kt \sin mt = \cos(k-m)t - \cos(k+m)t$$

és

$$2 \sin kt \cos mt = \sin(k-m)t + \sin(k+m)t$$

azonosságok felhasználásával könnyen látható, hogy két trigonometrikus polinom szorzata is az.

A következő bizonyítás de la Vallée-Poussintól származik.⁹

Bizonyítás. Bevezetve a

$$q(t) := \begin{cases} 1 + \cos t & \text{ha } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{ha } |t| \geq \pi \end{cases}$$

függvényt (lásd a 20.5 ábrát), az előző bizonyítás *szó szerinti* megismétlésével adódik, hogy $p_n \rightarrow f$ egyenletesen \mathbb{R} -en. (Alkalmazzuk a 20.2 lemmát $R = \pi$ -vel.)

⁹ de la Vallée-Poussin 1908.

Hátra van annak a megmutatása, hogy p_n trigonometrikus polinom. Ez a

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) Q_n(x-t) dt \\
 &= c_n^{-1} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) (1 + \cos(x-t))^n dt \\
 &= c_n^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (1 + \cos(x-t))^n dt \\
 &= c_n^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (1 + \cos x \cos t + \sin x \sin t)^n dt \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx
 \end{aligned}$$

egyenlőségekből látható, ahol a_k és b_k alkalmas valós számok. A harmadik egyenlőség az integrandus 2π -periodikusságából, az utolsó pedig abból következik, hogy trigonometrikus polinomok szorzata is trigonometrikus polinom. \square

Megjegyzés. Weierstrass tételeire később még további bizonyításokat is adunk.¹⁰

20.2. * Stone–Weierstrass tétel

Stone messzemenően általánosította Weierstrass tételeit.

Definíció. A $C(K)$ tér M lineáris alterét *rész-algebrának* hívjuk, ha $f, g \in M$ esetén $fg \in M$ is teljesül.

¹⁰ Lásd a 232. és 234. oldalakat. Igen egyszerű bizonyítást adott Lebesgue is 1898-ban, amelyet tovább egyszerűsített 1922-ben. Jackson 1911, 1912 tanulmányozta a közelítés hibáját a függvény regularitásának függvényében. Müntz 1914, Szász 1915–16, Clarkson–Erdős 1943 általánosított polinomokat is vizsgáltak. Lásd még a következő könyveket: Ahiezer 1951, Cheney 1982, Jackson 1930, Natanson 1950, Rudin 1986.

20.4. Tétel. (Stone–Weierstrass¹¹) Legyen K kompakt topologikus tér, M pedig $C(K)$ olyan rész-algebrája, amely tartalmazza a konstans függvényeket, és szétválasztja K pontjait: bármely két különböző $x, y \in K$ ponthoz van olyan $h \in M$ függvény, hogy $h(x) \neq h(y)$. Akkor M sűrű $C(K)$ -ban.

Példák.

- Legyen K kompakt intervallum \mathbb{R} -ben. Az algebrai polinomok K -ra vett leszűkítéseinek M halmaza teljesíti a 20.4 tétel feltételeit. Így speciális esetként visszkapjuk Weierstrass 20.1 tételét.
- Általánosabban, ha K kompakt halmaz \mathbb{R}^N -ben, akkor az N -változós algebrai polinomok $C(K)$ -beli részalgebrája is teljesíti a 20.4 tétel feltételeit.
- Legyen K az \mathbb{R}^2 -beli egységkörvonal. A $T(s) := (\cos s, \sin s)$ függvény segítségével értelmezett $f \mapsto f \circ T$ megfeleltetés izometrikus izomorfizmus a $C(K)$ és $C_{2\pi}$ Banach-terek között. Továbbá a kétváltozós algebrai polinomok a trigonometrikus polinomoknak felelnek meg. Így visszkapjuk Weierstrass 20.3 tételét.

A bizonyításhoz felhasználjuk a vektorháló fogalmát (142. o.).

A 20.4 tétel bizonyítása.

Első lépés. Ha a $f_n \rightarrow f$ és $g_n \rightarrow g$ $C(K)$ -ban, akkor $f_n g_n \rightarrow fg$ is teljesül, mert

$$\|fg - f_n g_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \|g - g_n\|_\infty \rightarrow 0.$$

Következésképpen az M részalgebra \overline{M} lezárása is *részalgebrája* $C(K)$ -nak.

Második lépés. Az \overline{M} zárt részalgebra *vektorháló* is. Tetszőlegesen rögzített $h \in \overline{M}$ -re legyen ugyanis $T > \|h\|_\infty$. A 20.1 tétel szerint található olyan p_n polinomok, hogy $p_n(x) \rightarrow |x|$ egyenletesen $[-T, T]$ -ben. Akkor $p_n \circ h \in \overline{M}$, és $p_n \circ h \rightarrow |h|$ egyenletesen K -n, úgyhogy $|h| \in \overline{M}$.

A következő állítás befjezi a tétel bizonyítását. □

20.5. Állítás. (Kakutani–Krein¹²) Legyen K kompakt topologikus tér, M pedig $C(K)$ -beli vektorháló. Tegyük fel, hogy $1 \in M$, és hogy M

¹¹ Stone 1937, 1947/48.

¹² Kakutani 1941 (1004–1005. o.), Krein–Krein 1940.

szétválasztja K pontjait: bármely két különböző $x, y \in K$ ponthoz van olyan $h \in M$ függvény, hogy $h(x) \neq h(y)$. Akkor M sűrű $C(K)$ -ban.

Bizonyítás. Tetszőlegesen rögzített $f \in C(K)$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz olyan $g \in M$ függvényt keresünk, amelyre $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Első lépés. Minden rögzített $x \in K$ ponthoz létezik olyan $f_x \in M$ függvény, hogy

$$f_x > f - \varepsilon \quad K\text{-n, és} \quad f_x(x) = f(x).$$

Ugyanis a feltevéseink szerint minden $y \in K$ ponthoz található olyan $f_{xy} \in M$ függvény, amely megegyezik f -fel az x és y pontokban. Akkor az

$$U_y := \{z \in K : f_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon\}, \quad y \in K$$

nyílt halmazok befedik a kompakt K halmazt, hiszen $y \in U_y$ minden y -ra; létezik tehát véges részfedés, mondjuk

$$K = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}.$$

Akkor az

$$f_x := \max\{f_{xy_1}, \dots, f_{xy_n}\}$$

függvény rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

Második lépés. Létezik olyan $g \in M$ függvény, hogy

$$f - \varepsilon < g < f + \varepsilon \quad K\text{-n;}$$

innen $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Tekintsük ugyanis az előző lépésben kapott $f_x \in M$ függvényeket. A

$$V_x := \{z \in K : f_x(z) < f(z) + \varepsilon\}, \quad x \in K$$

nyílt halmazok befedik a kompakt K halmazt, hiszen $x \in V_x$ minden x -re; létezik tehát véges részfedés, mondjuk

$$K = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}.$$

Akkor a

$$g := \min\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\}$$

függvény megfelel a kívánalmaknak. □

A következő érdekes alkalmazásra később szükségünk lesz¹³:

¹³ Lásd a 20.27 lemma bizonyítását, 251. o.

20.6. Állítás. (Stone¹⁴) Legyen K olyan kompakt részhalmaza az X topologikus térnek, amelyet az X -en folytonos függvények szétválasztanak: bármely két különböző $x, y \in K$ ponthoz van olyan $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $h(x) \neq h(y)$. Akkor minden $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény folytonosan kiterjeszthető X -re.

Bizonyítás. A folytonos $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvények K -ra vett leszűkítései olyan $C(K)$ -beli vektorhálót alkotnak, amelyik tartalmazza a konstans függvényeket. Továbbá a szétválasztási feltevésünk szerint M teljesíti a Kakutani–Krein tétel feltételeit is, és így sűrű $C(K)$ -ban. Hátra van M zártságának az igazolása.

Legyen (f_n) olyan M -beli sorozat, amely K -n egyenletesen valamely f függvényhez tart. Olyan folytonos $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt kell találnunk, amely megegyezik f -fel K -n.

Szükség esetén részsorozatra térve feltehető, hogy

$$|f_{n+1} - f_n| \leq 2^{-n} \quad K\text{-n}$$

minden n -re.¹⁵ M definíciója miatt az f_1 és $f_{n+1} - f_n$ függvényeknek léteznek X -en folytonos F_1 és G_n kiterjesztéseik. Azt is feltehetjük ráadásul, hogy

$$|G_n| \leq 2^{-n} \quad K\text{-n}$$

minden n -re: szükség esetén cseréljük ki G_n -et a

$$\max\{-2^{-n}, \min\{2^{-n}, G_n\}\}$$

függvényre. Akkor az

$$F_1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n$$

X -en egyenletesen valamely $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez tart. Innen következik, hogy F folytonos, és $F = f$ K -n. \square

¹⁴ Stone 1947/48. Ez a tétel nem következik Uriszonéból, amelyet az első kötet 21. oldali lábjegyzetében említettünk.

¹⁵ Már alkalmaztuk ezt a technikát a Riesz-lemma bizonyításakor, 154. o.

20.3. Kompakt halmazok. Arzelà–Ascoli tétel

Ebben a szakaszban jellemezzük $C(K)$ kompakt halmazait. Minthogy kompakt metrikus térben a kompakt halmazok megegyeznek a teljesen korlátos és zárt halmazokkal, elegendő a teljesen korlátos halmazokat jellemezni.

Definíciók. Tekintsük az $\mathcal{F} \subset C(K)$ függvényrendszert.

- \mathcal{F} *pontonként korlátos* ha az $\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$ számhalmazok minden $t \in K$ -ra korlátosak.
- \mathcal{F} *egyformán folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz és $t \in K$ -hoz létezik t -nek olyan V környezete, hogy $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ minden $s \in V$ és $f \in \mathcal{F}$ esetén.

20.7. Állítás. (Arzelà–Ascoli¹⁶) Az $\mathcal{F} \subset C(K)$ függvényrendszer pontosan akkor teljesen korlátos, ha pontonként korlátos és egyformán folytonos.

Bizonyítás. Ha \mathcal{F} teljesen korlátos, akkor a metrikában korlátos is, vagyis K -n egyenletesen korlátos. De akkor pontonként is korlátos. Továbbá tetszőleges $r > 0$ -hoz létezik véges sok olyan \mathcal{F} -beli f_1, \dots, f_m függvény, hogy

$$\mathcal{F} \subset B_r(f_1) \cup \dots \cup B_r(f_m).$$

Mutassuk meg, hogy \mathcal{F} egyformán folytonos bármely rögzített $t \in K$ pontban. Mindegyik f_i folytonos t -ben, van tehát t -nek olyan V_i környezete, hogy

$$|f_i(t) - f_i(s)| < r \quad \text{minden } s \in V_i\text{-re.}$$

Ha $s \in V := V_1 \cap \dots \cap V_m$, akkor $|f(t) - f(s)| < 3r$ minden $f \in \mathcal{F}$ -re, ami az egyformán folytonosságot igazolja \mathcal{F} . Válasszunk ugyanis olyan f_i -t, amelyre $\|f - f_i\| < r$; akkor

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f_i(t)| + |f_i(t) - f_i(s)| + |f_i(s) - f(s)| < r + r + r.$$

Megfordítva, ha \mathcal{F} egyformán folytonos, akkor K kompaktsága miatt minden rögzített $r > 0$ -hoz található véges sok $t_1, \dots, t_m \in K$ pont és ezek V_1, \dots, V_m környezetei úgy, hogy $K = V_1 \cup \dots \cup V_m$, továbbá

$$f \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad t \in V_i \implies |f(t) - f(t_i)| < r.$$

¹⁶ Ascoli 1883 (545–549. o.: elégségeség $K = [0, 1]$ -re), Arzelà 1889 (szükségesség), 1895 (egyszerűsített tárgyalás), 1900, Fréchet 1906 (általános eset).

Ha \mathcal{F} pontonként korlátos is, akkor az

$$\{(f(t_1), \dots, f(t_m)) : f \in \mathcal{F}\}$$

halmaz korlátos \mathbb{R}^m -ben, és így teljesen korlátos is.¹⁷ Megadható tehát véges sok olyan $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ függvény, hogy

$$\{(f(t_1), \dots, f(t_m)) : f \in \mathcal{F}\} \subset \bigcup_{j=1}^n B_r(f_j(t_1), \dots, f_j(t_m)).$$

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{F} \subset B_{3r}(f_1) \cup \dots \cup B_{3r}(f_n)$; így r tetszőleges volta miatt \mathcal{F} teljesen korlátos. Tetszőlegesen rögzített $f \in \mathcal{F}$ -hez válasszunk olyan f_j -t, hogy

$$(f(t_1), \dots, f(t_m)) \in B_r(f_j(t_1), \dots, f_j(t_m)).$$

Ezután bármely adott $t \in K$ -hoz válasszunk olyan t_i -t, hogy $t \in V_i$. Akkor $|f(t) - f_j(t)| \leq |f(t) - f(t_i)| + |f(t_i) - f_j(t_i)| + |f_j(t_i) - f_j(t)| < r + r + r$, ahonnan $f \in B_{3r}(f_j)$. \square

20.4. Fourier-sorok divergenciája

Az $f \in C_{2\pi}$ függvény Fourier-során¹⁸ az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

függvénysort értjük, ahol

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad \text{és} \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

A XIX. század legnagyobb matematikusai próbálták bizonyítani, hogy minden $f \in C_{2\pi}$ függvény Fourier-sora pontonként konvergál f -hez. Du Bois-Reymond ellenpéldája véget vetett ezeknek a próbálkozásoknak:

20.8. Állítás. (Du Bois-Reymond¹⁹) Vannak olyan $f \in C_{2\pi}$ függvények, amelyek Fourier-sora nem konvergál pontonként f -hez.

¹⁷ Mivel \mathbb{R}^m véges dimenziós: lásd *Topológia*, 3.9 tétel, 75. o.

¹⁸ Daniel Bernoulli 1753, Fourier 1822.

¹⁹ Du Bois-Reymond 1873. Ő effektív ellenpéldát konstruált. Mi itt megelégszünk a létezés nem-konstruktív igazolásával.

Megjegyzés. Olyan $f \in C_{2\pi}$ függvények is vannak, amelyek Fourier-sora nem-megszámálható, sűrű halmazon divergál.²⁰ Lásd még a 21.6 következményt és az azt követő megjegyzéseket is az L^p normabeli konvergenciáról a 262. oldalon.

Először két segédtezt igazolunk.

20.9. Lemma. (*Dirichlet*²¹) Az $f \in C_{2\pi}$ függvény Fourier-sora

$$(S_m f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

részletösszegeinek a zárt alakja

$$(S_m f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-t) f(t) dt,$$

ahol a $D_m \in C_{2\pi}$ Dirichlet-magot a következő képlet definiálja²²:

$$D_m(2s) := \frac{\sin(2m+1)s}{\sin s}.$$

Lásd a 20.6-20.9 ábrákat.

Bizonyítás. Minthogy

$$\begin{aligned} (S_m f)(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos k(x-t) \right) f(t) dt, \end{aligned}$$

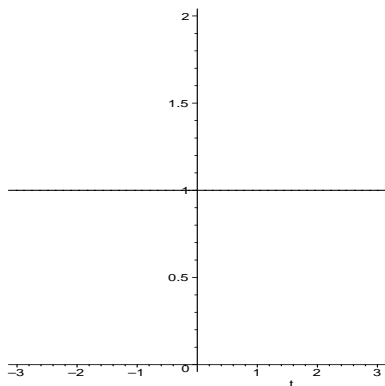
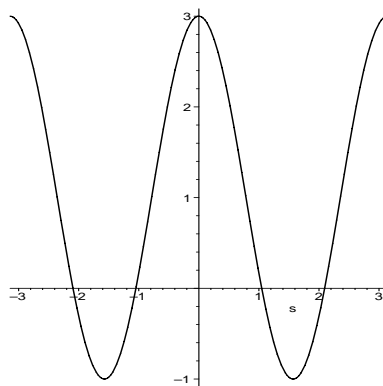
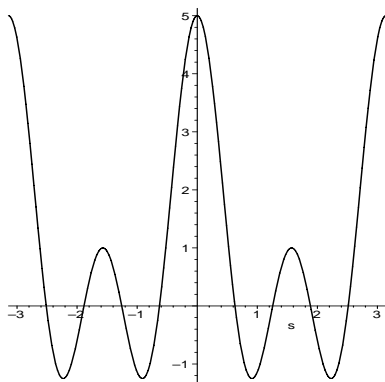
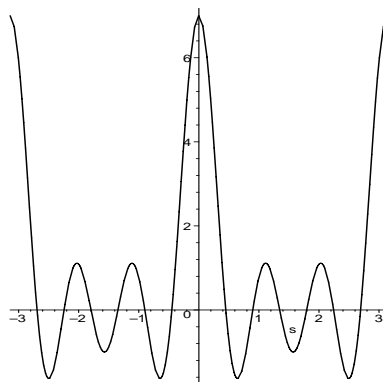
elegendő igazolnunk az

$$1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos 2ks = \frac{\sin(2m+1)s}{\sin s}$$

²⁰ Számos ilyen eredményt ismert Edwards 1979–82, Katsnelson 1976 és Zygmund 1959.

²¹ Dirichlet 1829.

²² A jobboldalt $\sin s = 0$ esetén a határértékével: $2m+1$ -gyel helyettesítjük.

20.6. ábra. D_0 gráfja20.7. ábra. D_1 gráfja20.8. ábra. D_2 gráfja20.9. ábra. D_3 gráfja

azonosságot. Ez $m = 0$ -ra nyilvánvaló. Az általános eset innen indukcióval adódik, felhasználva a jólismert

$$2 \sin s \cos 2(m+1)s = \sin(2m+3)s - \sin(2m+1)s, \quad m = 0, 1, \dots$$

összefüggéseket. □

Tekintsük most a $C_{2\pi}$ Banach-téren a

$$\varphi_m(f) := (S_m f)(0)$$

képlettel értelmezett lineáris funkcionálokat.

20.10. Lemma. A φ_m lineáris funkcionálok folytonosak, és $\|\varphi_m\| \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Minthogy

$$|a_k|, |b_k| \leq 2\|f\|_\infty,$$

S_m definíciójából

$$\|S_m f\|_\infty \leq \left(2m + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\|f\|_\infty = (4m + 1)\|f\|_\infty;$$

következésképpen $\|\varphi_m\| \leq 4m + 1 < \infty$.

Másrészt az

$$f(2s) := (\operatorname{sgn} \sin s) \sin(2m + 1)s$$

képlet olyan egy normájú $f \in C_{2\pi}$ függvényt definiál, amelyre

$$\begin{aligned} \varphi_m(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(-t) f(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_m(-2s) f(2s) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2(2m+1)s}{|\sin s|} ds &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(2m+1)s}{\sin s} ds \\ &> \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(2m+1)s}{s} ds &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(2m+1)\pi/2} \frac{\sin^2 s}{s} ds \\ &> \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{\sin^2 s}{s} ds &> \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^m \frac{\sin^2 s}{j\pi} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Következésképpen

$$\|\varphi_m\| \geq \varphi_m(f) > \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \rightarrow \infty. \quad \square$$

Megjegyzés. Igazolhatók a pontosabb

$$\|\varphi_m\| = \frac{4}{\pi^2} \log m + O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

relációk is.²³

²³ Lásd például Edwards 1979–82 vagy Zygmund 1959.

A 20.8 állítás bizonyítása. tegyük fel indirekt, hogy $\varphi_m(f) \rightarrow f(0)$ minden $f \in C_{2\pi}$ -re. Akkor a Banach–Steinhaus tételt (61. o.) $X = C_{2\pi}$ és $Y = \mathbb{R}$ szereposztással alkalmazva $\sup \|\varphi_m\| < \infty$ adódik, ellentmondva az előző lemmának. \square

20.5. Fourier-sorok szummációja. Fejér tétele

Az ötlet csak villanás az éj sötétjében. De e villanás mindennél többet ér.

H. Poincaré

Du Bois-Reymond ellenpéldája nyilvánvalóvá tette a folytonos függvények Fourier-sorokkal való előállíthatóságának nehézségeit. Minkowski még azt a kérdést is felvetette, konvergálhat-e valamely folytonos függvény Fourier-sora pontonként valamely más folytonos függvényhez.²⁴ A több évtizedes stagnálásnak Fejér Lipót látványos eredménye vetett véget:

20.11. Tétel. (Fejér²⁵) *Tetszőleges $f \in C_{2\pi}$ esetén a*

$$\sigma_n f := \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n S_m f, \quad n = 0, 1, \dots$$

képlettel definiált $\sigma_n f$ sorozat egyenletesen konvergál f -hez \mathbb{R} -en. Speciálisan $S_m f(x)$ semmilyen x pontban sem konvergálhat máshoz, mint $f(x)$ -hez.

Igazoljunk először egy segédtelet:

20.12. Lemma. *Fennállnak a*

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) f(t) dt$$

egyenlőségek, ahol az $F_n \in C_{2\pi}$ Fejér-magot az

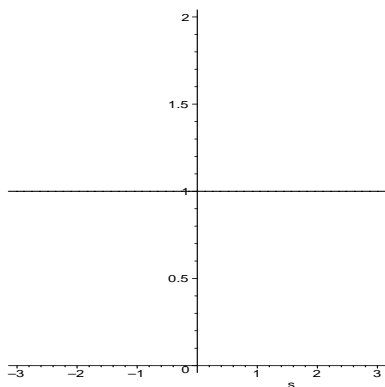
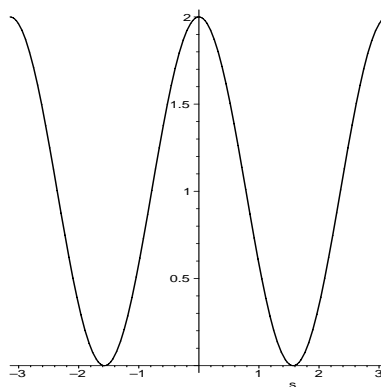
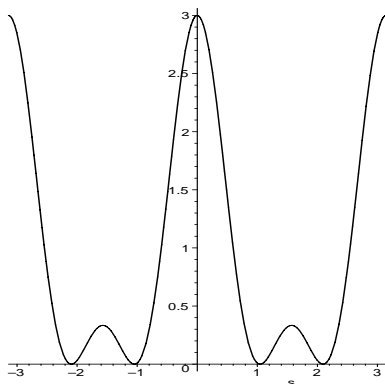
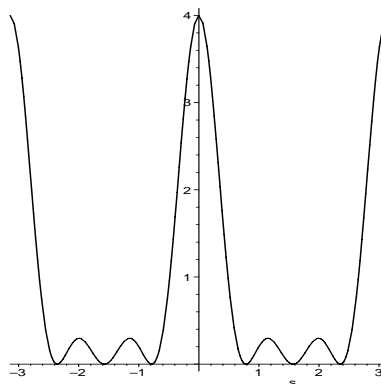
$$F_n(2s) := \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(n+1)s}{\sin^2 s}$$

*képlettel definiáljuk.*²⁶

²⁴ A Taylor-sorokra Cauchy 1823 (230. o.) ma már klasszikus ellenpéldája óta ismeretes volt az analóg jelenség.

²⁵ Fejér 1900, 1904.

²⁶ A jobboldalt $\sin s = 0$ esetén a határértékével: $n+1$ -gyel helyettesítjük.

20.10. ábra. F_0 gráfja20.11. ábra. F_1 gráfja20.12. ábra. F_2 gráfja20.13. ábra. F_3 gráfja

Hasonlítsuk össze a 20.10-20.13 ábrákat a 20.6-20.9 ábrákkal a 230. oldalon: a Fejér-magok *pozitivitása* döntő fontossággal bír.

Bizonyítás. A σ_n operátorok definíciója alapján elegendő igazolnunk az

$$F_n = \frac{D_0 + \dots + D_n}{n+1},$$

vagyis a

$$\frac{\sin^2(n+1)s}{\sin^2 s} = \sum_{m=0}^n \frac{\sin(2m+1)s}{\sin s}$$

egyenlőségeket. Ezek közvetlen számolással adódnak:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^n \sin s \sin(2m+1)s &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (\cos 2ms - \cos(2m+2)s) \\ &= \frac{1 - \cos(2n+2)s}{2} \\ &= \sin^2(n+1)s. \quad \square\end{aligned}$$

A 20.11 tétel bizonyítása. A definícióból közvetlenül kapjuk minden n -re a

$$\sigma_n 1 = 1, \quad \sigma_n \cos = \frac{n}{n+1} \cos \quad \text{és} \quad \sigma_n \sin = \frac{n}{n+1} \sin$$

összefüggéseket. Következésképpen $\|f - \sigma_n f\|_\infty \rightarrow 0$ az $f = 1, \cos, \sin$ függvényekre.

Továbbá a Fejér-magok pozitivitása miatt, ha f nem-negatív, akkor $\sigma_n f$ is nem-negatív. A tétel az alábbi 20.13 állításból adódik. \square

Definíció. Az $L : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ lineáris leképezés *pozitív*, ha minden nem-negatív $f \in C_{2\pi}$ függvényre Lf is nem-negatív.

20.13. Állítás. (Korovkin²⁷) Ha $C_{2\pi}$ -beli pozitív lineáris L_n leképezések sorozatára

$\|f - L_n f\|_\infty \rightarrow 0$ a három $f = 1, \cos, \sin$ függvény esetén,
akkor valójában $\|f - L_n f\|_\infty \rightarrow 0$ minden $f \in C_{2\pi}$ -re.

A következő szakaszban általánosabb tételt igazolunk majd.

20.6. * Korovkin tételei. Bernstein-polinomok

Tanulmányozzuk közelebbről a pozitív lineáris $L : C(K) \rightarrow C(K)$ leképezéseket, ahol K adott kompakt topologikus tér.

Definíció. Az $L : C(K) \rightarrow C(K)$ lineáris leképezés *pozitív*, ha minden nem-negatív $f \in C(K)$ függvényre Lf is nem-negatív.

Megjegyzések. Legyen L pozitív lineáris leképezés.

- A linearitása miatt L *monoton* is: ha $f \leq g$ K -n, akkor $Lf \leq Lg$ K -n.

²⁷ Korovkin 1953. Számos alkalmazást is ismertet a könyvében: Korovkin 1960.

- A monotonitás miatt a $- \|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$ egyenlőtlenségekből

$$-\|f\|_\infty(L1) \leq Lf \leq \|f\|_\infty(L1),$$

vagyis $\|Lf\|_\infty \leq (L1)\|f\|_\infty$ következik. Következésképpen minden pozitív lineáris leképezés *folytonos*.

20.14. Állítás. (Freud²⁸) Legyen K kompakt topologikus tér, és legyenek h_1, \dots, h_m olyan $C(K)$ -beli függvények, hogy bármely két különböző $x, y \in K$ ponthoz található olyan j index, amelyre $h_j(x) \neq h_j(y)$.

Tekintsük pozitív lineáris $L_n : C(K) \rightarrow C(K)$ leképezések olyan sorozatát, hogy $\|f - L_n f\|_\infty \rightarrow 0$ a következő $m + 2$ függvényre:

$$f = 1, h_1, \dots, h_m \quad \text{és} \quad f = h_1^2 + \dots + h_m^2. \quad (20.8)$$

Akkor $\|f - L_n f\|_\infty \rightarrow 0$ minden $f \in C(K)$ -ra is.

Példa. Ha $K \mathbb{R}^m$ kompakt részhalmaza, akkor a tétel feltételei teljesülnek a $h_j(x) := x_j$ lineáris vetítésekre.

Bizonyítás. Rögzítsük $f \in C(K)$ -t és $\varepsilon > 0$ -t tetszőlegesen.

Első lépés. Létezik olyan N természetes szám, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + N \sum_{j=1}^m |h_j(x) - h_j(y)|^2 \quad (20.9)$$

minden $x, y \in K$ -ra. Felhasználva ugyanis f folytonosságát és a szétválaszthatósági feltételt, minden K -beli (x, y) pontpárhoz található olyan $N_{x,y}$ természetes szám, hogy

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon + N_{x,y} \sum_{j=1}^m |h_j(x) - h_j(y)|^2.$$

Az

$$\left\{ (x', y') \in K \times K : |f(x') - f(y')| < \varepsilon + N_{x,y} \sum_{j=1}^m |h_j(x) - h_j(y)|^2 \right\}$$

nyílt halmazok befedik a kompakt $K \times K$ halmazt; véges részfedést választva és N -nel jelölve az ebben előforduló legnagyobb $N_{x,y}$ számot, (20.9) teljesül.

²⁸ Freud 1963. Kimerítően tárgyalja a témakört Altomare és Campiti 1994.

Második lépés. Tetszőlegesen rögzített $x \in K$ -ra (20.9)-ből következik a minden $y \in K$ -ra érvényes

$$|f(x)(L_n 1)(y) - (L_n f)(y)| \leq \varepsilon(L_n 1)(y) \\ + N \sum_{j=1}^m h_j^2(x)(L_n 1)(y) - 2N \sum_{j=1}^m h_j(x)(L_n h_j)(y) + NL_n \left(\sum_{j=1}^m h_j^2 \right)(y)$$

egyenlőtlenség. Az $y = x$ választással és a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával innen a következő becslést kapjuk:

$$|f - L_n f| \leq |f| \cdot |1 - L_n 1| + \varepsilon(L_n 1) \\ + N \sum_{j=1}^m h_j^2(L_n 1) - 2N \sum_{j=1}^m h_j(L_n h_j) + NL_n \left(\sum_{j=1}^m h_j^2 \right).$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor a jobboldal feltevésünk szerint egyenletesen ε -hoz tart, és így

$$\|f - L_n f\|_\infty < 2\varepsilon$$

minden elég nagy n -re. □

20.15. Következmény. (Bohman–Korovkin²⁹) Legyen I korlátos, zárt intervallum. Ha az $L_n : C(I) \rightarrow C(I)$ pozitív lineáris leképezésekre

$$\|f - L_n f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{az} \quad f(x) = 1, x, x^2$$

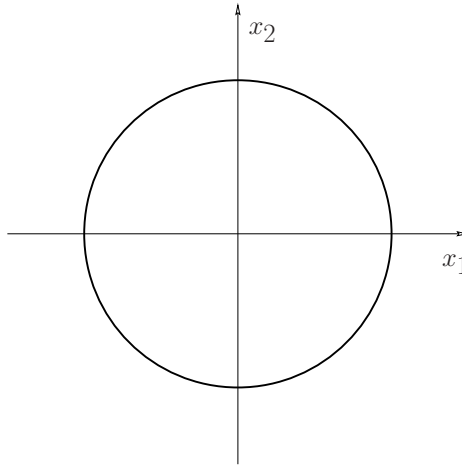
függvények esetén, akkor valójában $\|f - L_n f\|_\infty \rightarrow 0$ minden $f \in C(I)$ -re.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző oldali példát $K = I$ és $m = 1$ szepoztással. □

A 20.13 állítás bizonyítása. Alkalmazzuk az előző oldali példát az \mathbb{R}^2 -beli K egységkörvonalra. Ha tehát $L_n : C(K) \rightarrow C(K)$ olyan pozitív lineáris leképezések, hogy $\|f - L_n f\|_\infty \rightarrow 0$ az $f(x) := 1, x_1, x_2$ képletekkel adott három függvényre (lásd a 20.14 ábrát), akkor ugyanez a reláció valójában minden $f \in C(K)$ -ra fennáll. Elég ehhez észrevennünk, hogy K választása miatt a negyedik tesztfüggvény egybeesik az elsővel: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ K -n.

Korábban már megjegyeztük (224. o.), hogy az $f \mapsto f \circ T$ leképezés, ahol $T(s) := (\cos s, \sin s)$, izometrikus izomorfizmus a $C(K)$ és $C_{2\pi}$ Banach-terek között. Továbbá e leképezés a nem-negatív függvényeket is egymásnak felelteti meg, és a K -n adott $f(x) = 1, x_1, x_2$ függvények képei

²⁹ Bohman 1952, Korovkin 1953.

20.14. ábra. $x_1^2 + x_2^2 = 1$

rendre $f(T(s)) = 1, \cos s, \sin s$. A K -ra kapott eredmény tehát ekvivalens a 20.13 állítással. \square

Eddig már két különböző bizonyítást is adtunk Weierstrass első approximációs tételére.³⁰ Most ismertetünk egy harmadik, valószínűségszámítási háttérű bizonyítást is. Tegyük fel az egyszerűbb írásmód kedvéért, hogy $I = [0, 1]$, és vezessük be minden $f \in C(I)$ -re az úgynevezett *Bernstein-polinomokat*:

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in I, \quad n = 1, 2, \dots$$

20.16. Állítás. (Bernstein³¹) Tetszőlegesen adott $f \in C(I)$ -re a $B_n f$ polinomok I -n egyenletesen f -hez konvergálnak.

Bizonyítás. Világos, hogy a B_n lineáris leképezések pozitívak $C(I)$ -ben. Vegyük azt is észre, hogy $B_n 1 = 1$ és $B_n \text{id} = \text{id}$ minden n -re a

³⁰ Fejéré az Hermite-interpoláción alapult (első kötet, 8.11 tétel, 186. o.), Landau-é pedig a konvolúción (20.1 tétel, 218. o.)

³¹ Bernstein 1912. Eredménye választ adott Borel 1905 (79–82. o.) korábbi kérdésére.

binomiális tétel miatt³²:

$$\begin{aligned}(B_n 1)(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (x + 1 - x)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}(B_n \text{id})(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x(x + 1 - x)^{n-1} \\ &= x.\end{aligned}$$

A Bohman–Korovkin tétel alapján (236. o.) elegendő még azt megmutatnunk, hogy $B_n(\text{id}^2)$ egyenletesen konvergál id^2 -hez $[0, 1]$ -ben. Ehhez jegezzük meg először, hogy

$$\begin{aligned}B_n(\text{id}^2 - n^{-1} \text{id})(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k(k-1)}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$B_n(\text{id}^2) = \frac{n-1}{n} \text{id}^2 + \frac{1}{n} \text{id},$$

ahonnan

$$\|\text{id}^2 - B_n(\text{id}^2)\|_\infty = \frac{1}{n} \|\text{id}^2 - \text{id}\|_\infty \rightarrow 0. \quad \square$$

³²Az id szócskával \mathbb{R} identikus leképezését jelöljük.

20.7. * Harsiladze–Lozinszkij, Nyikolajev és Faber tételei

Bizonyos Fourier-sorok divergenciája szorosan kötődik az S_m részlet-összeg-operátorok *vetítés* jellegéhez. Fennáll ugyanis a következő tétel, ahol \mathcal{T}_m -mel jelöljük a legfeljebb m -edrendű trigonometrikus polinomok lineáris alterét, vagyis az

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots, \cos mt, \sin mt$$

függvények lineáris kombinációinak a halmazát:

20.17. Tétel. (Harsiladze–Lozinszkij³³) Legyen adva minden m -re egy folytonos lineáris $L_m : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ vetítés \mathcal{T}_m -re. Létezik olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, hogy $\|f - L_m f\|_\infty \not\rightarrow 0$.

Mínthogy $\|S_m\| \rightarrow \infty$ a 20.10 lemma szerint (230. o.), a tétel a Banach–Steinhaus tételből (61. o.) következik az alábbi állítás miatt:

20.18. Állítás. (Lozinszkij³⁴) Ha $L_m : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ folytonos lineáris vetítés \mathcal{T}_m -re, akkor $\|L_m\| \geq \|S_m\|$.

Bizonyítás. Bevezetve minden valós s -re az egy normájú

$$(T_s f)(x) := f(x + s)$$

operátort, elég igazolnunk a következő azonosságot³⁵:

$$(S_m f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_{-s} L_m T_s f)(x) ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in C_{2\pi}. \quad (20.10)$$

Valóban, mínthogy

$$\begin{aligned} |(T_{-s} L_m T_s f)(x)| &\leq \|T_{-s} L_m T_s f\|_\infty \\ &\leq \|T_{-s}\| \cdot \|L_m\| \cdot \|T_s\| \cdot \|f\|_\infty \\ &= \|L_m\| \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

minden f -re, s -re és x -re, (20.10) jobb oldala legfeljebb $\|L_m\| \cdot \|f\|_\infty$, ahonnan a keresett $\|S_m\| \leq \|L_m\|$ becslés adódik.

³³ Lozinszkij 1948.

³⁴ Lozinszkij 1948.

³⁵ Marcinkiewicz 1937, Lozinszkij 1944.

Mivel a (20.10) azonosság f -ben lineáris, elég azt az

$$f_k(x) = \cos kx \quad (k = 0, 1, \dots) \quad \text{és} \quad g_k(x) = \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

függvényekre igazolni, hiszen ezek Weierstrass második approximációs tétele szerint (221. o.) generálják $C_{2\pi}$ -t. A

$$\cos k(x + s) = \cos ks \cos kx - \sin ks \sin kx$$

és

$$\sin k(x + s) = \sin ks \cos kx + \cos ks \sin kx$$

azonosságokból következik, hogy

$$T_s f_k = (\cos ks) f_k - (\sin ks) g_k \quad \text{és} \quad T_s g_k = (\sin ks) f_k + (\cos ks) g_k.$$

Következésképpen, (20.10) jobboldalát ideiglenesen $(R_m f)(x)$ -szel jelölve,

$$(R_m f_k)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos ks) (L_m f_k)(x - s) - (\sin ks) (L_m g_k)(x - s) ds$$

és

$$(R_m g_k)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin ks) (L_m f_k)(x - s) + (\cos ks) (L_m g_k)(x - s) ds.$$

Tetszőlegesen rögzített x -re $(L_m f_k)(x - s)$ és $(L_m g_k)(x - s)$ legfeljebb m -edrendű trigonometrikus polinomok s -ben. Ha $k > m$, akkor ezek ortogonálisak a $\cos ks$ és $\sin ks$ függvényekre, úgyhogy

$$R_m f_k = 0 = S_m f_k \quad \text{és} \quad R_m g_k = 0 = S_m g_k.$$

Az $R_m f_k = S_m f_k$ és $R_m g_k = S_m g_k$ egyenlőségek $k \leq m$ esetén is teljesülnek: ekkor $L_m f_k = f_k$ és $L_m g_k = g_k$, úgyhogy

$$\begin{aligned} (R_m f_k)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ks \cos k(x - s) - \sin ks \sin k(x - s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx ds \\ &= f_k(x) \\ &= S_m f_k(x) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
 (R_m g_k)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ks \cos k(x-s) + \cos ks \sin(x-s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx ds \\
 &= g_k(x) \\
 &= S_m g_k(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

A 20.17 tételnek létezik algebrai változata is. Ennek igazolásához szükségünk van a 20.18 állítás olyan változatára, ahol $C_{2\pi}$ -t és \mathcal{T}_m -t a páros függvényekből álló $\tilde{C}_{2\pi}$ és $\tilde{\mathcal{T}}_m$ altereikkel helyettesítjük. Jelöljük \tilde{S}_m -mal S_m leszűkítését $\tilde{C}_{2\pi}$ -re, és jegyezzük meg, hogy $\tilde{S}_m : \tilde{C}_{2\pi} \rightarrow \tilde{C}_{2\pi}$.

20.19. Állítás. Ha $L_m : \tilde{C}_{2\pi} \rightarrow \tilde{C}_{2\pi}$ folytonos lineáris vetítés $\tilde{\mathcal{T}}_m$ -re, akkor

$$\|L_m\| \geq \|\tilde{S}_m\|/2.$$

Bizonyítás. Ismét bevezetve az előző bizonyításbeli eltolási operátorokat, elég igazolnunk a következő azonosságot:

$$(\tilde{S}_m f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_{-s} L_m (T_{-s} + T_s) f)(x) ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \tilde{C}_{2\pi}.$$

Ebből ugyanis következni fog az

$$\|\tilde{S}_m f\| \leq 2\|L_m\| \cdot \|f\|$$

egyenlőtlenség.

A keresett azonosság jobboldalát ideiglenesen $(\tilde{R}_m f)(x)$ -sel jelölve elég igazolnunk az $\tilde{S}_m f_k = \tilde{R}_m f_k$ egyenlőséget az $f_k(x) = \cos kx, k = 0, 1, \dots$ függvényekre, hiszen ezek lineáris kombinációi sűrűek $\tilde{C}_{2\pi}$ -ben. Valóban, ha $f \in \tilde{C}_{2\pi}, \varepsilon > 0$ és h olyan trigonometrikus polinom, amelyre $\|f - h\|_{\infty} < \varepsilon$, akkor h páros része: $h_1(x) := (h(x) + h(-x))/2$ az f_k függvények lineáris kombinációja, és $\|f - h_1\|_{\infty} < \varepsilon$.

A jólismert

$$\cos k(x-s) + \cos k(x+s) = 2 \cos ks \cos kx$$

trigonometrikus azonosságból következik, hogy

$$(T_{-s} + T_s) f_k = (2 \cos ks) f_k,$$

és így

$$(\tilde{R}_m f_k)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 \cos ks) (L_m f_k)(x-s) ds.$$

Ha $k > m$, akkor tetszőlegesen rögzített x -re $(L_m f_k)(x - s)$ az s változó k -nál alacsonyabb rendű trigonometrikus polinomja, és így ortogonális $\cos ks$ -re. Ezért $\tilde{R}_m f_k = 0 = \tilde{S}_m f_k$. Ha $k \leq m$, akkor $L_m f_k = f_k$, tehát

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_m f_k)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos ks \cos k(x - s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx + \cos k(x - 2s) ds \\ &= \cos kx \\ &= f_k(x), \end{aligned}$$

tehát ismét fennáll az $\tilde{R}_m f_k = \tilde{S}_m f_k$ egyenlőség. □

Jelöljük \mathcal{P}_m -mel a legfeljebb n -edfokú algebrai polinomok vektorterét.

20.20. Tétel. (Harsiladze–Lozinszkij³⁶) Legyen I korlátos, zárt intervallum, és legyen minden m -re $L_m : C(I) \rightarrow C(I)$ folytonos lineáris vetítés \mathcal{P}_m -re. Létezik olyan $f \in C(I)$, hogy $\|f - L_m f\|_{\infty} \not\rightarrow 0$.

Bizonyítás. Legyen $I = [-1, 1]$ az egyszerűbb írásmód kedvéért, és tekintsük az

$$f \mapsto f \circ \cos$$

képlettel értelmezett T izometrikus izomorfizmust a $C(I)$ és $\tilde{C}_{2\pi}$ Banachterek között. Figyeljük meg, hogy

$$f \in \mathcal{P}_m \iff Tf \in \tilde{\mathcal{T}}_m.$$

Az előző állítás szerint tehát

$$\|L_m\| = \|TL_m T^{-1}\| \geq \|\tilde{S}_m\|/2.$$

A Banach–Steinhaus tétel (61. o.) miatt elég megjegyeznünk, hogy $\|\tilde{S}_m\| \rightarrow \infty$ a 20.10 lemma *bizonyítása* alapján (230. o.), abban ugyanis csak páros tesztfüggvényeket használtunk. □

Befejezésül ismertessünk még két nevezetes negatív eredményt. Valamely J intervallumon adott w súlyfüggvény esetén vezessük be a szokásos (p_n) ortogonális polinomsorozatot.³⁷ A megfelelő skaláris szorzatra nézve normálva *ortonormált* (P_n) polinomsorozathoz jutunk.

³⁶ Lozinszkij 1948.

³⁷ Lásd első kötet, 9. fejezet, 191. o.

Adott $I = [a, b]$ korlátos, zárt intervallum esetén érdekes kérdés, hogy létezik-e olyan w súlyfüggvény valamely I -t magában foglaló J intervallumon, hogy

- tetszőleges $f \in C(J)$ -re a $\sum (f, P_n)P_n$ Fourier-sor *egyenletesen* tart f -hez I -ben;
- tetszőleges $f \in C(J)$ -re $L_m f$ *egyenletesen* tart f -hez I -ben, ahol $L_m f$ -fel jelöljük f -nek a p_m ortogonális polinom gyökeihez mint csomópontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomját.

Mindkét esetben pozitív válasz esetén természetes bizonyítást kapnánk Weierstrass approximációs tételére. Azonban a válasz nemleges:

20.21. Állítás.

- (a) (Nyikolajev³⁸) Bármely w -hez van olyan $f \in C(J)$, hogy $\sum (f, P_n)P_n$ nem tart egyenletesen f -hez I -n.
- (b) (Faber³⁹) Bármely w -hez található olyan $f \in C(J)$, hogy $L_m f$ nem tart egyenletesen f -hez I -n.

Bizonyítás.

- (a) A folytonos lineáris

$$L_m f := \sum_{n=0}^m (f, P_n) P_n$$

vetítések eleget tesznek a 20.20 tétel feltételeinek.

- (b) Az itteni L_m operátorok is eleget tesznek a 20.20 tétel feltételeinek.

□

20.8. * Duális tér. Riesz-féle reprezentációs tétel

Legyen K kompakt Hausdorff-tér. A mértékelmélet segítségével jellemezhető $C(K)$ duálisa.

³⁸ Nyikolajev [Nikolaev] 1948. A későbbi 21.6 következményből (262. o.) adódni fog, hogy a w -hez tartozó skaláris szorzat által definiált *gyengébb* normában *mindig* fennáll a konvergencia.

³⁹ Faber 1914. A tételt már kimondtuk az első kötetben: 8.10 tétel, 184. o.

Definíció. Jelöljük \mathcal{B} -vel az $\{f = 0\}$ alakú halmazok által generált σ -gyűrűt (ez valójában σ -algebra is), ahol f végigfut $C(K)$ elemein; \mathcal{B} elemeit *Baire-halmazoknak* hívjuk.⁴⁰

Megjegyzés. Ha $g \in C(K)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor a

$$\{g = c\}, \quad \{g \leq c\}, \quad \{g \geq c\}, \quad \{g < c\}, \quad \{g > c\}$$

nívóhalmazok is Baire-halmazok, mert

$$\begin{aligned} \{g = c\} &= \{g - c = 0\}, \\ \{g \leq c\} &= \{(g - c)^+ = 0\}, \\ \{g \geq c\} &= \{(g - c)^- = 0\}, \\ \{g < c\} &= K \setminus \{g \geq c\} \end{aligned}$$

és

$$\{g > c\} = K \setminus \{g \leq c\}.$$

Definíció. *Baire-mértéken*, illetve *Baire-féle előjeles mértéken* \mathcal{B} -n értelmezett *véges mértéket*, illetve *előjeles mértéket* értünk.

A Baire-mértékek fontos *regularitási* tulajdonsággal rendelkeznek: jól közelíthetőek zárt és nyílt halmazokkal is:

20.22. Állítás. Legyen μ Baire-mérték, $A \in \mathcal{B}$ és $\varepsilon > 0$. Létezik olyan F zárt és G nyílt halmaz \mathcal{B} -ben, hogy

$$F \subset A \subset G \quad \text{és} \quad \mu(G \setminus F) < \varepsilon. \quad (20.11)$$

Bizonyítás. Jelöljük ideiglenesen \mathcal{B}' -vel azon Baire-halmazok rendszerét, amelyeknek rendelkeznek a (20.11) tulajdonsággal. A $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ egyenlőséghez elegendő megmutatnunk, hogy \mathcal{B}' olyan σ -algebra, amely tartalmazza az $\{f = 0\}$ alakú halmazokat minden $f \in C(K)$ -ra.

Ha $A = \{f = 0\}$ valamely $f \in C(K)$ -ra, akkor az

$$F := A, \quad G_n := \{|f| < 1/n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

képletek olyan $F \in \mathcal{B}$ zárt halmazt és $G_n \in \mathcal{B}$ nyílt halmazokat definiálnak, hogy $F \subset A \subset G_n$ minden n -re.

Mínthogy a (G_n) halmazsorozat monoton fogyó, és

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{0 < |f| < 1/n\} = \emptyset,$$

⁴⁰ Baire 1899.

a 19.3 állítás (183. o.) alapján elég nagy n -re $\mu(G_n \setminus F) < \varepsilon$.

Az $f = 0$ és $f = 1$ konstans függvények választása mutatja, hogy speciálisan K és \emptyset \mathcal{B}' -hez tartoznak.

Ha $A \in \mathcal{B}'$, akkor $K \setminus A \in \mathcal{B}'$. Ha ugyanis F és G eleget tesznek (20.11)-nek, akkor $K \setminus G$ zárt, $K \setminus F$ nyílt, mindketten \mathcal{B} -beliek,

$$K \setminus G \subset K \setminus A \subset K \setminus F \quad \text{és} \quad \mu((K \setminus F) \setminus (K \setminus G)) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Ha (A_n) diszjunkt \mathcal{B}' -beli sorozat, akkor $A := \cup^* A_n \in \mathcal{B}'$. Válasszunk ugyanis tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz olyan $F_n \in \mathcal{B}$ nyílt és $G_n \in \mathcal{B}$ zárt halmazokat, hogy

$$F_n \subset A_n \subset G_n \quad \text{és} \quad \mu(G_n \setminus F_n) < 2^{-n} \varepsilon$$

minden n természetes számra. Akkor $G := \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ nyílt halmaz, az $F^N := \cup_{n=1}^N F_n$ halmazok minden N természetes számra zártak, valamennyien \mathcal{B} -beliek, $F^N \subset A \subset G$, és

$$\mu(G \setminus F^N) \leq \left(\sum_{n=1}^N \mu(G_n \setminus F_n) \right) + \sum_{n>N} \mu(G_n) < (1 - 2^{-N})\varepsilon + \sum_{n>N} \mu(G_n).$$

Mínthogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) < \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) + 2^{-n} \varepsilon) = \mu(A) + \varepsilon < \infty,$$

innen következik, hogy elég nagy N -re $\mu(G \setminus F^N) < \varepsilon$. □

A Baire-féle előjeles mértékek $M(K)$ halmaza normált tér a $\|\mu\| := |\mu|(K)$ képlettel definiált normára nézve⁴¹, és a

$$(j\mu)(f) := \int f \, d\mu$$

képlet legfeljebb egy normájú $j : M(K) \rightarrow C(K)'$ folytonos lineáris leképezést értelmez. Az egyetlen nem-triviális tulajdonság a normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség. Ennek igazolására tekintsük a μ és μ' előjeles mértékekre vonatkozó $K = P \cup^* N$ és $K = P' \cup^* N'$ Hahn-felbontásokat. Bevezetve az

$$A := (P \cap P') \cup^* (N \cap N') \quad \text{és} \quad B := (P \cap N') \cup^* (N \cap P')$$

⁴¹ E normát μ teljes változásának hívjuk.

halmazokat,

$$\begin{aligned}
 \|\mu + \mu'\| &= |\mu + \mu'| (K) \\
 &= |(\mu + \mu')(A)| + |(\mu + \mu')(B)| \\
 &\leq |(\mu + \mu')(A)| + (|\mu| + |\mu'|)(B) \\
 &= |\mu| (K) + |\mu'| (K) \\
 &= \|\mu\| + \|\mu'\|.
 \end{aligned}$$

A következő alapvető eredmény szerint minden $C(K)$ -n definiált folytonos lineáris funkcionál megkapható ilyen módon, és az előjeles mértékek $M(K)$ normált tere *teljes*.

20.23. Tétel. (Riesz⁴²) *Ha K kompakt topologikus tér, akkor j izometrikus izomorfizmus $M(K)$ és $C(K)'$ között.*

Megjegyzés. Nem szükséges feltenni, hogy K szeparált. Azonosítva ugyanis két pontot, ha $h(x) = h(y)$ minden $h \in C(K)$ -ra, könnyen visszavezethetjük a problémát arra az esetre, amikor bármely két különböző pont szétválasztható folytonos függvénnyel. A továbbiakban feltesszük ezt a tulajdonságot. (Csak a 20.27 lemma bizonyításakor lesz rá szükségünk, hogy alkalmazhassuk a 20.6 állítást.

Több lépésben járunk el.

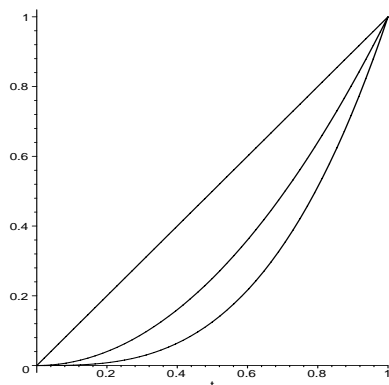
20.24. Állítás. (Dini⁴³) *Ha a $C(K)$ -beli monoton fogyó (f_n) függvény-sorozat K minden pontjában nullához tart, akkor a konvergencia egyenletes.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -t. Minden $t \in K$ -hoz van olyan n_t index, hogy $f_{n_t}(t) < \varepsilon$; f_{n_t} folytonossága miatt az $f_{n_t} < \varepsilon$ egyenlőtlenség érvényben marad a t pont alkalmas V_t nyílt környezetében is. A kompakt K halmaz befedhető véges sok ilyen környezettel, mondjuk:

$$K = V_{t_1} \cup \dots \cup V_{t_m}.$$

⁴² Riesz 1909a ($K = [0, 1]$ -re), Radon 1913 ($K \subset \mathbb{R}^N$ -re, 1333. o.), Banach 1937 és Saks 1938 (kompakt metrikus terekre), Markov 1938 ($C_b(K)$ -ra bizonyos nem-kompakt terek esetén), Kakutani 1941 (kompakt topologikus terekre). Lásd még Riesz szép bizonyítását a $K = [0, 1]$ esetre: Riesz és Szőkefalvi-Nagy 1988, 50. §.

⁴³ Dini 1878, §99. Lásd a 20.15 ábrán az $f_n(t) := t, t^2, t^3$ függvények gráfját, és legyen $K = [0, 1 - \varepsilon]$.



20.15. ábra. Dini tétele

Akkor

$$\|f_n\|_\infty < \varepsilon \quad \text{minden} \quad n \geq \max\{t_1, \dots, t_m\}\text{-re.}$$

Ugyanis minden $s \in K$ pont hozzátartozik valamely V_{t_i} -hez, és akkor

$$0 \leq f_n(s) \leq f_{n_{t_i}}(s) < \varepsilon. \quad \square$$

20.25. Lemma. Ha $\varphi : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál⁴⁴, akkor van olyan $\mu \in M(K)$, hogy $\varphi = j\mu$.

Bizonyítás. Kindlert követve⁴⁵ az

$$[f, g] := \{(x, t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq t < g(x)\}, \quad f, g \in C(K), \quad f \leq g$$

„intervallumok”⁴⁶ $K \times \mathbb{R}$ -beli \mathcal{P} félgűrűt alkotnak, a

$$\nu([f, g]) := \varphi(g - f)$$

képlet pedig véges, additív halmazfüggvényt definiál \mathcal{P} -n, amelyre $\nu(\emptyset) = 0$.

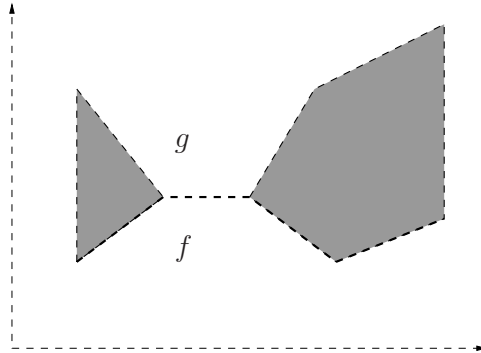
Megmutatjuk, hogy ν σ -additív, tehát mérték is. Ha $[f, g] = \cup^* [f_n, g_n]$, akkor

$$[f(x), g(x)] = \cup^* [f_n(x), g_n(x)]$$

⁴⁴ Vagyis $\varphi(f) \geq 0$ minden nem-negatív f -re.

⁴⁵ Kindler 1983.

⁴⁶ Lásd a 20.16 ábrát.

20.16. ábra. Egy $[f, g)$ „intervallum”

minden $x \in K$ -ra, és így

$$g(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) - f_n(x),$$

mert a közöséges intervallumok hossza mérték. Legyen

$$h_n := g - f - \sum_{m=1}^n (g_m - f_m),$$

akkor $h_n \searrow 0$ K -n, és Dini előbbi tétele alapján a konvergencia egyenletes. Következésképpen $\varphi(h_n) \rightarrow 0$, vagyis

$$\nu([f, g)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu([f_n, g_n)).$$

Alkalmazva a 17.18 állítást (162. o.) terjesszük ki ν -t a mérhető halmazok \mathcal{M} σ -gyűrűjén értelmezett mértékké. (Most \mathcal{M} σ -algebra is.) Ha $f \in C(K)$ és $c > 0$ valós szám, akkor az

$$\{f = 0\} \times [0, c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\min\{n|f|, c\}, c)$$

halmaz \mathcal{M} -hez tartozik. Minthogy \mathcal{B} a *legkisebb* olyan σ -algebra, amely tartalmazza az $\{f = 0\}$ halmazokat, innen következik, hogy $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Következésképpen a

$$\mu(A) := \nu(A \times [0, 1))$$

képlet mértéket definiál K -n, $\mu \in M(K)$.

Fogadjuk el egy pillanatra, hogy minden $f \in C(K)$ és $c > 0$ esetén

$$\nu(\{f > 1\} \times [0, c)) = c\nu(\{f > 1\} \times [0, 1)). \quad (20.12)$$

Mivel a jobboldali kifejezés definíció szerint $c\mu(\{f > 1\})$ -gyel egyenlő, a ν és μ mértékek additivitása miatt tetszőleges $0 < a < b$ számokra fennállnak a

$$\nu(\{a < f \leq b\} \times [0, c)) = c\mu(\{a < f \leq b\})$$

egyenlőségek is. Mutassuk meg ezek felhasználásával, hogy $\varphi(f) = \int f d\mu$ minden $f \in C(K)$ -ra. Az f függvény pozitív és negatív részét különválasztva feltehető, hogy $f \geq 0$. Akkor a $[0, f)$ intervallum a

$$B_n := \sum_{i=1}^{n2^n} \left\{ \frac{i}{2^n} < f \leq \frac{i+1}{2^n} \right\} \times \left[0, \frac{i}{2^n} \right)$$

halmazok monoton növekvő sorozatának az egyesítése, tehát

$$\varphi(f) = \nu([0, f)) = \lim \nu(B^n) = \int f d\mu.$$

A (20.12) egyenlőség igazolásához vezessük be minden n természetes számra az

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } f(t) \leq 1, \\ nf(t) - n & \text{ha } 1 \leq f(t) \leq (n+1)/n, \\ 1 & \text{ha } (n+1)/n \leq f(t) \end{cases}$$

folytonos függvényeket. Akkor $\{f > 1\} \times [0, c)$ a $[0, cf_n)$ intervallumon monoton növekvő sorozatának az egyesítése minden $c > 0$ -ra, ahonnan

$$\nu([0, cf_n)) \rightarrow \nu(\{f > 1\} \times [0, c)).$$

Mivel

$$\nu([0, cf_n)) = \varphi(cf_n) = c\varphi(f_n) = c\nu([0, f_n))$$

minden n -re, $n \rightarrow \infty$ esetén innen (20.12) adódik. \square

20.26. Lemma. Minden folytonos lineáris $\varphi \in C(K)'$ funkcionál két pozitív lineáris funkcionál különbsége.

Bizonyítás. Jelöljük $C(K)_+$ -szal a $C(K)$ -beli nem-negatív függvények rendszerét, és $f \in C(K)_+$ esetén legyen

$$\psi(f) := \sup\{\varphi(f') : f' \in C(K)_+ \text{ és } f' \leq f\}.$$

Akkor tetszőlegesen $f, g \in C(K)_+$ és $c \geq 0$ esetén teljesülnek a következő feltételek:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &\leq \psi(f); \\ 0 &\leq \psi(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\| < \infty; \\ \psi(cf) &= c\psi(f) \quad \text{minden } c \geq 0\text{-ra}; \\ \psi(f+g) &= \psi(f) + \psi(g).\end{aligned}$$

Csak az utolsó egyenlőség nem nyilvánvaló; igazolásához elegendő megmutatnunk minden $\varepsilon > 0$ -ra a

$$\psi(f+g) \geq \psi(f) + \psi(g) - 2\varepsilon \quad \text{és} \quad \psi(f+g) \leq \psi(f) + \psi(g) + \varepsilon$$

egyenlőtlenségeket.

Az elsőhöz elég olyan $0 \leq f' \leq f$ és $0 \leq g' \leq g$ függvényeket választanunk, amelyekre

$$\varphi(f') > \psi(f) - \varepsilon \quad \text{és} \quad \varphi(g') > \psi(g) - \varepsilon;$$

akkor ugyanis

$$\psi(f+g) \geq \varphi(f'+g') = \varphi(f') + \varphi(g') > \psi(f) + \psi(g) - 2\varepsilon.$$

A másodikhoz válasszunk olyan $0 \leq h' \leq f+g$ függvényt, hogy $\varphi(h') > \psi(f+g) - \varepsilon$, és legyen

$$f' := \min\{f, h'\} \quad \text{et} \quad g' := h' - f'.$$

Akkor

$$0 \leq f' \leq f \quad \text{és} \quad 0 \leq g' \leq g$$

K -n, mert

$$\begin{aligned}g' &= h' - \min\{f, h'\} = -\min\{f - h', 0\} \\ &= \max\{h' - f, 0\} \leq \max\{g, 0\} = g.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\psi(f+g) < \varphi(h') + \varepsilon = \varphi(f') + \varphi(g') + \varepsilon \leq \psi(f) + \psi(g) + \varepsilon.$$

A következő képlet, amelyben f^+ és f^- az f függvény pozitív és negatív részét jelöli, ψ pozitív lineáris kiterjesztését definiálja $C(K)$ -ra:

$$\Psi(f) := \psi(f^+) - \psi(f^-).$$

Csak az additivitás nem nyilvánvaló. Bevezetve a nem-negatív

$$h := f^+ + g^+ - (f+g)^+ = f^- + g^- - (f+g)^-$$

függvényt és felhasználva ψ additivitását a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \Psi(f + g) &= \psi((f + g)^+) - \psi((f + g)^-) \\
 &= \psi((f + g)^+) + \psi(h) - \psi((f + g)^-) - \psi(h) \\
 &= \psi(f^+ + g^+) - \psi(f^- + g^-) \\
 &= \psi(f^+) + \psi(g^+) - \psi(f^-) - \psi(g^-) \\
 &= \Psi(f) + \Psi(g).
 \end{aligned}$$

Végül jegyezzük meg, hogy a $\varphi(f) \leq \psi(f)$ egyenlőtlenségek következtében $\Psi - \varphi$ is pozitív lineáris funkcionál $C(K)$ -n. \square

Az eddigiek alapján a $j : M(K) \rightarrow C(K)'$ lineáris leképezés szuperjektív. A következő lemmával befejezzük a tétel bizonyítását:

20.27. Lemma. *A j leképezés izometria.*

Bizonyítás. Már tudjuk, hogy j folytonos és legfeljebb egy normájú. Hátra van a $\|j\mu\| \geq \|\mu\|$ egyenlőtlenségek megmutatása. Legyen $K = P \cup^* N$ a μ -re vonatkozó Hahn-felbontás. A 20.22 állítás szerint (244. o.) tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz léteznek olyan $P' \subset P$ és $N' \subset N$ diszjunkt zárt halmazok, hogy

$$|\mu(P \setminus P')| < \varepsilon \quad \text{és} \quad |\mu(N \setminus N')| < \varepsilon.$$

A

$$g(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in P', \\ -1 & \text{si } t \in N' \end{cases}$$

függvény nyilván folytonos $P' \cup^* N'$ -n. Alkalmazva a 20.6 állítást (226. o.) g kiterjeszthető olyan $f \in C(K)$ függvénné, amelyre⁴⁷

$$f = 1 \text{ } P'\text{-n, } f = -1 \text{ } N'\text{-n és } |f| \leq 1 \text{ } K\text{-n.}$$

⁴⁷ Metrizálható K esetén közvetlenül is megadhatunk ilyen f -et az

$$f(t) := \frac{\text{dist}(t, N') - \text{dist}(t, P')}{\text{dist}(t, N') + \text{dist}(t, P')}$$

képlettel.

Akkor $\|f\| \leq 1$, és

$$\begin{aligned} \|j\mu\| &\geq (j\mu)(f) \\ &= \int_{P'} f \, d\mu + \int_{N'} f \, d\mu + \int_{P \setminus P'} f \, d\mu + \int_{N \setminus N'} f \, d\mu \\ &\geq \mu(P') - \mu(N') - 2\varepsilon \\ &\geq \mu(P) - \mu(N) - 4\varepsilon \\ &= \|\mu\| - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Innen $\varepsilon \rightarrow 0$ mellett a keresett egyenlőtlenség adódik. \square

Példa. A 20.23 tétel felhasználásával közvetlenül is bebizonyíthatjuk, hogy $C([0, 1])$ nem reflexív. Tetszőleges $\mu \in M(K)$ mértékre vezessük be az

$$m(t) := \mu([0, t]), \quad t \in [0, 1]$$

függvényt, majd a

$$\Phi(\mu) := \sum_{0 < t < 1} m(t+) - m(t-)$$

számot. Olyan Φ folytonos lineáris funkcionálhoz jutunk $M(K)$ -n, amelyik semmilyen $f \in C(K)$ függvénnyel sem reprezentálható. Ha ugyanis volna olyan $f \in C(K)$ függvény, hogy

$$\Phi(\mu) = \int_0^1 f \, d\mu$$

minden $\mu \in M(K)$ -ra, akkor a $\mu := \delta_t$ választással, ahol δ_t a t -re koncentrált Dirac-mérték, $m = \chi_{[t, 1]}$ folytán $f(t) = 1$ adódna minden $0 < t < 1$ -re. De ekkor μ -nek a közös Lebesgue-mértéket választva $\int_0^1 f \, d\mu = 1$ adódna, holott most m azonosan nulla, és így $\Phi(\mu) = 0$.

20.9. Gyenge konvergencia

Emlékeztetünk arra, hogy a $C(K)$ -beli erős konvergencia a K -n vett egyenletes konvergencia. Most jellemezzük a gyenge konvergenciát⁴⁸:

⁴⁸ A $C(K)$ -beli gyengén kompakt halmazok jellemzését illetően lásd például Dunford–Schwartz 1957.

20.28. Állítás. Ha $f_n, f \in C(K)$, akkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (a) $f_n \rightharpoonup f$;
- (b) az (f_n) sorozat egyenletesen korlátos, és f_n pontonként konvergál f -hez K -n.

Bizonyítás. Ha f_n gyengén tart f -hez $C(K)$ -ban, akkor a 14.17 állítás (62. o.) miatt normában korlátos, vagyis egyenletesen korlátos. Ezenkívül bármely rögzített $t \in K$ esetén a $\varphi(f) := f(t)$ képlet egy normájú $\varphi \in C(K)'$ lineáris funkcionált definiál.⁴⁹ Következésképpen $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$, tehát $f_n(t) \rightarrow f(t)$ minden $t \in K$ -ra.

Legyen most (f_n) olyan egyenletesen korlátos $C(K)$ -beli sorozat, hogy valamely $f \in C(K)$ -ra $f_n(t) \rightarrow f(t)$ minden $t \in K$ -ra. A gyenge konvergenciához a 20.23 reprezentációs tétel (246. o.) alapján elég megmutatni, hogy

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$$

minden $\mu \in M(K)$ -ra. Ez pedig azonnal következik a Lebesgue-féle konvergenciatételből (151. o.). \square

Példa. Az állítás lehetővé teszi $C([0, 1])$ nem-reflexivitásának még egy egyszerű bizonyítását: az $f_n(t) := t^n$ képlet olyan $C([0, 1])$ -beli egyenletesen korlátos (f_n) függvénysorozatot értelmez, amely pontonként konvergál a *nem-folytonos*

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{ha } t = 1 \end{cases}$$

függvényhez. (Lásd az 20.15 ábrát, 247. o.) Következésképpen az (f_n) sorozatnak nincs gyengén konvergens részsorozata, hiszen egyetlen részsorozata sem konvergálhat pontonként valamely folytonos függvényhez.

⁴⁹ Ez a δ_t Dirac-mértékhez rendelt lineáris funkcionál.

21. fejezet

Integrálható függvények terei

A szépség a fő kritérium: ezen a világon nincs állandó helye a csúnya matematikának.

G. Hardy

A Lebesgue-integrál lehetővé teszi az alkalmazásokban fontos szerepet játszó függvényterek bevezetését. Ebben a fejezetben legyen (X, \mathcal{M}, μ) adott mértéktér, ahol \mathcal{M} -mel jelöljük a mérhető függvények σ -gyűrűjét, és μ -vel az \mathcal{M} -re kiterjesztett σ -véges, teljes mértéket. Ha $X = I$ intervallum, akkor ellenkező megjegyzés hiányában a közönséges Lebesgue-mértéket tekintjük I -n.¹

Szokás szerint azonosítunk két függvényt, ha m.m. egyenlőek egymással.

21.1. Az L^p terek, $1 \leq p \leq \infty$

Definíciók. Vezessük be minden X -en mérhető f függvényre² az

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

és

$$\|f\|_\infty := \inf \{ M \geq 0 : |f| \leq M \text{ p.p.} \}$$

¹ Csak valós értékű függvényekkel foglalkozunk. Lásd például Dunford–Schwartz 1957, Edwards 1965 és Yosida 1980 könyveit a Banach-tér értékű, Bochner-integrálható függvények tereit illetően.

² Riesz 1909. Általánosabb tereket is bevezetett Orlicz 1932, 1936; lásd Krasnoselskii–Rutickii 1962.

kifejezéseket. (Könnyen ellenőrizhető, hogy az infimum valójában *minimum* is.) Jelöljük továbbá $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ -vel, vagy röviden L^p -vel azon mérhető f függvények halmazát, amelyekre $\|f\|_p < \infty$. Nem teszünk különbséget két mérhető függvény között, ha m.m. egyenlőek. Hamarosan igazoljuk, hogy ekkor a fenti kifejezések normák.

Megjegyzések.

- Az $\|f\|_2$ norma az

$$(f, g) := \int_X fg \, d\mu$$

skaláris szorzattal is értelmezhető.

- Az $\|f\|_\infty$ jelölést az³

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$$

reláció indokolja, amely $\mu(X) < \infty$ esetén minden $f \in L^\infty$ -re fennáll.

- Ha X a természetes számok halmaza a számosság mértékkel ellátva, akkor speciális esetként a *Funkcionálanalízis* részben rendszeresen tanulmányozott ℓ^p tereket kapjuk.

Általánosítsuk először a 14.1 állítást (43. o.).

21.1. Állítás. Legyenek $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugált kitevők: $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

(a) (Hölder-egyenlőtlenség⁴) Ha $f \in L^p$ és $g \in L^q$, akkor $fg \in L^1$ és

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(b) (Minkowski-egyenlőtlenség⁵) Ha $f, g \in L^p$, akkor $f + g \in L^p$ és

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(c) (Riesz–Fischer⁶) L^p Banach-tér. L^2 Hilbert-tér.

(d) (Sűrűség) A mérhető halmazok karakterisztikus függvényei generálják L^∞ -t. Véges p esetén a véges mértékű halmazok karakterisztikus függvényei generálják L^p -t.

³ Fischer 1910, lásd Riesz 1910 (két cikk).

Bizonyítás.

(a) és (b) Kompakt téren folytonos függvényekre az egyenlőtlenségek már ismeretesek⁷; az azokra adott bizonyítás itt is érvényben marad.

(c) Az $1 < p < \infty$ esetben adaptáljuk a 17.12 tételben (154. o.) a $p = 1$ esetre adott bizonyítást. Legyen (f_n) Cauchy-sorozat L^p -ben. Ideiglenesen elfogadva az alábbi 21.2 lemmát, létezik olyan (f_{n_k}) részsorozat, hogy alkalmas $f \in L^p$ függvényre $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m.

Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy

$$\int |f_m - f_n|^p d\mu < \varepsilon$$

minden $m, n \geq N$ -re. Az $n = n_k$ választással $k \rightarrow \infty$ esetén a Fatou-lemmát alkalmazva az

$$\int |f_m - f|^p d\mu \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kapjuk minden $m \geq N$ -re.

Ha (f_n) L^∞ -beli Cauchy-sorozat, akkor létezik olyan $A \subset X$ nullahalmaz, hogy az f_n függvények $K := X \setminus A$ -ra vett g_n leszűkítései korlátosak, és Cauchy-sorozatot alkotnak $\mathcal{B}(K)$ -ban. Minthogy ez a tér teljes, van olyan korlátos g függvény, hogy $g_n \rightarrow g$ egyenletesen K -n. Terjesszük ki g -t tetszőleges módon A -ra, akkor olyan korlátos, mérhető f függvényt kapunk, hogy $f_n \rightarrow f$ L^∞ -ben.

(d) Tetszőlegesen adott $g \in L^\infty$ és $\varepsilon > 0$ esetén a

$$h(t) := k\varepsilon \quad \text{ha} \quad k\varepsilon \leq g(t) < (k+1)\varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}$$

képlet mérhető halmazok karakterisztikus függvényeinek olyan véges lineáris kombinációját definiálja, amelyre $\|g - h\|_\infty \leq \varepsilon$.

Az $1 \leq p < \infty$ esetre a kívántnál erősebb tulajdonságot igazolunk később, a 21.3 lemmában. \square

21.2. Lemma. (Riesz⁸) Legyen (f_n) Cauchy-sorozat L^p -ben, $1 \leq p < \infty$. Létezik olyan (f_{n_k}) részsorozat, hogy alkalmas $f, g \in L^p$ függvényekre $|f_{n_k}| \leq g$ m.m. minden k -ra, és $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m.

⁴ Riesz 1910, 1928.

⁵ Riesz 1910, 1928.

⁶ Riesz 1907 (három cikk) és Fischer 1907 L^2 -ről, Riesz 1909 és 1910 (két cikk) L^p -ről.

⁷ Topológia, 3.3 állítás, 67. o.

⁸ Riesz 1909.

Megjegyzés. A lemma $p = \infty$ esetén is fennáll, de ekkor nyilvánvalóan erősebb konklúzió is érvényes: létezik olyan $f \in L^\infty$ függvény, hogy alkalmas nullahalmazon kívül f_n egyenletesen f -hez tart.

Példa. (Fréchet⁹) Az $1 \leq p < \infty$ esetben szükséges a részsorozat szerepeltetése. Például az

$$f_{2^k+i}(t) := \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{i}{2^k} \leq t \leq \frac{i+1}{2^k}, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$$

képlettel értelmezett függvénysorozat $L^p(0, 1)$ -ben nullához tart minden $1 \leq p < \infty$ -re, de az $(f_n(t))$ számsorozat *semelyik* rögzített t -re sem konvergens.

Bizonyítás. Minthogy a $p = 1$ esetet már igazoltuk a 17.13 lemmában (154. o.), feltehetjük, hogy $1 < p < \infty$. Válasszunk olyan (f_{n_k}) részsorozatot, amelyre

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k} \quad \text{minden } n \geq n_k\text{-ra, } k = 1, 2, \dots$$

A 19.5 lemma alapján (186. o.) léteznek olyan véges mértékű A_m halmazok, hogy $A := \cup A_m$ -en kívül mindegyik f_{n_k} azonosan nulla.

Tetszőlegesen rögzített m -re alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget, és jelöljük q -val p konjugált kitevőjét:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_m)^q \cdot \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \mu(A_m)^q < \infty.$$

Alkalmazva a 17.9 következményt (150. o.) az

$$|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad \text{és} \quad f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

sorok A_m -en alkalmas g és f függvényekhez konvergálnak m.m. A megfelelő s_k, f_{n_k} részletösszegeket tekintve, és észrevéve, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt $|f_{n_k}| \leq s_k$ m.m., innen $|f_{n_k}| \leq g$ m.m. minden k -ra, $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m., és $|f| \leq g$ m.m.

Terjesszük ki f -et és g -t nullaként A komplementumára; akkor az utóbbi összefüggések az egész téren fennállnak. Minthogy $\|s_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1$ az (f_{n_k}) részsorozat választása miatt, a Fatou-lemma alapján (153. o.) $g \in L^p$, innen pedig $f \in L^p$, hiszen $|f| \leq g$ m.m. \square

Tanulmányozzuk a lépcsős függvények sűrűségét az L^p terekben:

⁹ Fréchet 1919–20.

21.3. Lemma.

(a) Legyen $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Létezik olyan (φ_n) lépcsős függványsorozat és olyan $h \in L^p$ függvény, hogy

$$|\varphi_n| \leq h \quad \text{m.m. minden } n\text{-re, és } \varphi_n \rightarrow f \quad \text{m.m.} \quad (21.1)$$

(b) Ha $1 \leq p < \infty$, akkor a lépcsős függvények sűrűek L^p -ben.

***Megjegyzés.** A lépcsős függvények nem sűrűek L^∞ -ben általában, de sűrűek a gyengébb $\sigma(L^\infty, L^1)$ lokálisan konvex topológiára nézve, amelyet a

$$p_g(f) := \left| \int f g \, d\mu \right|, \quad g \in L^1$$

félnormacs család definiál.¹⁰ Tekintsük ugyanis tetszőlegesen adott $f \in L^\infty$ -re a lemma (a) részében szereplő (φ_n) sorozatot. Akkor $\|(\varphi_n - f)g\|_1 \rightarrow 0$ minden $g \in L^1$ -re a Lebesgue-féle konvergenciatétel miatt (151. o.).

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $1 \leq p < \infty$. Az f függvény pozitív és negatív részét különválasztva feltehető, hogy $f \geq 0$ m.m. Alkalmazva a 17.15 állítás (d) részét (156. o.) f^p -re, létezik olyan (ψ_n) lépcsős függványsorozat és olyan $g \in L^1$ függvény, hogy

$$|\psi_n| \leq g \quad \text{minden } n\text{-re, és } \psi_n \rightarrow f^p \quad \text{m.m.}$$

A ψ_n függvényt $|\psi_n|$ -re cserélve az is feltehető, hogy $\psi_n \geq 0$ m.m. Akkor $h := g^{1/p}$ és $\varphi_n := \psi_n^{1/p}$ eleget tesznek (21.1)-nek. Minthogy

$$|\varphi_n - f|^p \leq (|\varphi_n| + |f|)^p \leq 2^p h^p = 2^p g \in L^1$$

minden n -re, alkalmazva a Lebesgue-féle konvergenciatételt $|\varphi_n - f|^p$ -re a $\varphi_n \rightarrow f$ relációt kapjuk L^p -ben.

Hátra van még (a) igazolása a $p = \infty$ esetben. Rögzítsük véges mértékű A_n halmazok olyan növekvő sorozatát, hogy $f = 0$ az $\cup A_n$ egyesítésen kívül.¹¹ Mivel $f \chi_{A_n} \in L^1$ minden n -re, rögzíthető olyan f_n lépcsős függvény, hogy

$$\|f \chi_{A_n} - f_n \chi_{A_n}\|_1 < 1/n.$$

Szükség esetén f_n -et a

$$\max\{-\|f\|_\infty, \min\{\|f\|_\infty, f_n\}\}$$

¹⁰ Részletesebben tanulmányozzuk majd ezt a topológiát a 21.7. szakaszban, 282. o.

¹¹ Minthogy L^∞ elemei a definíciónk értelmében mérhetőek, és nemcsak lokálisan mérhetőek, alkalmazható a 19.5 lemma (186). o.

függvénnyel helyettesítve az is feltehető, hogy $|f_n| \leq \|f\|_\infty$ m.m. minden n -re. Minthogy a $h := \|f\|_\infty$ konstans függvény L^∞ -hez tartozik, elég (f_n) -nek m.m. f -hez konvergáló részsorozatát találnunk.

Minthogy $\|f\chi_{A_1} - f_n\chi_{A_1}\|_1 \rightarrow 0$, alkalmazva a Riesz-lemmát létezik (f_n) -nek olyan (f_n^1) részsorozata, hogy $f_n^1 \rightarrow f$ m.m. A_1 -en.

Minthogy $\|f\chi_{A_2} - f_n^1\chi_{A_2}\|_1 \rightarrow 0$, alkalmazva ismét a Riesz-lemmát létezik (f_n^1) -nek olyan (f_n^2) részsorozata, hogy $f_n^2 \rightarrow f$ m.m. A_2 -n. Rekurzióval folytatva, majd alkalmazva a Cantor-féle átlós módszert végülis (f_n) -nek olyan (φ_n) részsorozatát kapjuk, amely m.m. f -hez konvergál. \square

Igazoljuk most a Hilbert–Schmidt tétel (32. o.) L^2 -beli változatát. A 19.3. szakaszhoz hasonlóan (188. o.) tekintsünk egy $\mu \times \mu$ szorzatmértéket $X \times X$ -en.

21.4. Állítás. (Hilbert–Schmidt¹²) Ha $a \in L^2(X \times X)$, akkor az

$$(Af)(t) := \int_X a(t, s)f(s) ds, \quad t \in X$$

képlet teljesen folytonos operátort definiál $L^2(X)$ -ben.

Bizonyítás. Felhasználva a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenséget és alkalmazva a Tonelli-tételt (191. o.) minden $f \in L^2(X)$ -re fennáll a következő becslés:

$$\begin{aligned} \int_X \left| \int_X a(t, s)f(s) ds \right|^2 dt &\leq \int_X \left(\int_X |a(t, s)|^2 ds \right) \cdot \left(\int_X |f(s)|^2 ds \right) dt \\ &= \|a\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Így A legfeljebb $\|a\|_2$ normájú, folytonos operátor $L^2(X)$ -ben.

A kompaktság igazolásához rögzítsünk a 21.3 lemma alapján olyan (a_n) lépcsős függvénysorozatot, hogy $a_n \rightarrow a$ $L^2(X \times X)$ -ben. Megismételve az előző becslést a helyett a_n -re és $a - a_n$ -re azt kapjuk, hogy az

$$(A_n f)(t) := \int_X a_n(t, s)f(s) ds, \quad t \in X$$

operátorok folytonosak $L^2(X)$ -ben, és

$$\|A - A_n\| \leq \|a - a_n\|_2 \rightarrow 0.$$

Befejezésül elég megmutatnunk hogy az A_n operátorok véges rangúak. Ekkor ugyanis kompaktak is, és az A határértékük is kompakt a 14.29 állítás szerint (80. o.).

¹² Hilbert 1906, Schmidt 1907.

A véges rangúsághoz jegyezzük meg, hogy a szorzatmérték definíciója alapján minden $X \times X$ -en értelmezett lépcsős függvény

$$(t, s) \mapsto \chi_J(t) \cdot \chi_K(s)$$

alakú függvények véges lineáris kombinációja, ahol $J, K \in \mathcal{M}$ véges mértékű halmazok. Márpedig az ilyen függvényekhez tartozó operátorok képterét az egyetlen χ_K függvény generálja. \square

A szakasz hátralévő részében néhány fontos speciális esetet tanulmányozunk. Legyen I nyílt intervallum, $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig a szokásos Lebesgue-mértékre vonatkozólag mérhető, m.m. nem-negatív függvény. Tegyük fel, hogy w integrálható I minden kompakt részintervallumán¹³, és jelöljük \mathcal{P} -vel azon korlátos intervallumok félgűrűjét, amelyeknek a lezárása is I -ben van. A $\mu(J) := \int_J w \, dt$ képlet véges mértéket definiál \mathcal{P} -n. Tekintsük a hozzátartozó integrálelméletet, és jelöljük L_w^p -vel a megfelelő L^p tereket. A $w = 1$ esetben visszkapjuk a szokásos $L^p(I)$ tereket.

Jelöljük $C_c(I)$ -vel azon folytonos $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek a vektorterét, amelyek eltűnnek I valamely kompakt részintervallumán kívül, vagyis azonosan nullával egyenlők I végpontjainak alkalmas környezetében.¹⁴

21.5. Állítás. Legyen $1 \leq p < \infty$.

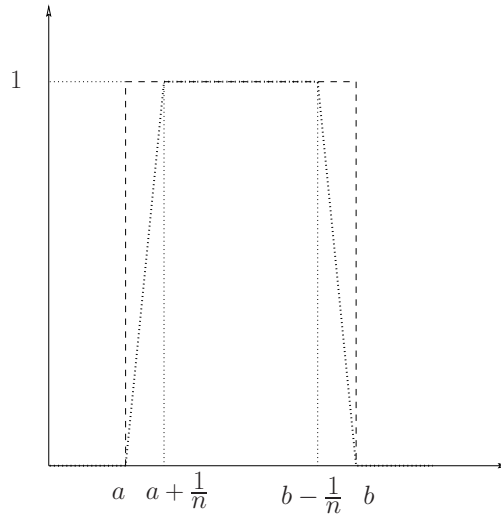
- (a) Az L_w^p tér szeparábilis.
- (b) $C_c(I)$ sűrű altere L_w^p -nek.
- (c) Ha I korlátos és w integrálható I -n, akkor az algebrai polinomok sűrűek L_w^p -ben.
- (d) Ha $|I| \leq 2\pi$ és w integrálható I -n, akkor a trigonometrikus polinomok sűrűek L_w^p -ben.

Bizonyítás. Jelöljük L_w^p normáját $\|\cdot\|_p$ -vel.

(a) A 21.3 lemma alapján a \mathcal{P} -beli intervallumok karakterisztikus függvényei generálják L_w^p -t. Ha ezek közül csak a racionális végpontú intervallumokat tekintjük, akkor olyan megszámlálható függvényrendszerhez jutunk, amely továbbra is generálja L_w^p -t.

¹³ Azt is mondjuk ilyenkor, hogy w lokálisan integrálható.

¹⁴ A kompakt részintervallum g -től függhet.

21.1. ábra. g_n gráfja

(b) A 21.3 lemma alapján elég minden nem-üres, korlátos $J = (a, b)$ intervallumhoz olyan $C_c(J)$ -beli (g_n) függvénysorozatot találni, amely L_w^p -ben χ_J -hez tart. Definiáljuk minden $n > 2/(b - a)$ egészre g_n -et a

$$g_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq a, \\ n(t - a) & \text{ha } a \leq t \leq a + n^{-1}, \\ 1 & \text{ha } a + n^{-1} \leq t \leq b - n^{-1}, \\ n(b - t) & \text{ha } b - n^{-1} \leq t \leq b, \\ 0 & \text{ha } t \geq b \end{cases}$$

képlettel; lásd a 21.1 ábrát. Akkor

$$\|\chi_J - g_n\|_p^p = \int_a^b |1 - g_n(t)|^p w(t) dt \rightarrow 0$$

a Lebesgue-féle konvergenciatétel miatt, mert minden n -re

$$0 \leq |1 - g_n|^p w \leq w$$

m.m.

(c) Tetszőlegesen adott $f \in L_w^p$ és $\varepsilon > 0$ esetén (b) alapján válasszunk olyan $g \in C_c(I)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Ezután alkalmazva

Weierstrass első approximációs tételét (218. o.) válasszunk olyan (p_n) polinomsorozatot, hogy $\|g - p_n\|_\infty \rightarrow 0$. Minthogy

$$\|f - p_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - p_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \|g - p_n\|_\infty \cdot \|1\|_p,$$

elég nagy n -re $\|f - p_n\|_p < \varepsilon$.

(d) Tetszőlegesen adott $f \in L_w^p$ és $\varepsilon > 0$ esetén (b) alapján válasszunk ismét olyan $g \in C_c(I)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Minthogy $|I| \leq 2\pi$, g kiterjeszthető \mathbb{R} -en értelmezett 2π -periodikus, folytonos függvénné. Alkalmazva Weierstrass második approximációs tételét (221. o.) válasszunk olyan (h_n) trigonometrikus polinomsorozatot, hogy $\|g - h_n\|_\infty \rightarrow 0$. Megismételve a (c)-beli okoskodást elég nagy n -re $\|f - h_n\|_p < \varepsilon$ adódik. \square

***Megjegyzések.** Tekintsük a $w = 1$ speciális esetet.

- A (b) tulajdonság szerint az $L^p(I)$ terek $C_c(I)$ teljessé tételének tekinthetők a $\|\cdot\|_p$ normára nézve.
- A fenti négy tulajdonság egyike sem teljesül általában $L^\infty(I)$ -re. Ugyanis (b), (c) és (d) mindegyike maga után vonná (a)-t, márpedig $L^\infty(I)$ nem szeparábilis. Ez könnyen látható az ℓ^∞ tér nem-szeparabilitására adott korábbi bizonyításunk adaptációjával (57. o.).
- Másrészt mind a négy tulajdonság érvényben marad, ha $L^\infty(I)$ -en a $\sigma(L^\infty, L^1)$ gyenge topológiát tekintjük. (Lásd a fenti 21.3 lemmát követő megjegyzést.)

A következőkben megmutatjuk, hogy számos korábban bevezetett ortogonális függvényrendszer teljes; emlékeztetünk ennek a fontosságára a megfelelő Fourier-sorok konvergenciájának a szempontjából.¹⁵

Tekintsük az $(f, g) := \int f g w \, dt$ skaláris szorzattal ellátott L_w^2 Hilbertteret. Ha a $t \mapsto t^k w(t)$ függvények minden nem-negatív k egészre integrálhatók, akkor az algebrai polinomok mind L_w^2 -hez tartoznak.¹⁶ Alkalmazva a Gram–Schmidt ortogonalizációt¹⁷ az $1, \text{id}, \text{id}^2, \dots$ függvényso-rozatra, majd normalizálva a kapott p_k polinomokat olyan ortonormált (P_k) polinomsorozatot kapunk L_w^2 -ben, hogy $\deg p_k = k$ minden k -ra.

21.6. Következmény.

(a) Ha I korlátos és w integrálható I -n, akkor (P_k) ortonormált bázis L_w^2 -ben.

¹⁵ Lásd a 13.7 állítást, 19. o.

¹⁶ Ez a helyzet például, ha I korlátos és w integrálható I -n.

¹⁷ Első kötet, 9.1 állítás, 192. o.

(b) Ha I 2π hosszúságú intervallum, akkor a trigonometrikus rendszer:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad e_{2k-1} = \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2k} = \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ortonormált bázis $L^2(I)$ -ben.

(c) A

$$\sqrt{2/\pi} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

függvények ortonormált bázist alkotnak $L^2(0, \pi)$ -ben.

(d) Az

$$1/\sqrt{\pi} \quad \text{és} \quad \sqrt{2/\pi} \cos kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

függvények ortonormált bázist alkotnak $L^2(0, \pi)$ -ben.

Bizonyítás. A (b), (c), (d)-beli függvények ortonormalitása közvetlen számolással ellenőrizhető.

(a) és (b) következik az előző állítás (c), (d) részeiből és a 13.8 állításból (22. o.).

(c) Elég megmutatnunk, hogy ha $h \in L^2(0, \pi)$ ortogonális a $\sin kt$ függvényekre minden $k = 1, 2, \dots$ esetén, akkor $h = 0$ m.m. A h függvényt páratlan függvényként $(-\pi, \pi)$ -re kiterjesztve olyan $H \in L^2(-\pi, \pi)$ függvényhez jutunk, amely ortogonális a teljes trigonometrikus rendszerre. Ekkor (b) miatt $H = 0$ m.m. $(-\pi, \pi)$ -n, és így $h = 0$ m.m. $(0, \pi)$ -n.

(d) Elég megmutatnunk, hogy ha $h \in L^2(0, \pi)$ ortogonális a $\cos kt$ függvényekre minden $k = 0, 1, \dots$ esetén, akkor $h = 0$ m.m. A h függvényt páros függvényként $(-\pi, \pi)$ -re kiterjesztve olyan $H \in L^2(-\pi, \pi)$ függvényhez jutunk, amely ortogonális a teljes trigonometrikus rendszerre. Ekkor (b) miatt $H = 0$ m.m. $(-\pi, \pi)$ -n, és így $h = 0$ m.m. $(0, \pi)$ -n. \square

*Megjegyzések.

- Az adott pótfeltevések hiányában a (p_k) ortogonális polinomsorozat nem feltétlenül teljes.¹⁸ A gyakorlatban fontos Laguerre- és Hermite-polinomok azonban teljesek, bár nem teljesítik az előző állítás feltételeit.¹⁹

¹⁸ Nevezetes ellenpéldát mutatott erre Stieltjes 1894.

¹⁹ Sztyeklov [Steklov] 1916. Lásd Neumann János bizonyítását is Courant–Hilbert 1931 vagy Szegő 1975 könyvében, 81–82. illetve 104–106. o.

- Minthogy az L^2 -beli konvergencia nem vonja maga után a m.m. konvergenciát általában, a Fourier-sorok konvergenciájáról szóló 13.8 állításból nem következik a m.m. konvergencia. Mindazonáltal Carleson bebizonyította, hogy ha I 2π hosszúságú intervallum, akkor bármely $f \in L^2(I)$ függvény *trigonometrikus* Fourier-sora m.m. konvergál f -hez.²⁰
- Alkalmazva Haar ekvikonvergenciatételét hasonló eredmény érvényes a Legendre-polinomok szerinti sorfejtésekre is.²¹

21.2. * Kompakt halmazok

Ebben a szakaszban jellemezzük az L^p -beli kompakt halmazokat az \mathbb{R} -beli szokásos Lebesgue-mérték esetén. Akárcsak az előző fejezetben (20.7 állítás, 227. o.), elég a teljesen korlátos halmazokat jellemeznünk.

21.7. Állítás. (Riesz M.²²) Legyen $1 \leq p < \infty$. Az $L^p(\mathbb{R})$ -beli \mathcal{F} halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha eleget tesz a következő két feltételnek:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|t| > R} |f(t)|^p dt \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad R \rightarrow \infty$$

és

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(t+h)|^p dt \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad h \rightarrow 0.$$

Vezessük be a kényelem kedvéért az eltolts $f_h(t) := f(t+h)$ függvényeket, és írjuk át a feltételeinket a következő formába:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad R \rightarrow \infty \quad (21.2)$$

és

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f - f_h\|_p \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad h \rightarrow 0. \quad (21.3)$$

²⁰ Carleson 1966. Ezzel igazolta Luzin [Lusin] 1913 régi sejtését. Carleson tételét Hunt 1967 általánosította az L^p esetre, ahol $p > 1$.

²¹ Haar 1918. Ilyen jellegű ekvikonvergenciatételt már Liouville is igazolt 1837-ben. Az eredmény érvényben marad minden klasszikus ortogonális polinomsorozatra is: lásd Joó–Komornik 1983, Komornik 1984, 1986.

²² Riesz M. 1933.

A szükségesség bizonyítása. *Első lépés.* Ha $f \in L^p$ és $1 \leq p < \infty$, akkor

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad R \rightarrow \infty$$

és

$$\|f - f_h\|_p \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad h \rightarrow 0.$$

Ugyanis a

$$g_n(t) := \begin{cases} |f(t)|^p & \text{ha } |t| \leq n, \\ 0 & \text{ha } |t| > n \end{cases}$$

függvények integrálhatók, $|g_n| \leq |f|^p$ és $g_n \rightarrow 0$ m.m., tehát a Lebesgue-féle konvergenciátétel alapján

$$0 \leq \int_{|t| > R} |f(t)|^p dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_{[R]}(t) dt \rightarrow 0,$$

ha $R \rightarrow \infty$. (Itt $[R]$ -szel R egész részét jelöljük.) Ez bizonyítja az első relációt.

A második reláció nyilvánvaló, ha f valamely korlátos intervallum karakterisztikus függvénye. A háromszög-egyenlőtlenség alapján tetszőleges lépcsős függvényre is érvényben marad. Végül tetszőleges $f \in L^p$ és $\varepsilon > 0$ esetén válasszunk olyan g lépcsős függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Akkor $\|f_h - g_h\|_p < \varepsilon$ is fennáll minden h -ra. Ha h elég közel van nullához, akkor $\|g - g_h\|_p < \varepsilon$, tehát

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p < 3\varepsilon.$$

Második lépés. Ha \mathcal{F} teljesen korlátos, akkor minden rögzített $\varepsilon > 0$ -hoz befedhető véges sok ε sugarú gömbbel; jelöljük ezek középpontjait f_1, \dots, f_m -mel.

Az első lépés miatt létezik olyan $R > 0$ és $\delta > 0$, hogy

$$\|f_i\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} < \varepsilon,$$

és

$$\|f_i - f_{i,h}\|_p < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |h| < \delta$$

$i = 1, \dots, m$ -re.

Minden $f \in \mathcal{F}$ hozzátartozik egy ilyen $B_\varepsilon(f_i)$ gömbhöz, úgyhogy

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} \leq \|f - f_i\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} + \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} < 2\varepsilon,$$

és

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f - f_i\|_p + \|f_i - f_{i,h}\|_p + \|f_{i,h} - f_h\|_p < 3\varepsilon,$$

ha $|h| < \delta$. □

Az elégségeség bizonyítása. *Első lépés.* Sztyeklov²³ regularizálási eljárását használva visszavezetjük a problémát a folytonos függvények esetére. Legyen tehát

$$(S_r f)(t) := \frac{1}{r} \int_0^r f(t+s) ds, \quad f \in L^p, \quad r > 0.$$

Igazoljuk először az alábbi becsléseket:

$$\|S_r f\|_\infty \leq r^{-1/p} \|f\|_p; \quad (21.4)$$

$$|(S_r f)(t) - (S_r f)(t+h)| \leq r^{-1/p} \|f - f_h\|_p \quad (21.5)$$

minden $t \in \mathbb{R}$ -re;

$$\|f - S_r f\|_p \leq \sup_{0 < h \leq r} \|f - f_h\|_p. \quad (21.6)$$

Az első becslés a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával adódik:

$$|(S_r f)(t)| \leq r^{-1} \int_0^r |f(t+s)| ds \leq r^{-1/p} \|f\|_{L^p(t, t+r)} \leq r^{-1/p} \|f\|_p$$

minden $t \in \mathbb{R}$ -re. A (21.5) becslést megkapjuk, ha (21.4)-et f helyett $f - f_h$ -ra alkalmazzuk. Végül

$$\begin{aligned} |(f - S_r f)(t)| &= \left| r^{-1} \int_0^r f(t) - f(t+s) ds \right| \\ &\leq r^{-1/p} \left(\int_0^r |f(t) - f(t+s)|^p ds \right)^{1/p} \end{aligned}$$

minden t -re, és így

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(f - S_r f)(t)|^p dt &\leq r^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^r |f(t) - f(t+s)|^p ds dt \\ &= r^{-1} \int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(t+s)|^p dt ds \\ &\leq \sup_{0 < h \leq r} \|f - f_h\|_p^p. \end{aligned}$$

Ez igazolja (21.6)-ot.

²³ Sztyeklov [Steklov] 1911.

Második lépés. Elég tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ -ra befednünk \mathcal{F} -et véges sok, legfeljebb 3ε sugarú gömbbel.

Felhasználva (21.2)-t legyen $R > 0$ olyan szám, hogy

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} < \varepsilon \quad \text{minden } f \in \mathcal{F}\text{-re.}$$

Azután (21.3) és (21.6) alapján legyen $r > 0$ olyan kis szám, hogy

$$\|f - S_r f\|_p < \varepsilon \quad \text{minden } f \in \mathcal{F}\text{-re.}$$

A (21.4) és (21.5) tulajdonságok szerint az $\{S_r f : f \in \mathcal{F}\}$ függvényrendszer egyenletesen korlátos és egyszerre folytonos. Alkalmazva a $[-2R, 2R]$ intervallumon az Arzelà–Ascoli tételt (227. o.) léteznek tehát olyan $[-2R, 2R]$ -en folytonos g_1, \dots, g_m függvények, hogy minden $f \in \mathcal{F}$ függvény eleget tesz alkalmas i indexre az

$$|S_r f - g_i| \leq (2R)^{-1/p} \varepsilon \quad [-2R, 2R]\text{-en} \quad (21.7)$$

feltételnek. A g_i függvényeket nullaként \mathbb{R} -re kiterjesztve L^p -beli f_1, \dots, f_m függvényeket kapunk. Elég megmutatnunk, hogy $\|f - f_i\|_p < 3\varepsilon$ minden $f \in \mathcal{F}$ -re, ahol az i index ugyanaz, mint (21.7)-ben.

Ennek igazolására használjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget, R , r definícióját, végül pedig i választását:

$$\begin{aligned} \|f - f_i\|_p &= \|f\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} + \|f - g_i\|_{L^p(-R, R)} \\ &< \varepsilon + \|f - S_r f\|_{L^p(-R, R)} + \|S_r f - g_i\|_{L^p(-R, R)} \\ &< 2\varepsilon + (2R)^{1/p} \|S_r f - g_i\|_{L^\infty(-R, R)} \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

21.3. * Konvolúció

Az eddigiek során már számos alkalommal alkalmaztunk

$$\int f(s)g(t-s) ds$$

alakú integrálokat adott függvények *regularizálására*, vagyis simább függvényekkel való közelítésére: gondoljuk Landau és de la Vallée-Poussin módszereire, a Dirichlet- és Fejér-magokra az előző fejezetből, vagy a Sztyeklov-függvényekre az előző szakaszból. Ilyen integrálok gyakran előfordulnak a parciális differenciálegyenletek elméletében is. Haar Alfréd nevezetes

eredménye lehetővé tette ennek a technikának a kiterjesztését minden topologikus csoportra is.²⁴ A jelen szakaszban csak egy kis „ízeltőt” tudunk adni ebből a kérdéskörből.²⁵

21.8. Állítás. Legyen $1 \leq p, q, r \leq \infty$ három olyan szám, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

és legyen $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

(a) Az

$$(f * g)(x) := \int f(x - y)g(y) dy$$

képlet egy $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ függvényt definiál, és

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(b) Ha $f = 0$ m.m. az A halmazon kívül és $g = 0$ m.m. a B halmazon kívül, akkor $f * g = 0$ m.m. az

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{R}^N : a \in A \text{ és } b \in B\}$$

halmazon kívül.

Definíció. Az $f * g$ függvényt f és g konvolúciójának vagy konvolúció-szorzatának nevezzük.²⁶

Megjegyzések.

- A definícióból következik, hogy a konvolúció kommutatív: $f * g = g * f$.
- Teljes indukcióval igazolható, hogy ha valamilyen $k \geq 2$ egészre

$$f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N), \dots, f_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^N),$$

ahol $1 \leq p_1, \dots, p_k, r \leq \infty$ számok eleget tesznek az

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r} + k - 1$$

feltételnek, akkor $g := f_1 * (\dots * f_k) \dots \in L^r(\mathbb{R}^N)$, és

$$\|g\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

²⁴ Haar 1933.

²⁵ Sok kiegészítés és alkalmazás található a következő munkákban: Brezis 1983, Hörmander 1963, 1983, Katznelson 1976, Rudin 1962, 1973, 1986, L. Schwartz 1966, Weil 1940.

²⁶ Fourier 1822.

Ráadásul igazolható az $(f * g) * h = f * (g * h)$ asszociativitás is, úgyhogy elhagyhatók a zárójelek g definíciójából.

A kitevőkre vonatkozó feltétel a konjugált kitevőket használva az ekvivalens és egyszerűbb

$$\frac{1}{p'_1} + \dots + \frac{1}{p'_k} = \frac{1}{r'}$$

alakban is írható.

Az (a) rész bizonyítása. Az $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ függvény mérhetősége könnyen látható.

(i) Az $r = \infty$ eset a Hölder-egyenlőtlenségből adódik. Tegyük fel ezentúl, hogy $r < \infty$. Mivel $p \leq r$ és $q \leq r$, ekkor p és q is végesek.

(ii) Tanulmányozzuk először azt az esetet, amikor f és g nem-negatívak és integrálhatóak. Tonelli tételét alkalmazva az

$$\begin{aligned} \int (f * g)(x) dx &= \int \left(\int f(x-y)g(y) dy \right) dx \\ &= \int \left(\int f(x-y)g(y) dx \right) dy \\ &= \int \left(\int f(x-y) dx \right) g(y) dy \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty \end{aligned}$$

egyenlőséget nyerjük. Tehát $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, és

$$\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \quad (21.8)$$

(iii) Az általános esetre térve fogadjuk el ideiglenesen a következő egyenlőtlenséget:

$$(|f| * |g|)^r \leq \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot (|f|^p * |g|^q) \quad \text{m.m.} \quad (21.9)$$

A jobboldal az előző lépés alapján integrálható. Ezért $|f| * |g| \in L^r(\mathbb{R}^N)$, vagyis

$$\int \left(\int |f(x-y)g(y)| dy \right)^r dx < \infty.$$

Innen speciálisan adódik, hogy az

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

függvény m.m. x -re integrálható. Tehát $f * g$ m.m. értelmezve van.

Ezután (21.8) és (21.9) alkalmazásával a következő becslést kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \int |(f * g)(x)|^r dx &= \int \left| \int f(x-y)g(y) dy \right|^r dx \\
 &\leq \int \left(\int |f(x-y)g(y)| dy \right)^r dx \\
 &= \| |f| * |g| \|_r^r \\
 &\leq \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \| |f|^p * |g|^q \|_1 \\
 &= \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r.
 \end{aligned}$$

Ebből $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ és $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

(iv) Hátra van a (21.9) egyenlőtlenség igazolása. Bevezetve a p és q kitevők p' és q' konjugáltjait,

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1.$$

Minthogy

$$1 - \frac{p}{r} = p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) = p \left(1 - \frac{1}{q} \right) = \frac{p}{q'}$$

és

$$1 - \frac{q}{r} = q \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) = q \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{q}{p'},$$

m.m. fennáll a következő egyenlőség:

$$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p)^{1/q'} (|g(y)|^q)^{1/p'} (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{1/r}.$$

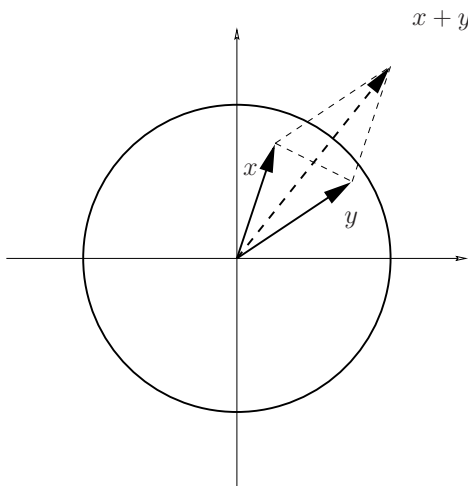
Alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget innen m.m. x -re adódik az

$$(|f| * |g|)(x) \leq \|f\|_p^{p/q'} \cdot \|g\|_q^{q/p'} \cdot (|f| * |g|)(x)^{1/r}$$

egyenlőtlenség, ebből pedig a keresett becslés:

$$\begin{aligned}
 (|f| * |g|)(x)^r &\leq \|f\|_p^{rp/q'} \cdot \|g\|_q^{rq/p'} \cdot (|f| * |g|)(x) \\
 &= \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot (|f|^p * |g|^q)(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

A (b) rész bizonyítása. Ha $(f * g)(x)$ értelmezve van valamely $x \notin A + B$ -re, akkor $x - y \notin A$ minden $y \in B$ -re. Következésképpen $f(x-y)g(y) = 0$ m.m. $y \in \mathbb{R}^N$ -re, tehát $(f * g)(x) = 0$. \square



21.2. ábra. Egyenletes konvexség

21.4. Egyenletesen konvex terek

Az euklideszi terek fontos tulajdonsága a paralelogramma-azonosság. Az $1 < p < \infty$ esetben az L^p terek rendelkeznek ennek az azonosságnak egy gyengített, de azért még nagyon hasznos változatával.

Definíció. AZ X normált tér *egyenletesen konvex*²⁷, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha két $x, y \in X$ vektorra

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \quad \text{és} \quad \|x + y\| > 2 - \delta,$$

akkor

$$\|x - y\| < \varepsilon.$$

(Lásd a 21.2 ábrát.)

Példák.

- Minden euklideszi tér egyenletesen konvex, mert a következők szerint a $\delta := \varepsilon^2/4$ választás megfelel:

$$\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 < 4 - (2 - \delta)^2 < 4\delta.$$

²⁷ Clarkson 1936.

- Az ℓ^1 tér nem egyenletesen konvex, ugyanis

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1 \quad \text{és} \quad \|e_1 + e_2\| = \|e_1 - e_2\| = 2,$$

úgyhogy $\varepsilon < 2$ -höz nem létezik alkalmas $\delta > 0$.

- Az ℓ^∞ tér sem egyenletesen konvex, ugyanis az $x := e_1 + e_2$ és $y := e_1 - e_2$ vektorokra

$$\|x\| = \|y\| = 1 \quad \text{és} \quad \|x + y\| = \|x - y\| = 2,$$

tehát $\varepsilon < 2$ -höz nem létezik alkalmas $\delta > 0$.

Másrészt az ℓ^p terek egyenletesen konvexek, ha $1 < p < \infty$. Általánosabban fennáll a

21.9. Állítás. Legyen (X, \mathcal{M}, μ) tetszőleges mértéktér és $1 < p < \infty$. Akkor $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ egyenletesen konvex.²⁸

Bizonyítás.

Első lépés. Ha x és y különböző valós számok, akkor

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^p < \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

a $t \mapsto |t|^p$ függvény szigorú konvexitása miatt.

Második lépés. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra jelöljük $\varrho = \varrho(\varepsilon)$ -nal az

$$\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - \left| \frac{x+y}{2} \right|^p$$

kifejezés minimumát az

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p = 2 \quad \text{és} \quad \left| \frac{x-y}{2} \right|^p \geq \varepsilon \right\}$$

kompakt halmazon. Az előző lépés miatt $\varrho > 0$. Innen homogenitási megfontolással adódik, hogy ha az x, y valós számokra

$$\left| \frac{x-y}{2} \right|^p \geq \varepsilon \frac{|x|^p + |y|^p}{2},$$

akkor

$$\varrho \frac{|x|^p + |y|^p}{2} \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{2} - \left| \frac{x+y}{2} \right|^p.$$

Harmadik lépés. Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz elég olyan $\delta > 0$ -t találnunk, hogy ha az $f, g \in L^p$ függvényekre

$$\int |f|^p dx \leq 1, \quad \int |g|^p dx \leq 1 \quad \text{és} \quad \int \left| \frac{f+g}{2} \right|^p dx > 1 - \delta,$$

²⁸ Clarkson 1936. Az alábbi bizonyítást McShane 1950 adta.

akkor

$$\int \left| \frac{f-g}{2} \right|^p dx < 2\varepsilon.$$

Bevezetve az

$$M := \left\{ \left| \frac{f-g}{2} \right|^p \geq \varepsilon \frac{|f|^p + |g|^p}{2} \right\}$$

halmazt és felhasználva a $t \mapsto |t|^p$ függvény konvexitását, az előző lépés alkalmazásával a következő becsléshez jutunk:

$$\begin{aligned} & \int_X \left| \frac{f-g}{2} \right|^p dx \\ &= \int_{X \setminus M} \left| \frac{f-g}{2} \right|^p dx + \int_M \left| \frac{f-g}{2} \right|^p dx \\ &\leq \varepsilon \int_{X \setminus M} \frac{|f|^p + |g|^p}{2} dx + \int_M \frac{|f|^p + |g|^p}{2} dx \\ &\leq \varepsilon \int_{X \setminus M} \frac{|f|^p + |g|^p}{2} dx + \frac{1}{\varrho} \int_M \left(\frac{|f|^p + |g|^p}{2} - \left| \frac{f+g}{2} \right|^p \right) dx \\ &\leq \varepsilon \int_X \frac{|f|^p + |g|^p}{2} dx + \frac{1}{\varrho} \int_X \left(\frac{|f|^p + |g|^p}{2} - \left| \frac{f+g}{2} \right|^p \right) dx \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{\varrho} - \frac{1-\delta}{\varrho} \\ &= \varepsilon + \frac{\delta}{\varrho}. \end{aligned}$$

Innen a $\delta < \varepsilon \varrho$ választással a keresett konklúzió adódik. \square

A Hilbert térbeli merőleges vetítés tételének (10. o.) a következő variánsa minden egyenletesen konvex Banach-térben érvényes:

21.10. Állítás. (Szőkefalvi-Nagy²⁹) *Legyen K nem-üres konvex zárt halmaz az egyenletesen konvex X Banach-térben. Minden $x \in X$ -hez létezik pontosan egy, tőle minimális távolságra lévő y pont K -ban.*

Bizonyítás.

Létezés. Az eredmény $x \in K$ -ra nyilvánvaló. Legyen ezentúl $x \notin K$, és válasszunk egy minimizáló (y_n) sorozatot: $y_n \in K$ és

$$\|x - y_n\| \rightarrow d := \text{dist}(x, K).$$

²⁹ Szőkefalvi-Nagy 1942.

Vezessük be a

$$t_n := 1/\|x - y_n\| \quad \text{és} \quad z_n := t_n(x - y_n)$$

jelöléseket, akkor $\|z_n\| = 1$ minden n -re. Felhasználva továbbá K konvexitását és d értelmezését a

$$\begin{aligned} \|z_n + z_m\| &= \|t_n(x - y_n) + t_m(x - y_m)\| \\ &= (t_n + t_m) \left\| x - \left(\frac{t_n}{t_n + t_m} y_n + \frac{t_m}{t_n + t_m} y_m \right) \right\| \\ &\geq (t_n + t_m) d \\ &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

relációhoz jutunk. Az egyenletes konvexitás miatt innen adódik, hogy (z_n) Cauchy-sorozat; a tér teljessége miatt tehát konvergál valamely $z \in X$ ponthoz. Következésképpen

$$y_n = x - \frac{z_n}{t_n} \rightarrow x - \frac{z}{d} =: y.$$

Akkor $y \in K$, mert K zárt, és $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d$.

Unicitás. Ha $y, y' \in K$ és $\|x - y\| = \|x - y'\| = d$, akkor az $y_{2n-1} := y$ és $y_{2n} := y'$, $n = 1, 2, \dots$ képletek minimalizáló sorozatot definiálnak. Az előző lépésben látottak alapján ez a sorozat konvergens, ami csak úgy lehetséges, ha $y = y'$. \square

***Példák.** Az L^1 és L^∞ terekben több minimális távolságra lévő pont is lehet, úgyhogy ezek a terek nem egyenletesen konvexek ³⁰:

- Tekintsük $X = L^1(-1, 1)$ -ben a nulla integrálú függvények M zárt lineáris alterét, és a konstans $g = 1$ függvényt. Akkor

$$\|g - f\|_1 = \int_{-1}^1 |1 - f(t)| dt \geq \int_{-1}^1 1 - f(t) dt = 2$$

minden $f \in M$ -re, és az egyenlőség áll fenn minden olyan $f \in M$ függvényre, amelyekre $f \leq 1$ m.m. Ezért a $\text{dist}(g, M) = 2$ távolság végtelen sok pontban felvétel.

- $X = L^\infty(-1, 1)$ -ben a $[-1, 0]$ intervallumban m.m. eltűnő függvények M zárt lineáris alteret alkotnak. Ha $g = 1$, akkor

$$\|g - f\|_\infty \geq \|g - f\|_{L^\infty(-1, 0)} = 1$$

³⁰ Hasonló példákat adtunk korábban \mathbb{R}^2 -ben: *Topológia*, 76–77. o.

minden $f \in M$ -re, és az egyenlőség teljesül minden olyan $f \in M$ függvényre, amelyikre $0 \leq f \leq 2$ m.m. Ezért a $\text{dist}(g, M) = 2$ távolság végtelen sok pontban felvételik.

Egyenletesen konvex terekben kiegészíthető az 14.15 állítás (60. o.) az erős és gyenge konvergencia kapcsolatáról:

21.11. *Állítás. (Radon–Riesz³¹) *Egyenletesen konvex normált terekben*

$$x_n \rightarrow x \iff x_n \rightharpoonup x \text{ és } \|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

Bizonyítás. $A \implies$ implikációt már megmutattuk (minden normált térre) a 14.15 állításban. A fordított irány igazolásához tegyük fel, hogy $\|x\| > 0$ (az $x = 0$ eset nyilvánvaló); akkor $\|x_n\| > 0$ minden elég nagy n -re. Az $x_n \rightharpoonup x$ és $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ feltevésekből következik, hogy

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x}{\|x\|} \rightharpoonup 2 \frac{x}{\|x\|}.$$

Mint hogy a határérték normája 2-vel egyenlő, a 14.15 állítás (f) része miatt tetszőlegesen rögzített $\delta > 0$ esetén

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x}{\|x\|} \right\| > 2 - \delta$$

ha n elég nagy. Az egyenletes konvexitás definíciója miatt innen

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \rightarrow 0.$$

Következésképpen

$$x_n = \|x_n\| \cdot \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} = x. \quad \square$$

***Megjegyzések.**

- Emlékeztetünk arra (63. o.), hogy az ekvivalencia nem teljesül például a c_0 és ℓ^∞ terekben.
- Emlékeztetünk arra is, hogy az ℓ^1 , bár nem egyenletesen konvex, rendelkezik a Radon–Riesz tulajdonsággal. (Lásd a 14.19 állítást, 64. o.).
- E példa kivételes: hamarosan látni fogjuk (285. o.), hogy $L^1(-\pi, \pi)$ nem rendelkezik a Radon–Riesz tulajdonsággal.

³¹ Hildebrandt 1912–13 (ℓ^p), Radon 1913 (1358. o.: L^p), Riesz 1913 (58–59. o.: ℓ^p), 1928–29 (egyszerű bizonyítás L^p -re).

- Kadec tétele szerint³² minden *szeparábilis* Banach-térnek van Radon–Riesz tulajdonságú ekvivalens normája.

21.5. Reflexivitás

A $C(K)$ terekkel szemben az L^p terek többségükben reflexívek:

21.12. Állítás. (Clarkson³³) *Tetszőleges (X, \mathcal{M}, μ) mértéktér és $1 < p < \infty$ esetén az $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ terek reflexívek.*

A 21.9 állítás fényében elegendő ehhez igazolni a következőt:

21.13. Állítás. (Milman–Pettis³⁴) *Minden egyenletesen konvex Banach-tér reflexív.*

***Megjegyzés.** Ez az eredmény megvilágítja a 14.25 állítás (c) részének és a 21.10 állításnak a kapcsolatát is a konvex, zárt halmazoktól való távolság felvételével kapcsolatban (75 és 273. o.).

Bizonyítás. Tekintsük a 14.21 állításbeli $J : X \rightarrow X''$ kanonikus izometriát (67. o.). Minthogy J homogén, elég megmutatni, hogy ha $\Phi \in X''$ és $\|\Phi\| = 1$, akkor alkalmas $x \in X$ -re $Jx = \Phi$.

Jelöljük X és X'' zárt egységgömbjét B -vel és B'' -vel. Goldstein tétele alapján (113. o.) van olyan B -beli (x_n) háló, hogy $J(x_n) \rightarrow \Phi$ a $\sigma(X'', X')$ topológiában. Ebből következik, hogy a „megduplázott” háló 2Φ -hez tart:

$$J(x_m + x_n) = J(x_m) + J(x_n) \rightarrow 2\Phi.$$

Következésképpen

$$\|x_m + x_n\| \rightarrow \|2\Phi\| = 2.$$

Az ellenkező esetben volna ugyanis olyan részháló, amely valamely $0 < \alpha < 2$ -re az $\alpha B''$ gömbhöz tartozna. A Banach–Alaoglu tétel miatt (113. o.) ez a gömb kompakt, és így zárt halmaz volna a szeparált $\sigma(X'', X')$ topológiában. Akkor azonban a Φ választásának ellentmondó $\|2\Phi\| \leq \alpha < 2$ egyenlőtlenséget kapnánk.

³² Kadec 1958, 1959. Lásd még [38].

³³ Clarkson 1936.

³⁴ Milman 1938, Pettis 1939. A jelen bizonyítást nézve lásd Lindenstrauss–Tzafriri 1979, 61. o.

Minthogy X egyenletesen konvex, a fentiek alapján (x_n) Cauchy-háló X -ben. Mivel X teljes, e háló konvergál valamely $x \in X$ ponthoz. Akkor $J(x_n) \rightarrow J(x)$ a $\sigma(X'', X')$ topológiában e topológia definíciója miatt. Azonban $J(x_n) \rightarrow \Phi$ is teljesül, úgyhogy e topológia szeparáltsága folytán $\Phi = J(x)$. \square

Az L^1 és L^∞ terek általában nem reflexívek:

***Példák.**

- Az előző fejezetben többféleképpen is igazoltuk, hogy $C([0, 1])$ nem reflexív. Minthogy $C([0, 1])$ az $L^\infty(0, 1)$ tér altere, a 15.22 állítás (116. o.) szerint $L^\infty(0, 1)$ sem lehet reflexív.
- Az $L^1(0, 1)$ tér nem reflexív, mert léteznek olyan $\varphi \in (L^1(0, 1))'$ lineáris funkcionálok, amelyek normája nem vétetik fel (lásd a 14.25 állítást, 75. o.). Legyen például

$$\varphi(f) := \int_0^1 t f(t) dt, \quad f \in L^1(0, 1).$$

A

$$|\varphi(f)| \leq \int_0^1 t |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1 \quad (21.10)$$

becslés mutatja, hogy $\|\varphi\| \leq 1$. Másrészt az

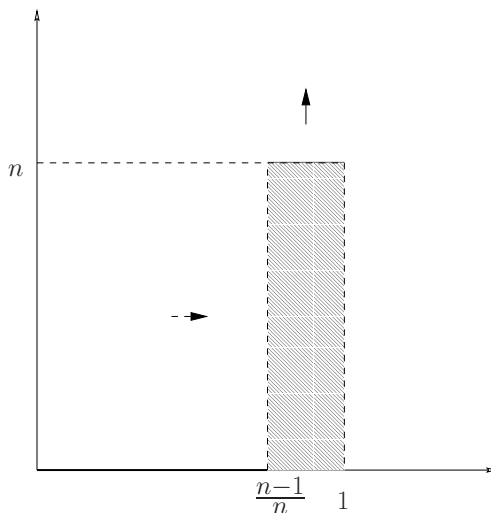
$$f_n := n\chi_{[1-n^{-1}, 1]}$$

függvények (lásd a 21.3 ábrát) egy normájúak, és $|\varphi(f_n)| \rightarrow 1$, tehát $\|\varphi\| = 1$. Azonban ez a norma nem vétetik fel, ugyanis a (21.10)-beli második egyenlőtlenség minden nem-nulla függvényre szigorú.

- $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ azért sem reflexív a legtöbb mértéktér esetén, mert tartalmaz gyengén konvergens részsorozat nélküli korlátos sorozatokat. (Lásd a 14.23 tételt, 70. o.). Ha ugyanis léteznek $0 < \mu(A_n) < \infty$ tulajdonságú diszjunkt halmazok, akkor az $f_n := \mu(A_n)^{-1} \chi_{A_n}$ függvények korlátos sorozatának nincs gyengén konvergens részsorozata. Tetszőleges (f_{n_k}) részsorozatra tekintsük ugyanis a

$$\varphi(f) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{A_{n_k}} f d\mu$$

képlettel definiált $\varphi \in (L^1(X))'$ lineáris funkcionált: $\varphi(f_{n_k}) = (-1)^k$ minden k -ra, tehát a $(\varphi(f_{n_k}))$ számsorozat nem konvergens.

21.3. ábra. $n\chi_{[1-n^{-1}, 1]}$ gráfja

A reflexivitás kérdésére még visszatérünk a következő szakaszban.

21.6. Az L^p terek duálisai

Ebben a szakaszban általánosítjuk az $(\ell^p)' = \ell^q$ relációkat (14.13 állítás, 57. o.). Ha $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugált kitevők, akkor a

$$(jg)(f) := \int_X fg \, d\mu$$

képlet folytonos lineáris funkcionált definiál L^p -n minden $g \in L^q$ -ra. Az integrál ugyanis értelmezve van a Hölder-egyenlőtlenség miatt, és

$$|(jg)(f)| \leq \|g\|_q \cdot \|f\|_p.$$

Következésképpen

$$jg \in (L^p)' \quad \text{és} \quad \|jg\| \leq \|g\|_q.$$

Innen az is adódik, hogy $j : L^q \rightarrow (L^p)'$ legfeljebb egy normájú, folytonos lineáris leképezés.

21.14. Tétel. Legyen (X, \mathcal{M}, μ) tetszőleges mértéktér, és $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugált kitevők.

(a) A $j : L^q \rightarrow (L^p)'$ leképezés lineáris izometria.³⁵

(b) (Riesz³⁶) Ha $1 < p < \infty$, akkor $j : L^q \rightarrow (L^p)'$ izometrikus izomorfizmus.

(c) (Steinhaus³⁷) Ha X mérhető, akkor $j : L^\infty \rightarrow (L^1)'$ izometrikus izomorfizmus.

Bizonyítás.

(a) Csak a $\|jg\| \geq \|g\|_q$ egyenlőtlenség igazolása van hátra³⁸; ehhez feltehetjük, hogy $\|g\|_q > 0$.

Az $1 < p < \infty$ esetben az

$$f := |g|^{q-1} \operatorname{sgn} g$$

függvényre

$$f \in L^p \quad \text{és} \quad \|f\|_p = \|g\|_q^{q-1} > 0$$

teljesül, mert

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu = \int |g|^{p(q-1)} d\mu = \int |g|^q d\mu = \|g\|_q^q = \|g\|_q^{p(q-1)}.$$

Következésképpen

$$(jg)(f) = \int |g|^q d\mu = \|g\|_q^q = \|g\|_q \cdot \|f\|_p,$$

ahonnan $\|jg\| \geq \|g\|_q$, hiszen $\|f\|_p > 0$.

Ha $p = \infty$, akkor bevezetve az $f := \operatorname{sgn} g \in L^\infty$ függvényt

$$\|g\|_1 = \int |g| d\mu = (jg)(f) \leq \|jg\| \cdot \|f\|_\infty = \|jg\|.$$

Ha végül $p = 1$, akkor tetszőlegesen rögzített $c < \|g\|_\infty$ számra az

$$A := \{x \in X : |g(x)| \geq c\}$$

³⁵ A $p = 1$ esetben lényeges, hogy a definíciónk értelmében L^∞ elemei mérhető, és nem csupán lokálisan mérhető függvények.

³⁶ Riesz 1910b $X = [0, 1]$ -re, Nikodým 1931, McShane 1950.

³⁷ Steinhaus 1919 $X = [0, 1]$ -re, Dunford 1938. Emlékeztetünk arra, hogy a mi terminológiánkban X mérhetősége ekvivalens X σ -végességével.

³⁸ Az $X = \mathbb{R}$ esetben szép direkt bizonyítást ismertet Riesz és Szőkefalvi-Nagy 1988.

halmaz pozitív mértékű. Alkalmazva a 19.5 lemmát (186. o.) létezik olyan $B \subset A$ halmaz, amelyre $0 < \mu(B) < \infty$. Akkor $f := \chi_B \operatorname{sgn} g \in L^1$, és

$$c\mu(B) \leq \int fg \, d\mu = (jg)(f) \leq \|jg\| \cdot \|f\|_1 = \|jg\| \cdot \mu(B).$$

Innen $c \leq \|jg\|$ minden $c < \|g\|_\infty$ -re, tehát $\|g\|_\infty \leq \|jg\| (< \infty)$.

(b) Igazolnunk kell, hogy j szuperjektív. Minthogy j izometria és L^q teljes, az $R(j)$ értékkészlet $(L^p)'$ zárt altere. A sűrűségének az igazolásához elég megmutatnunk a 14.9 következmény szerint (53. o.), hogy ha $\Phi \in (L^p)''$ ortogonális $R(j) \subset (L^p)'$ -re, akkor $\Phi = 0$. Minthogy L^p reflexív, $(L^p)''$ -t L^p -vel azonosítva igazolnunk kell, hogy ha $f \in L^p$ és $\int fg \, d\mu = 0$ minden $g \in L^q$ -re, akkor $f = 0$.

Bevezetve a

$$g := |f|^{p-1} \operatorname{sgn} f$$

függvényt, és megismételve az előző pontbeli számolást p és q szerepének a felcserélésével, azt kapjuk, hogy

$$g \in L^q \quad \text{és} \quad 0 = \int fg \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu.$$

Ebből következik, hogy $f = 0$ m.m.

* (c) Igazolnunk kell ismét, hogy j szuperjektív.³⁹ Tetszőlegesen adott $\varphi \in (L^1)'$ esetén legyen

$$\nu(A) := \varphi(\chi_A)$$

minden véges mértékű A halmazra. Ha $A = \cup^* A_n$, ahol az A_n halmazok is véges mértékűek, akkor $\sum \chi_{A_n} = \chi_A$ L^1 -ben a 17.9 következmény szerint (150. o.), és így $\varphi \in (L^1)'$ folytán ν előjeles mérték. Alkalmazva a pozitív és negatív részére a 17.18 állítást (162. o.) ν kiterjeszthető valamely σ -gyűrűn értelmezett előjeles mértékké. Ez a σ -gyűrű (valójában X mérhetősége miatt σ -algebra) a konstrukció alapján tartalmazza \mathcal{M} -et.

Vegyük észre, hogy $\nu \ll \mu$. Ha ugyanis $\mu(A) = 0$, akkor $\chi_A = 0$ m.m., és így

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0.$$

Minthogy a feltevésünk szerint X mérhető, alkalmazhatjuk a Radon–Nikodým tételt (201. o.): létezik olyan mérhető g függvény, hogy

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \tag{21.11}$$

³⁹ Az itt következő megfontolást $1 < p < \infty$ esetén is alkalmazhatjuk: lásd Dunford–Schwartz 1957.

minden véges mértékű A halmazra.

Mutassuk meg, hogy $g \in L^\infty$. Tetszőlegesen adott $c < \|g\|_\infty$ számra az

$$\{x \in X : g(x) \geq c\} \quad \text{és} \quad \{x \in X : -g(x) \geq c\}$$

halmazok közül legalább az egyik pozitív mértékű, és ekkor tartalmaz, akár csak az (a) részben, pozitív véges mértékű B halmazt. Ha például $g \geq c$ B -n (a másik eset analóg), akkor

$$c\mu(B) \leq \int_B g \, d\mu = \varphi(\chi_B) \leq \|\varphi\| \cdot \|\chi_B\|_1 = \|\varphi\| \cdot \mu(B).$$

Innen $c \leq \|\varphi\|$ minden $c < \|g\|_\infty$ -re, tehát $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\| (< \infty)$.

A (21.11) összefüggésből a linearitás miatt könnyen adódik, hogy

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu$$

minden f lépcsős függvényre. Minthogy a lépcsős függvények sűrűek L^1 -ben a 17.14 állítás szerint (155. o.), ez az egyenlőség φ folytonossága miatt minden $f \in L^1$ -re is érvényben marad. \square

*Megjegyzések.

- Ha X nem mérhető, akkor a $j : L^\infty \rightarrow (L^1)'$ izometria nem szuperjektív, mert a $\varphi(f) := \int f \, d\mu$ formula által definiált ν előjeles mérték nem mérhető tartóú.⁴⁰ J. Schwartz, majd Ellis és Snow⁴¹ jellemezték $(L^1)'$ -t az általános esetben is.
- Hildebrandt és Fichtenholz–Kantorovics jellemezték $(L^\infty)'$ -t.⁴²
- A $j : L^1 \rightarrow (L^\infty)'$ leképezés csak degenerált esetekben szuperjektív. Ezt már láttuk a $j : \ell^1 \rightarrow (\ell^\infty)'$ esetben (60. o.). A $j : L^1(0, 1) \rightarrow (L^\infty(0, 1))'$ esetben ez abból is következik, hogy $L^1(0, 1)$ semmilyen normált térnek nem lehet a duális tere. Ez a Banach–Alaoglu és a Krein–Milman tétel következménye, akárcsak a c_0 -ra vonatkozó analóg eredmény a 114. oldalon.
- Mutassuk meg közvetlenül is, hogy $j : L^1(0, 1) \rightarrow (L^\infty(0, 1))'$ nem szuperjektív. A

$$\delta(g) := g(0), \quad g \in C([0, 1])$$

⁴⁰ Ez Botts példájának változata, lásd J. Schwartz 1951.

⁴¹ J. Schwartz 1951, Ellis–Snow 1963.

⁴² Hildebrandt 1934 (875. o.), Fichtenholz–Kantorovitch 1934 (76. o.). Lásd még Dunford–Schwartz 1957, Kantorovitch–Akilov 1982.

Dirac-féle funkcionál egy normájú folytonos lineáris funkcionál $C([0, 1])$ -en. A Helly–Hahn–Banach tétel (54. o.) alkalmazásával terjesszük ki $L^\infty(0, 1)$ -en értelmezett folytonos lineáris funkcionállá.⁴³ Megmutatjuk, hogy egyetlen $f \in L^1(0, 1)$ függvény sem teljesíti az

$$\int_0^1 fg \, dt = g(0)$$

egyenlőséget minden $g \in C([0, 1])$ -re.⁴⁴

Tegyük fel indirekt, hogy létezik ilyen f függvény. Vegyünk fel egy olyan $C([0, 1])$ -beli (g_n) függvénysorozatot, hogy $g_n(0) = 0$ minden n -re, alkalmas $h \in L^\infty$ függvénnyel $|g_n| \leq h$ m.m. minden n -re, és $g_n \rightarrow \text{sign } f$ m.m. Ehhez először válasszunk a 21.3 lemma alapján (258. o.) hasonló tulajdonságú lépcsős függvénysorozatot, majd helyettesítsük az ezek definíciójában fellépő intervallumok karakterisztikus függvényeit a 21.1 ábra (261. o.) szerint konstruált folytonos függvényekkel. Mivel feltevésünk szerint

$$\int_0^1 fg_n \, dt = g_n(0) = 0,$$

a Lebesgue-féle konvergenciatétel alapján $\int_0^1 |f| \, dt = 0$ adódik, vagyis $f = 0$ m.m. Ez azonban lehetetlen, mert a fenti formulában $g = 1$ -et választva $\int f \, dt = 1$ adódik.

- Az előző megjegyzésben olyan $(L^\infty(0, 1))'$ -beli elemet találtunk, amelyet semmilyen $L^1(0, 1)$ -beli függvény sem reprezentál. Mint-hogy $(L^\infty(0, 1))' = (L^1(0, 1))''$, ez közvetlenül bizonyítja $L^1(0, 1)$ nem-reflexivitását is.
- Minthogy $(L^1(0, 1))' = L^\infty(0, 1)$, a 15.22 állítás miatt (116. o.) $L^\infty(0, 1)$ sem reflexív.

21.7. Gyenge és gyenge csillag konvergencia

Ebben a szakaszban jellemezzük az L^p terek gyenge, illetve gyenge csillag konvergenciáját. Az ilyen konvergens sorozatok a 14.17 és 15.18

⁴³ Helly 1912 éppen erre az esetre igazolta a kiterjesztési tételt.

⁴⁴ A *disztribúcióelmélet* fontos tételéről van szó, miszerint a Dirac-féle funkcionál nem reguláris disztribúció. Lásd L. Schwartz 1966.

állítások (62. és 112. o.) alapján mindig korlátosak, így elegendő a továbbiakban csak korlátos sorozatokkal foglalkoznunk.

Jelöljük q -val a p kitevő konjugáltját, és jelöljük $\sigma(L^p, L^q)$ -val azt a lokálisan konvex topológiát L^p -n, amelyet a

$$p_g(f) := \left| \int f g \, d\mu \right|, \quad g \in L^q$$

félnormacsaldal definiál. Ha $1 < p < \infty$, akkor ez L^p gyenge topológiája. Ha X mérhető, akkor $p = \infty$ esetén ez L^∞ gyenge csillag topológiája, $p = 1$ esetén pedig L^1 gyenge topológiája.

21.15. Állítás. Legyen (f_n) korlátos sorozat L^p -ben, és $f \in L^p$.

(a) (Riesz⁴⁵) Legyen $1 < p \leq \infty$; f_n pontosan akkor konvergál f -hez a $\sigma(L^p, L^q)$ topológiában, ha

$$\int_A f_n \, d\mu \rightarrow \int_A f \, d\mu \quad (21.12)$$

minden véges mértékű A halmazra.

(b) Legyen $p = 1$; f_n pontosan akkor konvergál f -hez a $\sigma(L^1, L^\infty)$ topológiában, ha (21.12) minden mérhető A halmazra teljesül.

*Megjegyzések.

- Ha $1 < p \leq \infty$, akkor felhasználva a 21.3 lemmát (258. o.) az alábbi bizonyítás mutatni fogja, hogy elég az integrál definíciója alapjául szolgáló félgűrűbeli A halmazokat tekinteni. Következésképpen valamely \mathbb{R} -beli I intervallumra vonatkozó szokásos Lebesgue-mérték esetén (21.12) ekvivalens a pontonkénti $F_n \rightarrow F$ konvergenciával, ahol F_n és F olyan primitív függvényei f_n -nek és f -nek, amelyek mind megegyeznek valamely rögzített $a \in I$ pontban.
- Legyen (I_n) az $I = [a, b]$ intervallum részintervallumainak olyan diszjunkt sorozata, hogy $|I_n| > 0$ és $I_n \subset (a, a + 2^{-n})$ minden n -re. Az

$$f_n := |I_{2n-1}|^{-1} \chi_{I_{2n-1}} - |I_{2n}|^{-1} \chi_{I_{2n}}$$

képlet olyan korlátos sorozatot értelméz $L^1(I)$ -ben, amely $f := 0$ -ra eleget tesz az előző megjegyzésbeli $F_n \rightarrow F$ relációnak. De f_n nem konvergál f -hez a $\sigma(L^1, L^\infty)$ topológiában, mert (21.12) nem teljesül az $A := \cup I_{2n}$ halmazra.

⁴⁵ Riesz 1910b (véges p -re).

- Az \mathbb{R} -beli $f_n := \chi_{[n, n+1]}$ függvények mutatják, hogy $p = 1$ esetén nem elég véges mértékű halmazokat tekinteni (21.12)-ben.

A 21.15 állítás bizonyítása. A direkt implikációk abból adódnak, hogy a

$$\varphi(g) := \int_A g \, d\mu$$

képlet folytonos lineáris funkcionált definiál L^p -n $1 < p \leq \infty$ esetén minden véges mértékű A halmazra, $p = 1$ esetén pedig minden mérhető A halmazra. Mindez egyszerűen leolvasható a Hölder-egyenlőtlenségből következő

$$|\varphi(g)| \leq \|\chi_A\|_q \cdot \|g\|_p, \quad g \in L^p$$

becslésből.

A fordított implikációhoz jegyezzük meg, hogy a vizsgált A halmazok karakterisztikus függvényei minden esetben generálják L^q -t a 21.1 állítás (d) része alapján (255. o.). Minthogy $L^q \subset (L^p)'$, a kívánt konklúzió a 14.18 lemma alkalmazásával adódik (63. o.). \square

Fejezzük be ezt a szakaszt a gyenge konvergencia egyik alappéldájával. Tetszőlegesen adott, végtelenhez tartó (λ_n) számsorozat esetén tekintsük az

$$f_n(t) := \sin \lambda_n t \quad \text{és} \quad g_n(t) := \cos \lambda_n t$$

függvényeket.

21.16. *Állítás. (Riemann–Lebesgue⁴⁶) Tetszőleges $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugált kitevőkre az (f_n) és (g_n) sorozatok bármely korlátos I intervallumon nullához konvergálnak a $\sigma(L^p, L^q)$ topológiában.

Bizonyítás. Minthogy $L^q \subset L^1$, elég a $p = \infty$ és $q = 1$ esetet vizsgálnunk. Az (f_n) és (g_n) sorozatok korlátosak L^∞ -ben, egy adott $a \in I$ pontban eltűnő primitív függvényeik pedig pontonként nullához tartanak, hiszen

$$\left| \int_a^x \sin \lambda_n t \, dt \right| = \left| \frac{\cos \lambda_n a - \cos \lambda_n x}{\lambda_n} \right| \leq \frac{2}{\lambda_n} \rightarrow 0,$$

és hasonló becslés teljesül $\cos \lambda_n t$ -re is. Befejezésül alkalmazzuk az előző oldal első megjegyzését. \square

⁴⁶ Riemann 1854, Lebesgue 1903 (473. o.) és 1906 (61. o.). Lásd Poincaré 1902 érdekes alkalmazását is a kisbolygók eloszlására. (Erre az alkalmazásra Joó István hívta fel a figyelmemet.)

***Megjegyzés.** Az $|I| = 2\pi$, $p = 2$ és $\lambda_n = n$ esetben a fenti eredmény következik a trigonometrikus rendszerre vonatkozó Bessel-egyenlőtlenségből is ⁴⁷, hiszen eszerint minden $f \in L^2(I)$ függvény Fourier-együtthatói nullához tartanak.

***Példa.** Mutassuk meg, hogy $L^1(-\pi, \pi)$ nem rendelkezik a Radon–Riesz tulajdonsággal. (Lásd a 21.11 állítást, 275. o.) A lemma alapján ugyanis a $h_n(t) := 1 + \sin nt$ függvények gyengén konvergálnak $h(t) := 1$ -hez $L^1(-\pi, \pi)$ -ben. Továbbá

$$\|h_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \sin nt \, dt = 2\pi = \|h\|_1$$

minden n -re. Azonban h_n nem konvergál erősen h -hoz, mert

$$\|h_n - h\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nt| \, dt = 4$$

minden n -re.

⁴⁷ Halphén 1882.

22. fejezet

Majdnem mindenütt való konvergencia

Valaki, aki Euklidésznel kezdte a geometria tanulmányozását, az első állítás megismerése után megkérdezte tőle: „De mi hasznom lesz abból, ha mindezt megtanulom?” Euklidész odahívta a szolgáját, és azt mondta neki: „Adj neki néhány garast, mert hasznot akar húzni abból, amit megtanul.”

Stobaeus

A geometriához nem vezet királyi út.

Ménekhmosz Nagy Sándornak¹

Az integrálelméletben fontos szerep jutott a m.m. való konvergenciának. Könyvünk záró fejezetében ezt a fogalmat vesszük nagyító alá: megvilágítjuk a strukturális tulajdonságait, és összehasonlítjuk az integrálelméletben előforduló más fontos konvergenciafogalmakkal.

Szokás szerint legyen (X, \mathcal{M}, μ) adott mértéktér, és azonosítsunk két függvényt, ha m.m. egyenlőek egymással.

22.1. Az L^p terek, $1 \leq p \leq \infty$

Világítsuk meg először az erős és a m.m. való konvergencia kapcsolatát. Általánosíthatjuk Fatou és Lebesgue tételeit:

22.1. Állítás. *Legyen (f_n) korlátos sorozat L^p -ben, $1 \leq p < \infty$, és tegyük fel, hogy $f_n \rightarrow f$ m.m.*

(a) *$f \in L^p$, és $\|f\|_p \leq \liminf \|f_n\|_p$.*

(b) *Ha létezik olyan $g \in L^p$, hogy $|f_n| \leq g$ m.m., akkor $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.*

¹ Más források szerint Euklidész Ptolemaiosz királynak.

(c) Ha $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, akkor $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.²

Bizonyítás.

(a) Alkalmazzuk a Fatou-lemmát (153. o.) az $|f_n|^p$ függvények sorozatára.

(b) Alkalmazzuk Lebesgue konvergenciatételét (151. o.) az $|f_n - f|^p$ függvények sorozatára. Vegyük ehhez észre, hogy

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p g^p,$$

és hogy $2^p g^p$ a feltevésünk szerint integrálható.

(c) Novinger nyomán³ alkalmazzuk a Fatou-lemmát a m.m. $|f|^p$ -hez konvergáló

$$\frac{|f_n|^p + |f|^p}{2} - \left| \frac{f_n - f}{2} \right|^p$$

függvénysorozatra. (A függvények nem-negatívak a $t \mapsto |t|^p$ függvény konvexitása miatt.) A kapott

$$\begin{aligned} \int |f|^p d\mu &\leq \liminf \int \frac{|f_n|^p + |f|^p}{2} - \left| \frac{f_n - f}{2} \right|^p d\mu \\ &= \int |f|^p d\mu - \limsup \int \left| \frac{f_n - f}{2} \right|^p d\mu \end{aligned}$$

egyenlőtlenségből $\limsup \|f_n - f\|_p^p \leq 0$, és így $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ következik. \square

***Megjegyzések.**

- Az (a) rész egyszerű bizonyítással érvényben marad $p = \infty$ -re is.
- Az $[n^{-1}, 1]$ intervallumok karakterisztikus függvényei mutatják, hogy (b) és (c) nem érvényesek $L^\infty(0, 1)$ -ben.

Most tanulmányozzuk a gyenge és a m.m. való konvergencia kapcsolatát. Szokás szerint q -val jelöljük valamely p kitevő konjugáltját.

22.2. Állítás. Legyen (f_n) korlátos sorozat L^p -ben, $1 < p \leq \infty$. Ha $f_n \rightarrow f$ m.m., akkor f_n konvergál f -hez a $\sigma(L^p, L^q)$ topológiában is.

Megjegyzés. A $p = 1$ eset különleges: ha $f_n \rightarrow f$ m.m., akkor a gyenge konvergencia ekvivalens az erőssel: lásd a Vitali–Hahn–Saks tételt, 300. o.

² Radon 1913 (1358. o.), Riesz 1928–29.

³ Novinger 1972.

Bizonyítás. Az előző állítás (a) része miatt $f \in L^p$. Következésképpen $f_n - f_n - f$ -re cserélve feltehető, hogy $f = 0$.

Vezessük be⁴ minden N természetes számra az

$$E_N := \{x \in X : |f_n(x)| \leq 1 \text{ minden } n \geq N\text{-re}\}$$

és

$$G_N := \{g \in L^q : g = 0 \text{ m.m. } E_N\text{-en kívül}\}$$

halmazokat. Mivel $f_n \rightarrow f$ m.m., majdnem minden $x \in X$ hozzátartozik $\cup E_N$ -hez. Mivel az (E_N) halmazzsorozat monoton növekvő, $\cup G_N$ sűrű L^q -ban: minden $g \in L^q$ határértéke a $\chi_{E_N} g \in G_N$ függvények sorozatának az előző állítás (b) része miatt.

Tegyük fel először, hogy $\mu(X) < \infty$. Minthogy $L^q \subset (L^p)'$ és (f_n) korlátos, a 14.18 lemma (63. o.) miatt elég megmutatnunk, hogy

$$\int f_n g \, d\mu \rightarrow 0 \text{ minden } g \in \cup G_N\text{-re.}$$

Az utóbbi reláció könnyen igazolható a Lebesgue-féle konvergenciátétel alkalmazásával. Ha ugyanis $g \in G_N$, akkor

$$|f_n g| \leq |g| \text{ m.m.}$$

minden $n \geq N$ -re, és $g \in L^q \subset L^1$, mert $\mu(X) < \infty$.

Az általános esetben cseréljük ki a bizonyításban G_N -t $G_N \cap L^1$ -gyel. Annak a megmutatására, hogy $G_N \cap L^1$ sűrű G_N -ben az L^q -beli topológiára nézve, közelítsünk minden $g \in G_N$ függvényt alkalmas (φ_n) lépcsős függvénsorozattal (21.3 lemma, 258. o.), majd cseréljük ki φ_n -t $\varphi_n \chi_{E_N}$ -re. \square

***Példák.** Tekintsük $X = [0, 1]$ -en a szokásos Lebesgue-mértéket.

- Az

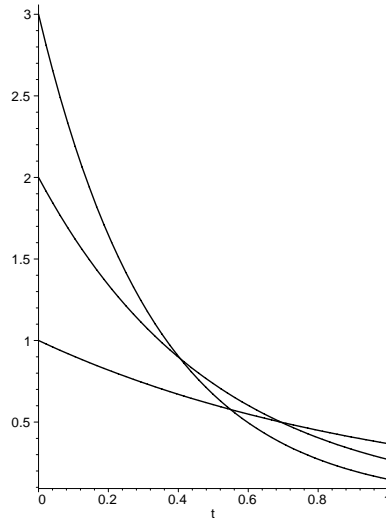
$$f_n(t) := ne^{-nt}$$

függvények olyan korlátos sorozatot alkotnak L^1 -ben, amely m.m. $f = 0$ -hoz tart. (Lásd a 22.1 ábrát.) De (f_n) nem konvergál gyengén f -hez L^1 -ben, mert

$$\int f_n(t) \, dt \rightarrow 1 \neq 0 = \int f(t) \, dt.$$

Így az állítás nem teljesül $p = 1$ -re.

⁴ Lásd Lions 1969.

22.1. ábra. ne^{-nt} gráfja $n = 1, 2, 3$ -ra

- Tetszőlegesen rögzített $1 < p < \infty$ -re az

$$f_n(t) := n^{1/p} e^{-nt}$$

függvények m.m. $f = 0$ -hoz tartanak. Továbbá

$$\|f_n\|_p^p = \frac{1 - e^{-np}}{p} \rightarrow \frac{1}{p},$$

úgyhogy az (f_n) sorozat korlátos L^p -ben, és $f_n \not\rightarrow 0$ L^p -ben. Tehát f_n nem tart erősen f -hez általában.

- A $p = \infty$ esetben az $f_n(t) := e^{-nt}$ függvények hasonló tulajdonságúak: $f_n \rightarrow 0$ m.m., és $\|f_n\|_\infty = 1$ minden n -re.

22.2. Az L^p terek, $0 < p \leq 1$

Az L^p halmazok definíciója minden $0 < p < \infty$ -re értelmes: a mérhető f függvény akkor tartozik L^p -be, ha

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

Azonban a szokásos

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

képlet $0 < p < 1$ esetén (degenerált esetektől eltekintve) nem definiál normát: a háromszög-egyenlőtlenség és a többi szokásos egyenlőtlenség megfordul ⁵:

22.3. Állítás. *Legyenek $0 < p < 1$ és $q = p/(p-1) < 0$ konjugált kitevők.*⁶

(a) (Fordított Young-egyenlőtlenség) *Ha x, y nem-negatív számok, akkor*⁷

$$xy \geq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

(b) (Fordított Hölder-egyenlőtlenség) *Ha f és g mérhető függvények, akkor*

$$\|fg\|_1 \geq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(c) (Fordított Minkowski-egyenlőtlenség) *Ha f és g mérhető, m.m. nem-negatív függvények, akkor*

$$\|f + g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás.

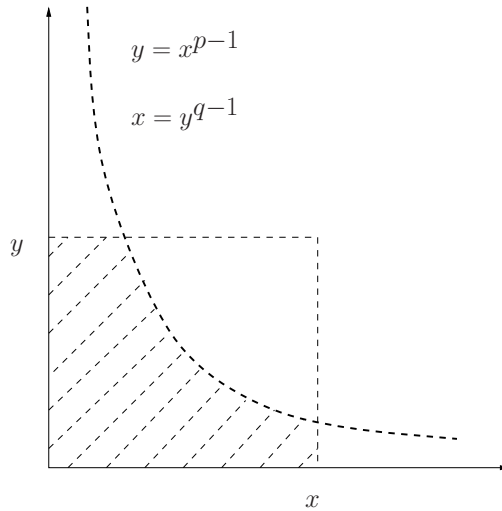
(a) Feltehető, hogy $x, y > 0$. Tekintsük az $y = x^{p-1}$ vagy $x = y^{q-1}$ egyenletű függvény gráfját. A 22.2 ábrán a satírozott tartomány egy x, y oldalú téglalaphoz tartozik, tehát a területe legfeljebb xy . Továbbá e tartomány két olyan nem-korlátos tartomány különbsége, amelyeket a koordinátatengelyek, a téglalap oldalai és a függvényünk gráfja határolnak. Következésképpen

$$xy \geq \int_0^x s^{p-1} ds - \int_y^\infty t^{q-1} dt = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

⁵ Vesd össze a 3.2, 3.3 és 21.1 állításokkal, első kötet, 65. és 67. o., valamint a jelen kötet, 255. o.

⁶ Továbbra is fennáll a megszokott $p^{-1} + q^{-1} = 1$ egyenlőség. Lásd Hardy–Littlewood–Pólya 1952, Szoboljev [Sobolev] 1991.

⁷ Ha $y = 0$, akkor az utolsó törtet a határértékével: $-\infty$ -nel helyettesítjük.



22.2. ábra. Fordított Young-egyenlőtlenség

(b) Az $\|f\|_p = 0$ és $\|g\|_q = 0$ esetek nyilvánvalóak lévén alkalmas konstansokkal megszorozva feltehetjük ezentúl, hogy $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Alkalmazzuk a fordított Young-egyenlőtlenséget:

$$\|fg\|_1 = \int |f| \cdot |g| \, d\mu \geq \int \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(c) Homogenitási megfontolásból feltehetjük, hogy $\|f + g\|_p = 1$. Alkalmazzuk a fordított Hölder-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &= \|f + g\|_p^p \\ &= \int (f + g)^p \, d\mu \\ &= \int f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1} \, d\mu \\ &\geq \|f\|_p \cdot \|(f + g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f + g)^{p-1}\|_q \\ &= \|f\|_p \cdot \|f + g\|_{q(p-1)}^{p-1} + \|g\|_p \cdot \|f + g\|_{q(p-1)}^{p-1} \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p, \end{aligned}$$

mert $(p-1)q = p$.

□

A fentiek ellenére bevezethető egy természetes *metrika* az L^p terekben $0 < p < 1$ esetén. Ehhez általánosítsuk először a norma fogalmát:

Definíció. Az X vektortéren adott $N : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *pszeudonorma*, ha minden $x, y \in X$ -re teljesülnek a következő feltételek:

- $N(x) \geq 0$;
- $N(x) = 0 \iff x = 0$;
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$;
- $N(cx) \leq N(x)$ minden $-1 \leq c \leq 1$ -re;
- $N(n^{-1}x) \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$.

Világos, hogy minden norma pszeudonorma is.

22.4. Állítás. Ha N pszeudonorma X -en, akkor a

$$d(x, y) := N(x - y)$$

képlet metrikát definiál X -en, és a megfelelő topológiára nézve X szeparált topologikus vektortér.

Bizonyítás. Csak a szorzás folytonossága nem nyilvánvaló. Tetszőlegesen adott $x_0 \in X$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ esetén rögzítsünk olyan $n \geq 1 + |\lambda_0|$ egészt, amelyre $N(n^{-1}x_0) < \varepsilon$. Ha

$$|\lambda - \lambda_0| < 1/n \quad \text{és} \quad N(x - x_0) < \varepsilon/n,$$

akkor $|\lambda| < n$, és így

$$\begin{aligned} N(\lambda x - \lambda_0 x_0) &\leq N(\lambda(x - x_0)) + N((\lambda - \lambda_0)x_0) \\ &\leq N(n(x - x_0)) + N(n^{-1}x_0) \\ &< nN(x - x_0) + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lássuk el az L^p tereket természetes pszeudonormával:

22.5. Állítás. Legyen $0 < p \leq 1$.

(a) L^p vektortér.

(b) Az

$$N_p(f) := \|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu$$

képlet pszeudonormát definiál L^p -n. Lássuk el L^p -t a hozzátartozó metrikával.

- (c) Minden L^p -beli (f_n) Cauchy-sorozat tartalmaz olyan (f_{n_k}) részsorozatot, hogy alkalmas $f \in L^p$ -re $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m.
- (d) L^p teljes metrikus tér.

Megjegyzés. A $p = 1$ esetben az N_1 pszeudonorma egybeesik a szokásos $\|\cdot\|_1$ normával.

Bizonyítás.

(a) Ha $f \in L^p$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $N_p(cf) = |c|^p N_p(f) < \infty$, tehát $cf \in L^p$. Meg kell még mutatnunk, hogy ha $f, g \in L^p$, akkor $f + g \in L^p$. Ez a 15.23 lemma (117. o.) elemi egyenlőtlenségének a felhasználásával adódik:

$$N_p(f + g) = \int |f + g|^p d\mu \leq \int |f|^p + |g|^p d\mu = N_p(f) + N_p(g) < \infty.$$

(b) A pszeudonormák első két tulajdonsága triviálisan teljesül, az utolsó kettő pedig az $N_p(cf) = |c|^p N_p(f)$ egyenlőtlenségből következik. Végül a háromszög-egyenlőtlenséget épp az imént igazoltuk.

(c) Válasszunk olyan (f_{n_k}) részsorozatot, hogy

$$\int |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \leq 2^{-k} \quad \text{minden } n \geq n_k\text{-ra, } k = 1, 2, \dots$$

Akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty,$$

úgyhogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p < \infty$$

m.m. a Beppo Levi tétel 17.9 következménye miatt (150. o.). Ekkor viszont

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \infty$$

is teljesül m.m., mert $0 < p \leq 1$ folytán

$$|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p$$

minden olyan nagy k -ra, amelyre már $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p \leq 1$.

Következésképpen az

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

függvénysor alkalmas f függvényhez konvergál m.m., vagyis $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m.

Míthogy $|f_{n_k}|^p \rightarrow |f|^p$ m.m., a Fatou-lemma alkalmazásával (153. o.) az $f \in L^p$ reláció is adódik.

(d) Megismételhetjük a 21.1 állítás (c) részének (256. o.) a bizonyítását, csak a 21.2 lemma (256. o.) helyett az előző (c) tulajdonságot használjuk. \square

A 22.1 állítás (286. o.) érvényben marad:

22.6. Állítás. Legyen (f_n) olyan L^p -beli korlátos sorozat valamely $0 < p \leq 1$ -re, amely m.m. konvergál valamely f függvényhez. Akkor

- (a) $f \in L^p$ és $N_p(f) \leq \liminf N_p(f_n)$;
- (b) ha létezik olyan $g \in L^p$, hogy $|f_n| \leq g$ m.m., akkor $N_p(f_n - f) \rightarrow 0$;
- (c) ha $N_p(f_n) \rightarrow N_p(f)$, akkor $N_p(f_n - f) \rightarrow 0$.

Bizonyítás.

(a) és (b) Megismételhető a 22.1 állítás bizonyítása.

(c) Az

$$|f_n|^p + |f|^p - |f_n - f|^p$$

függvények m.m. nem-negatívak a 15.23 lemma miatt (117. o.), és m.m. $2|f|^p$ -hez tartanak. Alkalmazva a Fatou-lemmát a következő becslést kapjuk:

$$\begin{aligned} \int 2|f|^p d\mu &\leq \liminf \int |f_n|^p + |f|^p - |f_n - f|^p d\mu \\ &= \int 2|f|^p d\mu - \limsup \int |f_n - f|^p d\mu. \end{aligned}$$

Innen $\limsup N_p(f_n - f) \leq 0$, tehát $N_p(f_n - f) \rightarrow 0$. \square

A $0 < p < 1$ esetben az L^p terek általában nem normálhatók, sőt nem is lokálisan konvexek; ez lényegesen csökkenti a hasznosságukat.⁸ Mutassunk egy példát:

Példa. Ha $0 < p < 1$, akkor az $L^p([0, 1])$ terek nem lokálisan konvexek (és így nem is normálhatók), mert L^p -n és az üres halmazon nem tartalmaznak más konvex nyílt halmazt. A topológia eltolásinvarianciája miatt elég

⁸ Kivéve, ha ellenpéldák konstruálásáról van szó. Roberts 1976, 1977 az $L^p([0, 1])$ terekben $0 < p < 1$ esetén olyan nem-üres, kompakt, konvex halmazokat konstruált, amelyeknek nincs extrémális pontjuk. Így a Krein–Milman tétel (103. o.) sem érvényes e terekben. Lásd még: Kalton 1980, Kalton és Peck 1980, Narici–Beckenstein 1985.

ehhez megmutatnunk, hogy ha K a 0-t tartalmazó konvex nyílt halmaz, akkor $K = L^p$.

Rögzítsünk olyan $r > 0$ -t, hogy $B_r(0) \subset K$. Legyen $x \in L^p$. Minden n természetes számhoz léteznek olyan $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ pontok, hogy

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |x(t)|^p dt = n^{-1} \int_0^1 |x(t)|^p dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Legyen

$$x_i := n\chi_{[t_{i-1}, t_i]}x, \quad i = 1, \dots, n,$$

akkor

$$N_p(x_i) = n^{p-1} \int_0^1 |x(t)|^p dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Következésképpen elég nagy n esetén x_1, \dots, x_n a K -beli $B_r(0)$ gömbhöz tartoznak, és így K konvexitása miatt

$$x = (x_1 + \dots + x_n)/n \in K.$$

A fenti eredményből következik a meglepő tény, hogy e terekben két pontot *sosem* választhatunk szét zárt affin hipersíkkal, hiszen $(L^p)' = \{0\}$.⁹

22.3. Az L^0 terek

A most bevezetésre kerülő terek igen relevánsnak bizonyulnak majd a m.m. való konvergencia vizsgálata során. Jelöljük L^0 -val azon mérhető, m.m. véges értékű függvények halmazát, amelyekre

$$N_0(f) := \int \frac{|f|}{1 + |f|} d\mu < \infty.$$

22.7. Állítás.

- (a) L^0 vektortér.
- (b) N_0 pszeudonorma L^0 -on. Lássuk el L^0 -t a hozzátartozó metrikával.
- (c) (Riesz¹⁰) Minden L^0 -beli Cauchy-sorozat tartalmaz olyan részsorozatot, amely m.m. tart valamely L^0 -beli függvényhez.
- (d) L^0 teljes metrikus tér.

⁹ Day 1940.

¹⁰ Riesz 1909.

Bizonyítás.

(a) Ha $f \in L^0$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $cf \in L^0$. Ugyanis $|c| \leq 1$ esetén

$$N_0(cf) = \int \frac{|cf|}{1+|cf|} d\mu \leq \int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu = N_0(f) < \infty,$$

mert a $t \mapsto t/(1+t)$ függvény monoton növekvő $[0, \infty)$ -ben, $|c| \geq 1$ esetén pedig

$$N_0(cf) = \int \frac{|cf|}{1+|cf|} d\mu \leq \int \frac{|cf|}{1+|f|} d\mu = |c|N_0(f) < \infty.$$

Ha $f, g \in L^0$, akkor $f+g \in L^0$, mert

$$\begin{aligned} N_0(f+g) &= \int \frac{|f+g|}{1+|f+g|} d\mu \\ &\leq \int \frac{|f|+|g|}{1+|f|+|g|} d\mu \\ &\leq \int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu + \int \frac{|g|}{1+|g|} d\mu \\ &= N_0(f) + N_0(g) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(b) Világos, hogy $N_0(0) = 0$, és hogy $N_0(f) > 0$, ha f nem-nulla m.m.

Az

$$N_0(f+g) \leq N_0(f) + N_0(g)$$

és

$$N_0(cf) \leq N_0(f) \quad \text{és} \quad -1 \leq c \leq 1$$

tulajdonságokat (a)-ban igazoltuk. Végül ¹¹ $f \in L^0$ és $n \rightarrow \infty$ esetén

$$\int \frac{|n^{-1}f|}{1+|n^{-1}f|} d\mu \rightarrow 0$$

a Lebesgue-féle konvergenciatétel (151. o.) miatt, tehát $N_0(n^{-1}f) \rightarrow 0$.

(c) Ha (f_n) Cauchy-sorozat L^0 -ban, akkor rekurzióval olyan (f_{n_k}) rész-sorozatot konstruálhatunk, hogy

$$N_0(f_{n_k} - f_m) < 2^{-k} \quad \text{minden} \quad m \geq n_k\text{-ra.}$$

Akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|}{1+|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|} d\mu < \infty,$$

¹¹ Itt lényeges, hogy feltevésünk szerint f m.m. véges értékű.

ahonnan Beppo Levi tétele miatt (148. o.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|}{1 + |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|} < \infty$$

m.m.

Minthogy

$$\frac{|x|}{1 + |x|} \leq \frac{1}{2} \implies |x| \leq 1 \implies |x| \leq 2 \frac{|x|}{1 + |x|},$$

innen következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| < \infty$$

m.m. Így a

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

sor m.m. tart valamely f függvényhez, vagyis $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m. Akkor

$$\frac{|f_{n_k}|}{1 + |f_{n_k}|} \rightarrow \frac{|f|}{1 + |f|}$$

is teljesül m.m., és innen a Fatou-lemma alapján $f \in L^0$.

(d) Rögzítsünk (c) alapján olyan (f_{n_k}) ésszsorozatot, hogy alkalmas $f \in L^0$ -ra $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m. Ezután tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz rögzítsünk olyan nagy M egészt, hogy

$$\int \frac{|f_m - f_n|}{1 + |f_m - f_n|} d\mu = N_0(f_m - f_n) < \varepsilon$$

minden $m, n \geq M$ -re. Az $n = n_k$ választással élve, $k \rightarrow \infty$ mellett a Fatou-lemmát alkalmazva az

$$N_0(f_m - f) = \int \frac{|f_m - f|}{1 + |f_m - f|} d\mu \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kapjuk minden $m \geq M$ -re. □

A 22.1 és 22.6 állítások (286. és 294. o.) érvényességét is kiterjeszthetjük:

22.8. Állítás. Legyen (f_n) korlátos sorozat L^0 -ban, f m.m. véges értékű, mérhető függvény, és tegyük fel, hogy $f_n \rightarrow f$ m.m. Akkor

(a) $f \in L^0$ és $N_0(f) \leq \liminf N_0(f_n)$;

(b) ha létezik olyan $g \in L^0$, hogy $|f_n| \leq g$ m.m., akkor $N_0(f_n - f) \rightarrow 0$;

(c) ha $N_0(f_n) \rightarrow N_0(f)$, akkor $N_0(f_n - f) \rightarrow 0$.

Bizonyítás.

(a) és (b) Megismételhető a 22.1 állítás bizonyítása.

(c) Az

$$\frac{|f_n|}{1 + |f_n|} + \frac{|f|}{1 + |f|} - \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}$$

függvények m.m. nem-negatívak, és $2|f|/(1 + |f|)$ -hez tartanak. Alkalmazva a Fatou-lemmát

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{|f|}{1 + |f|} d\mu &\leq \liminf \int \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} + \frac{|f|}{1 + |f|} - \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \\ &= 2 \int \frac{|f|}{1 + |f|} d\mu - \limsup \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \end{aligned}$$

adódik. Innen $\limsup N_0(f_n - f) \leq 0$, tehát $N_0(f_n - f) \rightarrow 0$. \square

Akárcsak az L^p terek $0 < p < 1$ -re, az L^0 terek sem lokálisan konvexek általában:

Példa. Az $L^0([0, 1])$ tér nem tartalmaz más konvex nyílt halmazt, mint \emptyset -t és L^0 -t. Következésképpen $(L^0)' = \{0\}$, és két különböző pontot sosem választhatunk szét zárt affin hipersíkkal.¹²

Ismét elég megmutatni, hogy ha a K konvex nyílt halmaz tartalmazza a 0 pontot, akkor $K = L^0$. Rögzítsünk olyan $r > 0$ számot, hogy $B_r(0) \subset K$. Tetszőlegesen adott $x \in L^0$ esetén tekintsük minden n természetes számra a következő függvényeket:

$$x_i(t) := \begin{cases} nx(t) & \text{ha } (i-1)/n \leq t \leq i/n, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Akkor

$$N_0(x_i) = \int_{(i-1)/n}^{i/n} \frac{|nx(t)|}{1 + |nx(t)|} dt \leq \frac{1}{n}$$

minden i -re, úgyhogy $n > 1/r$ esetén x_1, \dots, x_n hozzátartoznak a $B_r(0)$ gömbhöz. Minthogy $B_r(0) \subset K$ és K konvex, innen

$$x = (x_1 + \dots + x_n)/n \in K$$

adódik.

¹² Nikodým 1931.

22.4. Mértékben való konvergencia

Olyan sokat használtuk a m.m. való konvergenciát, hogy felvetődik a kérdés: miért nem vezettünk be olyan normát, metrikát, vagy topológiát, amely ezt a konvergenciát szolgáltatja. Könyvünk e záró szakaszában választ adunk erre a kérdésre.

Ákárcsak az előző szakaszban, itt is csak mérhető, *m.m. véges értékű* függvényeket tekintünk. Ha az X alaptér *véges mértékű*, akkor egyszerűen jellemezhető az L^0 -beli konvergencia. A következő fogalom gyakran előfordul a valószínűségszámításban:

Definíció. Az (f_n) függvénysorozat *mértékben*¹³ vagy *sztochasztikusan* tart f -hez, ha bármely rögzített $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mu(\{t \in X : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0.$$

22.9. Állítás. Tegyük fel, hogy $\mu(X) < \infty$.

- (a) Ha $0 \leq p \leq q \leq \infty$, akkor $L^q \subset L^p$, és az $i : L^q \rightarrow L^p$ beágyazás folytonos.
- (b) L^0 egybeesik a mérhető és m.m. véges értékű függvények halmazával.
- (c) (Fréchet¹⁴) Az L^0 -beli konvergencia a mértékben való konvergencia.
- (d) (Riesz¹⁵) Ha $f_n \rightarrow f$ mértékben, akkor létezik olyan (f_{n_k}) részsorozat, hogy $f_{n_k} \rightarrow f$ m.m.

Bizonyítás.

(a) A $p = q$ eset nyilvánvaló. Ha $0 < p < q < \infty$, akkor alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget az $1 \cdot |f|^p$ szorzatra az

$$\int |f|^p d\mu \leq \|1\|_{q/(q-p)} \cdot \| |f|^p \|_{q/p} = \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_q^p$$

becslést kapjuk, amiből

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q.$$

Ez a becslés közvetlenül ellenőrizhető $q = \infty$ -re is. Ezzel beláttuk az $i : L^q \rightarrow L^p$ beágyazás folytonosságát tetszőleges $0 < p < q \leq \infty$ esetén.

¹³ Lebesgue 1906.

¹⁴ Fréchet 1916, 1919–20. Munkájában az ittenivel ekvivalens metrikát alkalmazott.

¹⁵ Riesz 1909.

A bizonyítás befejezéséhez elég megmutatnunk, hogy az $i : L^q \rightarrow L^0$ beágyazás minden $0 < q < 1$ -re folytonos. Létezik olyan $c_q > 0$ konstans, hogy

$$\frac{|f|}{1 + |f|} \leq c_q |f|^q$$

minden f -re, mert a $t \mapsto |t|^{1-q}/(1 + |t|)$ függvény folytonos és korlátos \mathbb{R} -en. Ebből következik az $N_0(f) \leq c_q N_q(f)$ becslés minden f -re, ami a kívánt állítást igazolja.

(b) nyilvánvaló.

(c) Könnyen visszavezethető a kérdés az $f = 0$ esetre. Ha $N_0(f_n) \rightarrow 0$ és $\varepsilon > 0$, akkor felhasználva a $t \mapsto t/(1 + t)$ monoton növekvő voltát $[0, \infty)$ -en azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(\{|f_n| \geq \varepsilon\}) &= \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} 1 \, d\mu \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} \, d\mu \leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} N_0(f_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Fordítva, ha $f_n \rightarrow 0$ mértékben, akkor minden rögzített $\varepsilon > 0$ -ra fennáll a következő becslés:

$$\begin{aligned} N_0(f_n) &= \int_{\{|f_n| < \varepsilon\}} \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} \, d\mu + \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} \, d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \mu(X) + \mu(\{|f_n| \geq \varepsilon\}). \end{aligned}$$

Innen $N_0(f_n) < \varepsilon \mu(X)$, ha n elég nagy.

(d) Kombináljuk az előző tulajdonságot a 22.7 állítás (c) részével (295. o.).

□

A mértékben való konvergencia segítségével jellemezhetjük az L^p -beli erős konvergenciát, és megvilágíthatjuk a gyenge és erős konvergencia kapcsolatát:

22.10. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\mu(X) < \infty$.*

(a) (Vitali¹⁶) *Legyen $0 < p < \infty$. Pontosán akkor teljesül az $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ erős konvergencia, ha $f_n \rightarrow f$ mértékben, és ha n -re nézve egyenletesen*

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \mu(A) \rightarrow 0.$$

¹⁶ Vitali 1907, 147. o.

- (b) Legyen $0 < r < p \leq \infty$. Ha (f_n) korlátos L^p -ben és $f_n \rightarrow f$ mértékben, akkor $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$.
- (c) Legyen $1 < p \leq \infty$, és q a konjugált kitevő. Ha (f_n) korlátos L^p -ben és $f_n \rightarrow f$ mértékben, akkor $f_n \rightarrow f$ $\sigma(L^p, L^q)$ -ban is.
- (d) (Vitali–Hahn–Saks¹⁷) A következő ekvivalencia teljesül az L^1 terekben:

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \iff f_n \rightharpoonup f \text{ és } f_n \rightarrow f \text{ mértékben.}$$

Példa. A $[0, 1]$ -en értelmezett $f_n(t) := n^{1/p} e^{-nt}$ függvények¹⁸

- korlátosak L^p -ben minden $0 < p \leq \infty$ -re;
- mértékben nullához tartanak;
- nem konvergálnak erősen nullához L^p -ben;
- nem konvergálnak gyengén nullához L^1 -ben.

Ez mutatja a (b) és (c) tulajdonságok optimalitását.

Megjegyzés. A mértékben való konvergencia nem szükséges a gyenge konvergenciához. Például a $\sin nt$ függvények mértékben nem tartanak nullához, de a Riemann–Lebesgue lemma alapján (284. o.) nullához tartanak bármely korlátos intervallumon a $\sigma(L^p, L^q)$ gyenge topológiák mindegyikében.

Bizonyítás.

(a) Tegyük fel először, hogy $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$; akkor $f_n \rightarrow f$ mértékben az előző állítás (a) és (c) részei miatt. Másrészt tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz rögzítsünk olyan N egészt, hogy $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$ minden $n \geq N$ -re. A 19.10 lemma (193. o.) alapján létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $\mu(A) < \delta$ esetén

$$\int_A |f|^p d\mu < \varepsilon^p, \quad \text{és} \quad \int_A |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p, \quad n = 1, \dots, N-1.$$

Akkor minden $n \geq N$ -re teljesülnek a következő feltételek:

$$\int_A |f_n|^p d\mu \leq \int_A |f|^p d\mu + \int_A |f_n - f|^p d\mu < 2\varepsilon^p,$$

ha $0 < p \leq 1$, és

$$\left(\int_A |f_n|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_A |f_n - f|^p d\mu \right)^{1/p} < 2\varepsilon,$$

¹⁷ Vitali 1907 (147. o.), Hahn 1922, Saks 1933. A tételből könnyen levezethető Schur tétele (64. o.), miszerint ℓ^1 -ben a gyenge és erős konvergencia egybeesik.

¹⁸ Lásd a 289. oldalon adott példát.

ha $1 \leq p < \infty$.

A fordított irányban elég megmutatnunk, hogy (f_n) Cauchy-sorozat L^p -ben. Akkor ugyanis L^p teljessége folytán f_n konvergál egy alkalmas $g \in L^p$ függvényhez, és akkor az előző állítás (a) és (c) részei miatt mértékben is konvergál g -hez. De a feltevésünk szerint f_n f -hez is konvergál mértékben, úgyhogy $f = g$ m.m. a határérték egyértelműsége miatt.

A Cauchy-tulajdonság igazolásához tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz rögzítsünk olyan $\delta > 0$ -t, hogy

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

Mínt hogy $f_n \rightarrow f$ mértékben, válasszunk olyan nagy N -et, hogy

$$\mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2} \quad \text{minden } n \geq N\text{-re.}$$

A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva ebből adódik, hogy

$$\mu\left(\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\}\right) < \delta \quad \text{minden } m, n \geq N\text{-re.}$$

Következésképpen, felhasználva a minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re érvényes elemi

$$|x - y|^p \leq \max\{1, 2^{p-1}\}(|x|^p + |y|^p)$$

egyenlőtlenséget¹⁹, a következő becslést kapjuk minden $m, n \geq N$ -re:

$$\begin{aligned} & \int_X |f_m - f_n|^p d\mu \\ &= \int_{\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\}} |f_m - f_n|^p d\mu + \int_{\{|f_m - f_n| < \varepsilon\}} |f_m - f_n|^p d\mu \\ &\leq \max\{1, 2^{p-1}\} \int_{\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\}} |f_m|^p + |f_n|^p d\mu + \mu(X)\varepsilon^p \\ &\leq (\max\{2, 2^p\} + \mu(X))\varepsilon^p. \end{aligned}$$

Befejezésül vegyük észre, hogy $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén a jobboldal nullához tart.

(b) Az $L^r \subset L^0$ beágyazás folytonossága miatt elég az $r > 0$ esettel foglalkoznunk. Alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget a következő becslést

¹⁹ Az egyenlőtlenség $p \geq 1$ esetén a $t \mapsto |t|^p$ függvény konvexitásából adódik, a $0 < p \leq 1$ esetet pedig a 15.23 lemmában igazoltuk, 117. o.

kapjuk minden mérhető A halmazra:

$$\begin{aligned} \int_A |f_n|^r d\mu &= \int_X \chi_A |f_n|^r d\mu \leq \|\chi_A\|_{p/(p-r)} \cdot \| |f_n|^r \|_{p/r} \\ &= \mu(A)^{(p-r)/p} \cdot \|f_n\|_p^r. \end{aligned}$$

Mint hogy az (f_n) sorozat korlátos L^p -ben, az utolsó kifejezés $\mu(A) \rightarrow 0$ esetén n -ben egyenletesen nullához tart. Végül alkalmazzuk Vitali most igazolt tételét.

(c) Cantor lemmája (30. o.) alapján elegendő megmutatnunk, hogy (f_n) bármely (f_{n_k}) részsorozatának létezik f -hez tartó $(f_{n_{k_\ell}})$ részsorozata a $\sigma(L^p, L^q)$ topológiában. Mint hogy $f_{n_k} \rightarrow f$ mértékben, a Riesz-lemma alapján (299. o.) létezik olyan $(f_{n_{k_\ell}})$ részsorozat, amely m.m. f -hez tart. De akkor $f_{n_{k_\ell}} \rightarrow f$ a $\sigma(L^p, L^q)$ topológiában is a 22.2 állítás szerint (287. o.).

(d) Ha $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, akkor $f_n \rightharpoonup f$ a gyenge konvergencia általános tulajdonsága miatt, és $f_n \rightarrow f$ mértékben az (a) rész miatt.

A fordított irányban (a) miatt elég megmutatnunk, hogy n -ben egyenletesen

$$\int_A |f_n| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \mu(A) \rightarrow 0.$$

Az

$$\int_A |f_n| d\mu = \int_{A \cap \{f_n > 0\}} f_n d\mu - \int_{A \cap \{f_n < 0\}} f_n d\mu$$

felbontást használva elég azt megmutatnunk, hogy n -ben egyenletesen

$$\int_A f_n d\mu \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \mu(A) \rightarrow 0. \quad (22.1)$$

A 19.10 lemma (193. o.) miatt ez a reláció minden egyes n -re érvényes. Az egyenletesség igazolása céljából jelöljük \tilde{L}^1 -mal a mérhető halmazok karakterisztikus függvényeinek a rendszerét. Vegyük észre, hogy \tilde{L}^1 zárt halmaz L^1 -ben, tehát teljes metrikus tér. Ha ugyanis $\chi_{A_m} \rightarrow g$ L^1 -ben, akkor a Riesz-lemma (154. o.) szerint létezik m.m. konvergens $\chi_{A_{m_k}} \rightarrow g$ részsorozat. Következésképpen $g(t) \in \{0, 1\}$ m.m. t -re, tehát g alkalmas mérhető halmaz karakterisztikus függvénye.

Tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ -ra az

$$F_N := \left\{ \chi_A \in \tilde{L}^1 : \left| \int_A f_m d\mu - \int_A f_n d\mu \right| \leq \varepsilon \quad \text{minden } m, n \geq N\text{-re} \right\}$$

$(N = 1, 2, \dots)$ halmazok az (f_n) sorozat gyenge konvergenciája miatt befedik \tilde{L}^1 -ot. E halmazok zártak, hiszen ha $\chi_{A_k} \rightarrow \chi_A$ L^1 -ben, akkor

$$\mu(A \setminus A_k) + \mu(A_k \setminus A) = \|\chi_{A_k} - \chi_A\|_1 \rightarrow 0;$$

tetszőlegesen rögzített m, n -re (22.1) alkalmazásával innen az

$$\left| \int_A f_m d\mu - \int_A f_n d\mu \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{A_k} f_m d\mu - \int_{A_k} f_n d\mu \right| \leq \varepsilon$$

becslés adódik.

Alkalmazva a Baire-lemmát (26. o.) a zárt halmazok legalább egyike tartalmaz nem-üres gömböt, mondjuk $B_r(\chi_A) \subset F_N$. Innen következik az alábbi implikáció:

$$\begin{aligned} \mu(B) &< r \\ \implies \left| \int_B f_m d\mu - \int_B f_n d\mu \right| &\leq 2\varepsilon \quad \text{minden } m, n \geq N\text{-re.} \end{aligned} \quad (22.2)$$

Alkalmazva ugyanis a $\chi_B = \chi_{A \cup B} - \chi_{A \setminus B}$ és $\chi_{A \cup B}, \chi_{A \setminus B} \in B_r(\chi_A)$ összefüggéseket fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left| \int_B f_m - f_n d\mu \right| \leq \left| \int_{A \cup B} f_m - f_n d\mu \right| + \left| \int_{A \setminus B} f_m - f_n d\mu \right| \leq 2\varepsilon.$$

Alkalmazzuk most (22.1)-et $n = 1, \dots, N$ -re: léteznek olyan $r_1, \dots, r_N > 0$ számok, hogy

$$\mu(B) < r_i \implies \left| \int_B f_i d\mu \right| \leq \varepsilon \quad i = 1, \dots, N\text{-re.} \quad (22.3)$$

Legyen $\delta := \min\{r, r_1, \dots, r_N\}$, akkor (22.2) és (22.3) alapján

$$\mu(B) < \delta \implies \left| \int_B f_n d\mu \right| \leq 3\varepsilon \quad \text{minden } n\text{-re.} \quad \square$$

A klasszikus analízisből jólismert a pontonkénti és egyenletes konvergencia közti különbség. Megmutatjuk, hogy mértékelméleti szempontból nem is térnek el egymástól annyira. Mellékeredményként fény derül a mértékbeli és a m.m. való konvergencia szoros kapcsolatára is.

Definíció. Az (f_n) sorozat *kvázi egyenletesen* tart f -hez, ha bármely $\delta > 0$ -hoz létezik olyan δ -nál kisebb mértékű B halmaz, hogy f_n egyenletesen tart f -hez B komplementumán.

A kvázিয়েgyenletes konvergencia maga után vonja a m.m. való konvergenciát. Ha ugyanis $f_n \rightarrow f$ kvázিয়েgyenletesen, akkor minden egyes $k = 1, 2, \dots$ -hoz található olyan $< 1/k$ -nál kisebb mértékű B_k halmaz, hogy f_n egyenletesen tart f -hez B_k komplementumán. Akkor $B := \cap B_k$ nullahalmaz, és $f_n \rightarrow f$ B komplementumán.

Jegorov meglepő tétele szerint a fordított irányú implikáció is teljesül, tehát a m.m. konvergencia *ekvivalens* a kvázিয়েgyenletes konvergenciával:

22.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\mu(X) < \infty$, és legyenek f_n, f mérhető, m.m. véges értékű függvények.*

(a) (Jegorov²⁰) *Ha $f_n \rightarrow f$ m.m., akkor $f_n \rightarrow f$ kvázিয়েgyenletesen is.*

(b) (Lebesgue²¹) *Ha $f_n \rightarrow f$ m.m., akkor $f_n \rightarrow f$ mértékben is.*

Megjegyzés. Az $X = \mathbb{R}$ -en értelmezett $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ függvények mutatják a $\mu(X) < \infty$ feltétel szükségességét.

Bizonyítás.

(a) Rögzítsünk egy tetszőleges $\delta > 0$ számot. Tetszőlegesen rögzített k pozitív egésze m.m. $x \in X$ pont hozzátartozik a

$$B_m := \{x \in X : |f_n - f| \leq 1/k \text{ minden } n \geq m\text{-re}\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

halmazok egyesítéséhez, hiszen $f_n \rightarrow f$ m.m. Alkalmazva a 19.3 állítás (c) részét (183. o.) a monoton növekvő (B_m) halmazsorozatra és felhasználva a $\mu(X) < \infty$ feltevést, alkalmas elég nagy m_k indexre $\mu(X \setminus B_{m_k}) < 2^{-k}\delta$. Akkor $f_n \rightarrow f$ egyenletesen $B := \cap B_{m_k}$ -n, és $\mu(X \setminus B) < \delta$.

(b) Tetszőlegesen adott $\delta > 0$ és $\varepsilon > 0$ számokhoz olyan N -et keresünk, hogy $\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) < \varepsilon$ minden $n \geq N$ -re. Jegorov tétele alapján van olyan ε -nál kisebb mértékű A halmaz, hogy f_n $X \setminus A$ -n egyenletesen f -hez tart. Befejezésül válasszunk olyan nagy N -et, hogy $|f_n - f| < \delta$ $X \setminus A$ -n minden $n \geq N$ -re. \square

Fejezzük be a szakaszt (és a könyvet) annak a kimutatásával, hogy a m.m. való konvergencia *nem* topologikus konvergencia általában; ez a tény megmagyarázza e fogalom alkalmazásával kapcsolatos nehézségek egy részét.

22.12. Következmény. (Fréchet²²) Az $L^0([0, 1])$ térben a m.m. való konvergencia *nem* topologizálható.

²⁰ Jegorov [Egorov] 1911.

²¹ Lebesgue 1906.

²² Fréchet 1919–20. Az alábbi függvényt sorozat már bevezettük a 257. oldalon.

Bizonyítás. Az

$$f_{2^k+i}(t) := \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{i}{2^k} \leq t \leq \frac{i+1}{2^k}, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$$

képlettel értelmezett függvénysorozat mértékben nullához tart, és így Riesz lemmája (297. o.) alapján minden részsorozatának van m.m. nullához tartó részsorozata. Ha a m.m. való konvergencia topologikus konvergencia volna, akkor ebből Cantor lemmája miatt (30. o.) következne, hogy f_n m.m. nullához tartana. Azonban az $(f_n(t))$ számsorozat egyetlen t -re sem konvergens. \square

Megjegyzés. A fenti eredményeket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a mértékben való konvergencia a m.m. való konvergenciához legközelebbi topologikus konvergencia.

Irodalom

- [1] N. I. Ahiezer, *Előadások az approximáció elméletéről*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
- [2] N. I. Akhiezer és I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space I-II*, Dover, New York, 1993.
- [3] L. Alaoglu, *Weak topologies of normed linear spaces*, Ann. of Math. (2) 41 (1940), 252–267.
- [4] F. Altomare és M. Campiti, *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, De Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [5] Archimède, *La quadrature de la parabole*; [6] II, 377–404.
- [6] Archimède, *Les oeuvres complètes d'Archimède suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon I-II*, Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
- [7] C. Arzelà, *Sulla integrazione per serie*, Rend. Accad. Lincei Roma 1 (1885), 532–537 és 566–569.
- [8] C. Arzelà, *Funzioni di linee*, Atti della R. Accad. dei Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (4) 5_I (1889), 342–348.
- [9] C. Arzelà, *Sulle funzioni di linee*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. (5) 5 (1895), 55–74.
- [10] C. Arzelà, *Sulle serie di funzioni*, Memorie Accad. Sci. Bologna 8 (1900), 131–186 és 701–744.
- [11] Giulio Ascoli, *Sul concetto di integrale definite*, Atti Acc. Lincei (2) 2 (1875), 862–872.
- [12] Giulio Ascoli, *Le curve limiti di una varietà data di curve*, Mem. Accad. dei Lincei (3) 18 (1883), 521–586.
- [13] Guido Ascoli, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 10 (1932), 33–81, 203–232.
- [14] D. Austin, *A geometric proof of the Lebesgue differentiation theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 220–221.
- [15] V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Presses Universitaires de France, Paris, 1996.
- [16] R. Baire, *Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues*, C. R. Acad. Sci. Paris 126 (1898), 1621–1623.
- [17] R. Baire, *Sur les fonctions à variables réelles*, Ann. di Mat. (3) 3 (1899), 1–123.
- [18] R. Baire, *Oeuvres scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1990.
- [19] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), 133–181; [25] II, 305–348.
- [20] S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. 4 (1923), 7–33.
- [21] S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires I-II*, Studia Math. 1 (1929), 211–216 és 223–239; [25] II, 375–395.
- [22] S. Banach, *Théorèmes sur les ensembles de première catégorie*, Fund. Math. 16 (1930), 395–398; [25] I, 204–206.
- [23] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1932; [25] II, 13–219.
- [24] S. Banach, *The Lebesgue integral in abstract spaces*, Jegyzet a [353] könyvben, 1937.

- [25] S. Banach, *Oeuvres I-II*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1967, 1979.
- [26] S. Banach és S. Mazur, *Zur Theorie der linearen Dimension*, Studia Math. 4 (1933), 100–112; [25] II, 420–430.
- [27] S. Banach és H. Steinhaus, *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fund. Math. 9 (1927), 50–61; [25] II, 365–374.
- [28] S. Banach és A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. 6 (1924), 244–277.
- [29] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [30] R. G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, 32. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [31] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [32] S. K. Berberian, *Notes on Spectral Theory*, Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London 1966.
- [33] S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert space*, New York, Chelsea, 1976.
- [34] S. J. Bernau és F. Smithies, *A note on normal operators*, Proc. Camb. Phil. Soc. 59 (1963), 727–729.
- [35] M. Bernkopf, *The development of functions spaces with particular reference to their origins in integral equation theory*, Archive for History of Exact Sciences 3 (1966), 1–66.
- [36] D. Bernoulli, *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes*, Hist. et Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences et Lettres de Berlin 9 (1753), 147–172 (paru en 1755).
- [37] S. N. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités*, Comm. Kharkov Math. Soc. 13 (1912), 1–2.
- [38] C. Bessaga és A. Pelczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, Monografie Matematyczne, Tome 58, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1975.
- [39] F. W. Bessel, *Über das Dollond'sche Mittagsfernrohr etc.*, Astronomische Beobachtungen etc. Bd. 1, Königsberg 1815, [41] II, 24–25.
- [40] F. W. Bessel, *Über die Bestimmung des Gesetzes einer priorsischen Erscheinung*, Astronomische Nachrichten Bd. 6, Altona 1828, 333–348, [41] II, 364–368.
- [41] *Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel I-III*, Engelmann, Leipzig, 1875–1876.
- [42] G. Birkhoff és E. Kreyszig, *The establishment of functional analysis*, Hist. Math. 11 (1984), 258–321.
- [43] S. Bochner, *Integration von Funktionen, deren Wert die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fund. Math. 20 (1933), 262–276.
- [44] H. Bohman, *On approximation of continuous and analytic functions*, Arkiv för Matematik 2 (1952), 43–56.
- [45] H. F. Bohnenblust és A. Sobczyk 1938, *Extensions of functionals on complex linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 91–93.
- [46] P. du Bois-Reymond, *Ueber die Fourier'schen Reihen*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Univ. zu Göttingen, 21 (1873), 571–582.
- [47] P. du Bois-Reymond, *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln* (mit drei lithografierten Tafeln), Abhandlungen der

- Mathematisch-Physicalischen Classe der K. Bayerische Akademie der Wissenschaften 12 (1876), 1–103.
- [48] P. du Bois-Reymond, *Die allgemeine Funktionentheorie*, Laapp, Tübingen, 1882. Francia fordítás: *Théorie générale des fonctions*, Nice, 1887.
- [49] P. du Bois-Reymond, *Ueber das Doppelintegral*, J. Math. Pures Appl. 94 (1883), 273–290.
- [50] E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. École Norm. Sup. (3) 12 (1895), 9–55; [53] I, 239–285.
- [51] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [52] E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [53] E. Borel, *Oeuvres I-IV*, CNRS, Paris, 1972.
- [54] E. Borel (szerk.), L. Zoretti, P. Montel és M. Fréchet, *Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions: Les ensembles de points, Intégration et dérivation, Développements en séries*, Encyclopédie des sciences mathématiques, II-2, Gauthier-Villars, Paris és Teubner, Leipzig, 1912. A. Rosenthal átdolgozott német fordítása: *Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen: Die Punktmengen, Integration und Differentiation, Funktionenfolgen*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II-9, Teubner, Leipzig, 1924.
- [55] N. Bourbaki, *Sur les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938), 1701–1704.
- [56] D. G. Bourgin, *Some properties of Banach spaces*, Amer. J. Math. 64 (1942), 597–612.
- [57] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [58] H. Brunn, *Zur Theorie der Eigebiete*, Arch. Math. Phys. (3) 17 (1910), 289–300.
- [59] G. Cantor, *Ueber trigonometrische Reihen*, Math. Ann. 4 (1871), 139–143; [65], 87–91.
- [60] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, J. reine angew. Math. 77 (1874), 258–262; [65], 115–118.
- [61] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten III*, Math. Ann. 20 (1882), 113–121; [65], 149–157.
- [62] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V*, Math. Ann. 21 (1883), 545–586; [65], 165–208.
- [63] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten VI*, Math. Ann. 23 (1884), 451–488; [65], 210–244.
- [64] G. Cantor, *Über eine Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinig. 1 (1890–91), 75–78; [65], 278–280.
- [65] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1932.
- [66] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116 (1966), 135–157.
- [67] L.-A. Cauchy, *Résumé des leçons données à l'École Polytechnique sur le calcul infinitésimal. Calcul intégral*, 1823; [69] (2) IV, 122–261.
- [68] L.-A. Cauchy, *Mémoire sur les intégrales définies*, Mém. Acad. Sci. Paris 1, 1827; [69] (1) I, 319–506.
- [69] A. L. Cauchy, *Oeuvres*, 2 sorozat, 22 kötet, Gauthier-Villars, Paris, 1882–1905.
- [70] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, Chelsea, New York, 1982.
- [71] A. C. Clairaut, *Mémoire sur l'orbite apparente du soleil autour de la Terre, en ayant égard aux perturbations produites par des actions de la Lune et des Planètes principales*, Hist. de l'Acad. des Sci. de Paris, 1754 (megjelent 1759-ben), 52–564. o.
- [72] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396–414.

- [73] J. A. Clarkson és Erdős Pál, *Approximation by polynomials*, Duke Math. J. 10 (1943), 5–11.
- [74] R. Courant és D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik I*, Springer, Berlin, 1931.
- [75] Császár Ákos, *Valós analízis I-II*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [76] Czách László, *Mérték- és integrálelmélet*, előkészületben.
- [77] P. Daniell, *A general form of integral*, Annals of Math. 19 (1917/18), 279–294.
- [78] G. Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. École Normale Sup. Paris (2) 4 (1875), 57–112.
- [79] M. M. Day, *The spaces L^p with $0 < p < 1$* , Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 816–823.
- [80] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer, Berlin, 1962.
- [81] A. Denjoy, *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*, C. R. Acad. Sci. Paris 154 (1912), 859–862.
- [82] A. Denjoy, *Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale*, C. R. Acad. Sci. Paris 154 (1912), 1075–1078.
- [83] A. Denjoy, *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivées non sommables*, Ann. École Normale Sup. Paris (3) 33 (1916), 127–222.
- [84] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces. Selected Topics*, Springer, New York, 1975.
- [85] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, New York, 1984.
- [86] J. Dieudonné, *Sur le théorème de Hahn-Banach*, La revue scientifique 79 (1941), 642–643.
- [87] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [88] U. Dini, *Sulle funzioni finite continue di variabili reali che non hanno mai derivata*, Atti della R. Acc. dei Lincei, (3), 1 (1877), 130–133; [91] II, 8–11.
- [89] U. Dini, *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*, Nistri, Pisa, 1878.
- [90] U. Dini, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, Nistri, Pisa, 1880; [91] IV, 1–272.
- [91] U. Dini, *Opere I-V*, Edizioni Cremonese, Roma, 1953–1959.
- [92] G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, J. reine angew. Math. 4 (1829), 157–169; [94] I, 117–132.
- [93] G. L. Dirichlet, *Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale*, Ber. über die Verh. der Königl. Preussischen Acad. der Wiss. Berlin, 1839, 18–25; [94] I, 381–390.
- [94] G. L. Dirichlet, *Werke I-II*, Reimer, Berlin, 1889–1897.
- [95] J. L. Doob, *The development of rigor in mathematical probability, (1900–1950)*, [312], 157–169.
- [96] N. Dunford, *Uniformity in linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 305–356.
- [97] N. Dunford és J. T. Schwartz, *Linear Operators I-III*, John Wiley & Sons, New York, 1957–1971.
- [98] W. F. Eberlein, *Weak compactness in Banach spaces I*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33 (1947), 51–53.
- [99] R. E. Edwards, *Functional Analysis. Theory and Applications*, Holt, Rinehart and Winston, New-York, 1965.
- [100] R. E. Edwards, *Fourier Series. A Modern Introduction I-II*, Springer, New York, 1979–1982.

- [101] D. Th. Egoroff, *Sur les suites de fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris 152 (1911), 244–246.
- [102] M. Eidelheit, *Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. 6 (1936), 104–111.
- [103] H. W. Ellis és D. O. Snow, *On $(L^1)^*$ for general measure spaces*, Canad. Math. Bull. 6 (1963), 211–229.
- [104] R. Engelking, *General Topology*, Pánstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1977.
- [105] P. Erdős és P. Turán, *On interpolation I. Quadrature- and mean-convergence in the Lagrange interpolation*, Ann. of Math. 38 (1937), 146–147.
- [106] L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Comm. Acad. Sci. Petrop. 7 (1734/5), 123–134 (megjelent 1740-ben); [110] (1) 14, 73–86.
- [107] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum I*, Lausanne 1748 ; [110] (1) 8.
- [108] L. Euler, *De formulis integralibus duplicatis*, Novi Comment. Academiae Sci. Petropolitanae 14 (1769): I, 1770, 72–103; [110] (1) 17, 289–315.
- [109] L. Euler, *Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuius dam anguli pro-gredientibus*, Nova Acta Acad. Sci. Petrop. 11 (1793), 114–132 (készült 1777-ben, meg-jelent 1798-ban); [110] (1) 16, első rész, 333–355.
- [110] L. Euler, *Opera Omnia*, 4 sorozat, eddig 73 kötet, Teubner, Leipzig és Berlin, majd Füssli, Zürich, 1911–.
- [111] G. Faber, *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funtionen*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 23 (1914), 192–210.
- [112] J. Farkas, *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, J. reine angew. Math. 124 (1902), 1–27.
- [113] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math. 30 (1906), 335–400.
- [114] Fejér Lipót, *Sur les fonctions bornées et intégrables*, C. R. Acad. Sci. Paris 131 (1900), 984–987; [117] I, 37–41.
- [115] Fejér Lipót, *Untersuchungen über Fouriersche Reihen*, Math. Ann. 58 (1904), 51–69; [117] I, 142–160.
- [116] Fejér Lipót, *Über Interpolation*, Götting. Nachr., 1916, 66–91; [117] II, 25–48.
- [117] Fejér Lipót összegyűjtött munkái I-II, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
- [118] G. Fichera, *Vito Volterra and the birth of functional analysis*, [312], 171–183.
- [119] G. M. Fichtenholz és L. V. Kantorovitch, *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Math. 5 (1934), 69–98.
- [120] E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 1022–1024, 1148–1150.
- [121] E. Fischer, *Személyes közlés Riesz Frigyesnek*, lásd [328] és [329].
- [122] J. B. J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Didot, Paris 1822; [123] I.
- [123] *Oeuvres de Fourier I-II*, Gauthier-Villars, Paris, 1888–1890.
- [124] I. Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, Kong. Vetenskaps-Akademiens Förh. Stockholm (1900), 39–46; [126], 61–68.
- [125] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math. 27 (1903), 365–390; [126], 81–106.
- [126] I. Fredholm, *Oeuvres complètes de Ivar Fredholm*, Litos Reprotryck, Malmo, 1955.

- [127] Freud Géza, *Über positive lineare Approximationsfolgen von stetigen reellen Funktionen auf kompakten Mengen*, On Approximation Theory, Proc. of the Conference in Oberwolfach, 1963, Birkhäuser, Basel, 1964, 233–238.
- [128] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 1–74.
- [129] M. Fréchet, *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 1414–1416.
- [130] M. Fréchet, *Sur les opérations linéaires III*, Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), 433–446.
- [131] M. Fréchet, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France 43 (1915), 248–265.
- [132] M. Fréchet, *L'écart de deux fonctions quelconques*, C. R. Acad. Sci. Paris 162 (1916), 154–155.
- [133] M. Fréchet, *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable réelle*, Bull. Calcutta Math. Soc. 11 (1919–20) 187–206.
- [134] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [135] G. Frobenius, *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, J. reine angew. Math. 84 (1878), 1–63; [136] I, 343–405.
- [136] G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen I–III*, Springer, Berlin, 1968.
- [137] G. Fubini, *Sugli integrali multipli*, Rend. Accad. Lincei Roma 16 (1907), 608–614.
- [138] G. Fubini, *Sulla derivazione per serie*, Rend. Accad. Lincei Roma 24 (1915), 204–206.
- [139] I. S. Gál, *On sequences of operations in complete vector spaces*, Amer. Math. Monthly 60 (1953), 527–538.
- [140] L. Gillman és M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Princeton, 1960.
- [141] H. H. Goldstine, *Weakly complete Banach spaces*, Duke Math. J. 4 (1938), 125–131.
- [142] D. B. Goodner, *Projections in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 89–108.
- [143] J. P. Gram, *Om Rackendvilklinger bestemte ved Hjaelp af de mindste Kvadraters Methode*, Copenhagen, 1879. Német fordítás: *Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate*, J. reine angew. Math. 94 (1883), 41–73.
- [144] B. L. Gurevich és G. E. Shilov, *Integral, Measure and Derivative: a Unified Approach*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966.
- [145] Haar Alfréd, *Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen*, Math. Ann. 78 (1918), 121–136; [147], 124–139.
- [146] Haar Alfréd, *A folytonos csoportok elméletéről*, Magyar Tud. Akad. Mat. és Természettud. Ért. 49 (1932), 287–306; [147], 579–599. Német fordítás: *Die Maßbegriffe in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Annals of Math. 34 (1933), 147–169; [147], 600–622.
- [147] Haar Alfréd *összegyűjtött munkái*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.
- [148] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen I*, Berlin, 1921.
- [149] P. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen*, Monatsh. für Math. und Physik 32 (1922), 3–88; [150] I, 173–258.
- [150] P. Hahn, *Über linearer Gleichungssysteme in linearer Räumen*, J. reine angew. Math. 157 (1927), 214–229; [150] I, 259–274.
- [151] P. Hahn, *Gesammelte Abhandlungen I–III*, Springer, Wien, New York, 1995–1997.

- [152] P. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, New York, 1957.
- [153] P. Halmos, *Hilbert Space Problem Book*, Berlin, Springer, 1974.
- [154] P. R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1950. Magyar fordítás: *Mértékelmélet*, Gondolat, Budapest, 1984.
- [155] G. Halphén, *Sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 95 (1882), 1217–1219.
- [156] H. Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen*, Math. Ann. 20 (1882), 63–112.
- [157] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [158] A. Harnack, *Die Elemente der Differential- und Integralrechnung*, Teubner, Leipzig, 1881.
- [159] A. Harnack, *Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variablen mit ihren Ableitungen II*, Math. Ann. 24 (1884), 217–252.
- [160] A. Harnack, *Ueber den Inhalt von Punktmengen*, Math. Ann. 25 (1885), 241–250.
- [161] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, 1914; [163] II.
- [162] F. Hausdorff, *Über halbstetigen Funktionen und deren Verallgemeinerung*, Math. Z. 5 (1919), 292–309; [163] IV, 79–96.
- [163] F. Hausdorff, *Gesammelte Werke I–VIII*, Springer, Berlin, 2000–.
- [164] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development*, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2001.
- [165] E. Heine, *Die Elemente der Funktionenlehre*, J. reine angew. Math. 74 (1872), 172–188.
- [166] E. Hellinger és O. Toeplitz, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. (1906), 351–355.
- [167] E. Hellinger és O. Toeplitz, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen*, Math. Ann. 69 (1910), 289–330.
- [168] E. Hellinger és O. Toeplitz, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, II C 13, Teubner, Leipzig, 1927.
- [169] E. Helly, *Über lineare Funktionaloperationen*, Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. Wien 121, 2, (1912), 265–297.
- [170] E. Helly, *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Monatsh. für Math. und Physik 31 (1921), 60–91.
- [171] R. Henstock, *The efficiency of convergence factors for functions of a continuous real variable*, J. London Math. Soc. 30 (1955), 273–286.
- [172] R. Henstock, *Definitions of Riemann type of the variational integrals*, Proc. London Math. Soc. (3) 11 1961 402–418.
- [173] E. Hewitt és K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer, Berlin, 1965.
- [174] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen I*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. (1904), 49–91.
- [175] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen IV*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. (1906), 157–227.
- [176] T. H. Hildebrandt, *Necessary and sufficient conditions for the interchange of limit and summation in the case of sequences of infinite series of a certain type*, Ann. of Math. (2) 14 (1912–13), 81–83.

- [177] T. H. Hildebrandt, *On uniform limitedness of sets of functional operations*, Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1923), 309–315.
- [178] T. H. Hildebrandt, *Über vollstetige, lineare Transformationen*, Acta. Math. 51 (1928), 311–318.
- [179] T. H. Hildebrandt, *On bounded functional operations*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 868–875.
- [180] E. W. Hobson, *On some fundamental properties of Lebesgue integrals in a two-dimensional domain*, Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910), 22–39.
- [181] H. Hochstadt, *Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem*, Math. Intelligencer 2 (1979), 3, 123–125.
- [182] R. B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and Its Applications*, Berlin, Springer, 1975.
- [183] O. Hölder, *Ueber einen Mittelwerthsatz*, Götting. Nachr. (1889), 38–47.
- [184] L. Hörmander, *Linear Differential Operators*, Berlin, Springer, 1963.
- [185] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer, Berlin, 1983.
- [186] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series orthogonal expansions and their continuous analogues*, Proc. Conf. Edwardsville 1967, 237–255. Southern Illinois University Press, Carbondale, Ill., 1968.
- [187] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Dissertation, Göttingen, 1911.
- [188] D. Jackson, *On approximation by trigonometric sums and polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. 13 (1912), 491–515.
- [189] D. Jackson, *The Theory of Approximation*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 11, Providence, RI, 1930.
- [190] C. G. J. Jacobi, *De determinantibus functionalibus*, J. reine angew. Math. 22 (1841), 319–359; [191] III, 393–438.
- [191] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke I–VIII*, Berlin, 1881–1891.
- [192] R. C. James, *Characterizations of reflexivity*, Studia Math. 23 (1964), 205–216.
- [193] Joó István és Komornik Vilmos, *On the equiconvergence of expansions by Riesz bases formed by eigenfunctions of the Schrödinger operator*, Acta Sci. Math. (Szeged) 46 (1983), 357–375.
- [194] C. Jordan, *Sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 92 (1881), 228–230; [198] IV, 393–395.
- [195] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique I–III*, Gauthier-Villars, Paris, 1883.
- [196] C. Jordan, *Remarques sur les intégrales définies*, J. de Math. (4) 8 (1892), 69–99; [198] IV, 427–457.
- [197] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique I–III*, 3^e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1909–1915.
- [198] C. Jordan, *Oeuvres I–IV*, Gauthier-Villars, Paris, 1961–1964.
- [199] M. I. Kadec, *Az erős és gyenge konvergenciáról* (oroszul), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) 122 (1958), 13–16.
- [200] M. I. Kadec, *Az erős és gyenge konvergencia kapcsolatáról* (ukránul), Dopovidi. Akad. Ukrain RSR 9 (1959), 465–468.

- [201] M. I. Kadec, *Lokálisan egyenletesen konvex terekkel izomorf terekről* (oroszul), Izvestia Vuzov. Matem. 6 (13) (1959), 51–57.
- [202] J.-P. Kahane, *Fourier Series*, lásd J.-P. Kahane et P.-G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach, 1995.
- [203] S. Kakutani, *Weak topology and regularity of Banach spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 15 (1939), 169–173.
- [204] S. Kakutani, *Concrete representations of abstract (M) -spaces. (A characterization of the space of continuous functions)*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 994–1024.
- [205] N. J. Kalton, *An F -space with trivial dual where the Krein-Milman theorem holds*, Israel J. Math. 36 (1980), 41–50.
- [206] N. J. Kalton és N. Peck, *A re-examination of the Roberts example of a compact convex set without extreme points*, Math. Ann. 253 (1980), 89–101.
- [207] L. V. Kantorovitch és G. P. Akilov, *Functional analysis*, Second edition. Pergamon Press, Oxford-Elmsford, N.Y., 1982.
- [208] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover, New York, 1976.
- [209] J. Kelley, *Banach spaces with the extension property*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 323–326.
- [210] J. Kelley, *General Topology*, van Nostrand, New York, 1955.
- [211] J. Kindler, *A simple proof of the Daniell-Stone representation theorem*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 396–397.
- [212] A. A. Kirillov és A. D. Gvisiani, *Feladatok a funkcionálanalízis köréből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [213] V. L. Klee, Jr., *Convex sets in linear spaces I-II*, Duke Math. J. 18 (1951), 443–466, 875–883.
- [214] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- [215] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933. Magyar fordítás: *A valószínűség-számítás alapfogalmai*, Gondolat, Budapest, 1982.
- [216] A. Kolmogorov, *Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen Raumes*, Studia Math. 5 (1934), 29–33.
- [217] A. N. Kolmogorov és Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [218] Komornik Vilmos, *An equiconvergence theorem for the Schrödinger operator*, Acta Math. Hungar. 44 (1984), 101–114.
- [219] Komornik Vilmos, *Sur l'équiconvergence des séries orthogonales et biorthogonales correspondant aux fonctions propres des opérateurs différentiels linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 299 (1984), 217–219.
- [220] Komornik Vilmos, *On the equiconvergence of eigenfunction expansions associated with ordinary linear differential operators*, Acta Math. Hungar. 47 (1986), 261–280.
- [221] Komornik Vilmos, *A simple proof of Farkas' lemma*, Amer. Math. Monthly 105 (1998), 949–950.
- [222] P. P. Korovkin, *Pozitív lineáris operátorok konvergenciájáról a folytonos függvények terében* (oroszul), Dokl. Akad. Nauk. SSSR 90 (1953), 961–964.

- [223] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Russian Monographs and Texts on Advanced Mathematics and Physics, Vol. III. Gordon and Breach Publishers, Inc., New York; Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 1960.
- [224] C. A. Kottman, *Subsets of the unit ball that are separated by more than one*, *Studia Math.* 53 (1975), 15–27.
- [225] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I-II*, Springer, Berlin, 1969, 1979.
- [226] M. A. Krasnoselskii és Ya. B. Rutitskii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.
- [227] M. G. Krein és S. G. Krein, *On an inner characteristic of the set of all continuous functions defined on a bicomact Hausdorff space*, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 27 (1940), 429–430.
- [228] M. Krein és D. Milman, *On extreme points of regularly convex sets*, *Studia Math.* 9 (1940), 133–138.
- [229] P. Krée, *Intégration et théorie de la mesure. Une approche géométrique*, Ellipses, Paris, 1997.
- [230] K. Kuratowski, *La propriété de Baire dans les espaces métriques*, *Fund. Math.* 16 (1930), 390–394.
- [231] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter* (oroszul), *Czechoslovak Math. J.* 7 (82) 1957 418–449.
- [232] Laczkovich Miklós, *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, *J. reine angew. Math.* 404 (1990), 77–117.
- [233] Laczkovich Miklós, *Sejtés és bizonyítás*, Typotex, Budapest, 1998.
- [234] J. L. Lagrange, *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, *Miscellanea Taurinensia* III, 1762–65; [236] I, 471–668.
- [235] J. L. Lagrange, *Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques*, *Nouv. Mém. Acad. Royale Berlin* (1773); [236] III, 619–649.
- [236] J. L. Lagrange, *Oeuvres I-XIV*, Gauthier-Villars, Paris, 1867–1882.
- [237] E. Landau, *Über einen Konvergenzsatz*, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. IIa* (1907), 25–27.
- [238] E. Landau, *Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion*, *Rend. Circolo Mat. Palermo* 25 (1908), 337–345; [239] III, 402–410.
- [239] E. Landau, *Collected Works I-VIII*, Thales, Essen, 1986.
- [240] R. Larsen, *Functional Analysis. An Introduction*, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [241] P. Lax, *Change of variables in multiple integrals*, *Amer. Math. Monthly* 106 (1999), 497–501.
- [242] H. Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions*, *Bull. Sci. Math.* 22 (1898), 10 pages; [254] III, 11–20.
- [243] H. Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, *C. R. Acad. Sci. Paris* 132 (1901), 1025–1027; [254] I, 197–199.
- [244] H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, *Ann. Mat. Pura Appl.* (3) 7 (1902), 231–359; [254] I, 201–331.
- [245] H. Lebesgue, *Sur les séries trigonométriques*, *Ann. Éc. Norm.* (3) 20 (1903), 453–485; [254] III, 27–59.
- [246] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904; [254] II, 11–154.

- [247] H. Lebesgue, *Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 141 (1905), 875–877.
- [248] H. Lebesgue, *Sur les fonctions dérivées*, Atti Accad. Lincei Rend. 15 (1906), 3–8; [254] II, 159–164.
- [249] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, 1906.
- [250] H. Lebesgue, *Sur le problème de Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo 24 (1907), 371–402; [254] IV, 91–122.
- [251] H. Lebesgue, *Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 36 (1908), 16 oldal; [254] III, 239–254.
- [252] H. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, Ann. École Norm. (3) 27 (1910), 361–450; [254] II, 185–274.
- [253] H. Lebesgue, *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Toulouse, 1922; [254] I, 97–175.
- [254] H. Lebesgue, *Oeuvres scientifiques I-V*, Université de Genève, Genève, 1972–73.
- [255] J. Le Roux, *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du 2^e ordre à 2 variables indépendantes*, Ann. Éc. Norm. (3) 12 (1895), 227–316.
- [256] B. Levi, *Sul principio di Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 293–360.
- [257] B. Levi, *Sopra l'integrazione delle serie*, Rend. Instituto Lombardo di Sci. e Lett. (2) 39 (1906), 775–780.
- [258] J. Lindenstrauss és L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II : Function Spaces*, Springer, Berlin, 1979.
- [259] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [260] J.-L. Lions és E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications I-III*, Dunod, Paris, 1968–1970.
- [261] J. Liouville, *Troisième mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable*, J. Math. Pures Appl. 2 (1837), 418–437.
- [262] J. S. Lipiński, *Une simple démonstration du théorème sur la dérivée d'une fonction de sauts*, Colloq. Math. 8 (1961), 251–255.
- [263] L. A. Ljusternik és W. I. Sobolev, *Elemente der Funtionalanalysis*, Akademie-Verlag, Berlin, 1979.
- [264] S. Lozinski, *On the convergence and summability of Fourier series and interpolation processes*, Mat. Sb. N.S. 14 (56) (1944), 175–268.
- [265] S. Lozinski, *Lineáris operátorok egy osztályáról (oroszul)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 61 (1948), 193–196.
- [266] H. Löwig, *Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder unendlicher Dimensionszahl*, Acta Sci. Math. Szeged 7 (1934), 1–33.
- [267] N. Lusin, *Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 156 (1913), 1655–1658.
- [268] J. Marcinkiewicz, *Quelques remarques sur l'interpolation*, Acta Sci. Math. (Szeged) 8 (1937), 127–130.
- [269] A. Markov, *On mean values and exterior densities*, Mat. Sb. N.S. 4, 46 (1938), 165–190.

- [270] R. D. Mauldin (szerk.), *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [271] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, *Studia Math.* 4 (1933), 70–84.
- [272] E. J. McShane, *Linear functionals on certain Banach spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1 (1950), 402–408.
- [273] E. J. McShane, *Integration*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944, 1957.
- [274] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, New York, 1998.
- [275] D. P. Milman, *On some criteria for the regularity of spaces of the type (B)*, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.)* 20 (1938), 243–246.
- [276] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen I*, Leipzig, 1896.
- [277] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig-Berlin, 1910.
- [278] H. Minkowski, *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs*, [279] II, 131–229.
- [279] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen I-II*, Teubner, Leipzig, 1911.
- [280] A. F. Monna, *Functional Analysis in Historical Perspective*, Oosthoek, Utrecht, 1973.
- [281] F. J. Murray, *On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p* , *Trans. Amer. Math. Soc.* 41 (1937), 138–152.
- [282] Ch. H. Müntz, *Über den Approximationssatz von Weierstrass*, *Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz gewidmet*, Berlin, 1914, 303–312.
- [283] L. Nachbin, *A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 68 (1950), 28–46.
- [284] L. Narici és E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1985.
- [285] I. P. Natanszon [Natanson], *Valós függvénytan* (oroszul), harmadik kiadás, Nauka, Moszkva, 1974. Az első kiadás (1950) angol fordítása: *Theory of functions of a real variable I-II*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955 és 1961. A második kiadás (1957) német fordítása: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1969.
- [286] I. P. Natanszon, *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- [287] Neumann János [J. von Neumann], *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, *Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1927), 1–57. [292] I, 151–207.
- [288] Neumann János [J. von Neumann], *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, *Fund. Math.* 13 (1929), 73–116; [292] I, 599–643.
- [289] Neumann János [J. von Neumann], *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren*, *Math. Ann.* 102 (1929–30), 370–427; [292] II, 86–143.
- [290] Neumann János [J. von Neumann], *On complete topological spaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 37 (1935), 1–20. [292] II, 508–527.
- [291] Neumann János [J. von Neumann], *On rings of operators III*, *Ann. of Math.* 41 (1940), 94–161; [292] III, 161–228.
- [292] Neumann János [J. von Neumann], *Collected works I-VI*, Pergamon Press, Oxford, New York, 1972–1979.
- [293] Neumann János [J. von Neumann], *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932. Magyar fordítás: *A kvantummechanika matematikai alapjai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

- [294] O. Nikodým, *Sur une généralisation des intégrales de M. Radon*, Fund. Math. 15 (1930), 131–179.
- [295] O. Nikodým, *Sur le principe du minimum dans le problème de Dirichlet*, Ann. Soc. Polon. Math. 10 (1931), 120–121.
- [296] O. M. Nikodým, *Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits*, Mathematica (Cluj) 5 (1931), 130–141.
- [297] O. Nikodým, *Sur le principe du minimum*, Mathematica (Cluj) 9 (1935), 110–128.
- [298] W. P. Novinger, *Mean convergence in L^p spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 2, 627–628.
- [299] V. F. Nyikolajev, *Folytonos függvények polinomokkal való approximációjának a kérdéséről* (oroszul), Dokl. Akad. Nauk SSSR 61 (1948), 201–204.
- [300] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A (1932), No. 8/9, 207–220.
- [301] W. Orlicz, *Über Räume (L^M)*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A (1936), 93–107.
- [302] W. Orlicz, *Linear Functional Analysis*, Series in Real Analysis, 4. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1992.
- [303] W. Osgood, *Non uniform convergence and the integration of series term by term*, Amer. J. Math. 19 (1897), 155–190.
- [304] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
- [305] M.-A. Parseval, *Mémoire sur les séries et sur l'intégration complète d'une équation aux différences partielles linéaires du second ordre, à coefficients constants*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie, Institut de France, Académie des Sciences, Paris, (1) 1 (1806), 638–648.
- [306] G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Bocca, Torino, 1887.
- [307] O. Perron, *Über den Integralbegriff*, Sitzber. Heidelberg Akad. Wiss., Math.-Naturw. Klasse Abt. A 16 (1914), 1–16.
- [308] B. J. Pettis, *A note on regular Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 420–428.
- [309] B. J. Pettis, *A proof that every uniformly convex space is reflexive*, Duke Math. J. 5 (1939), 249–253.
- [310] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, New York, 1966.
- [311] J.-P. Pier, *Intégration et mesure 1900–1950*, [312], 517–564.
- [312] *Development of Mathematics 1900–1950*, szerk. J.-P. Pier, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [313] *Development of Mathematics 1950–2000*, szerk. J.-P. Pier, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [314] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902. Magyar fordítás: *Tudomány és föltevés*, Pátria, Budapest, 1908.
- [315] A. Pringsheim, *Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II-1, Teubner, Leipzig, 1899. Francia fordítás és adaptáció: A. Pringsheim és J. Molk, *Principes fondamentaux de la théorie des fonctions*, Encyclopédie des sciences mathématiques, II-1, Gauthier-Villars, Paris és Teubner, Leipzig, 1909.
- [316] J. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, Sitzber. Akad. Wiss. Wien 122 (1913), Abt. II a, 1295–1438.
- [317] M. Reed és B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I-IV*, Academic Press, New York, 1972–1979.

- [318] F. Rellich, *Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen*, Math. Ann. 110 (1935), 342–356.
- [319] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation, Göttingen, 1851; [321], 3–45. Francia fordítás: *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*, Dissertation inaugurale de Riemann, Göttingen, 1851; [321], 1–56.
- [320] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift, 1854, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1867); [321], 213–251. Francia fordítás: *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, Bull. des Sciences Math. et Astron. (1) 5 (1873); [321], 225–272.
- [321] B. Riemann, *Werke*, Teubner, Leipzig, 1876. Francia fordítás: *Oeuvres mathématiques de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [322] Riesz Frigyes, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 615–619; [339] I, 378–381.
- [323] Riesz Frigyes, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 734–736; [339] I, 382–385.
- [324] Riesz Frigyes, *Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 1409–1411; [339] I, 386–388.
- [325] Riesz Frigyes, *Über orthogonale Funktionensysteme*, Göttinger Nachr. (1907), 116–122; [339] I, 389–395.
- [326] Riesz Frigyes, *Sur les suites de fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris 148 (1909), 1303–1305; [339] I, 396–397 et 405–406.
- [327] Riesz Frigyes, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 149 (1909), 974–977; [339] I, 400–402.
- [328] Riesz Frigyes, *Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues*, C. R. Acad. Sci. Paris 150 (1910), 674–677; [339] I, 403–404 és 398–399.
- [329] Riesz Frigyes, *Untersuchungen über Systeme integrierbar Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), 449–497; [339] I, 441–489.
- [330] Riesz Frigyes, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier-Villars, Paris, 1913; [339] II, 829–1016.
- [331] Riesz Frigyes, *Lineáris függvényegyenletekről*, Math. és Term.-tud. Ért. 35 (1917), 544–579; [339] II, 1017–1052.
- [332] Riesz Frigyes, *Su alcune disuguglianze*, Boll. Unione Mat. Ital. 7 (1928), 77–79; [339] I, 519–521.
- [333] Riesz Frigyes, *Sur la convergence en moyenne I-II*, Acta Sci. Math. (Szeged) 4 (1928–29), 58–64, 182–185; [339] I, 512–518, 522–525.
- [334] Riesz Frigyes, *A monoton függvények differenciálhatóságáról*, Mat. és Fiz. Lapok 38 (1931), 125–131; [339] I, 243–249.
- [335] Riesz Frigyes, *Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*, Acta Sci. Math. (Szeged) 5 (1930–32), 208–221; [339] I, 250–263.
- [336] Riesz Frigyes, *Zur Theorie der Hilbertschen Raumes*, Acta Sci. Math. (1934–35), 34–38; [339] II, 1150–1154.

- [337] Riesz Frigyes, *Lebesgue integrálfogalmának fejlődése*, Matematikai Lapok 1 (1950), 79–90; [31] I, 341–352.
- [338] Riesz Frigyes, *Nullahalmazok és szerepük az analízisben*, Az I. Magyar Mat. Kongr. Közl. (1952), 204–214; [31] I, 353–362.
- [339] Riesz Frigyes *összegyűjtött munkái I-II*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.
- [340] Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla [B. Sz.-Nagy], *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. Magyar fordítás: *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [341] Riesz Marcell, *Sur les ensembles compacts de fonctions sommables*, Acta Sci. Math. Szeged 6 (1933), 136–142.
- [342] J. Roberts, *Pathological compact convex sets in the spaces L_p , $0 < p < 1$* , The Altgeld Book 1975/76, University of Illinois.
- [343] J. Roberts, *A compact convex set without extreme points*, Studia Math. 60 (1977), 255–266.
- [344] A. P. Robertson és W. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge University Press, 1973.
- [345] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.
- [346] L. J. Rogers, *An extension of a certain theorem in inequalities*, Messenger of Math. 17 (1888), 145–150.
- [347] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovie, 1972.
- [348] L. A. Rubel, *Differentiability of monotonic functions*, Colloq. Math. 10 (1963), 277–279.
- [349] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [350] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [351] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [352] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [353] S. Saks, *Theory of The Integral*, Hafner, New York, 1937.
- [354] S. Saks, *Integration in abstract metric spaces*, Duke Math. J. 4 (1938), 408–411.
- [355] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer, Berlin, 1971.
- [356] J. Schauder, *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. 2 (1930), 1–6.
- [357] J. Schauder, *Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen*, Studia Math. 2 (1930), 183–196.
- [358] E. Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*, Math. Ann. 63 (1907), 433–476.
- [359] E. Schmidt, *Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung*, Math. Ann. 64 (1907), 161–174.
- [360] E. Schmidt, *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1908), 53–77.
- [361] J. Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, J. reine angew. Math. 151 (1920), 79–111.
- [362] J. T. Schwartz, *A note on the space L_p^** , Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 270–275.
- [363] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [364] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions I*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1971.

- [365] V. L. Šmulian, *Linear topological spaces and their connection with the Banach spaces*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) 22 (1939), 471–473.
- [366] H. J. S. Smith, *On the integration of discontinuous functions*, Proc. London Math. Soc. 6 (1875), 140–153.
- [367] V. L. Šmulian, *Über lineare topologische Räume*, Mat. Sbornik N. S. (7) 49 (1940), 425–448.
- [368] S. Sobolev, *A Cauchy-probléma funkcionáltereiben*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 3 (1935), 291–294 (oroszul).
- [369] S. Sobolev, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Mat. Sb. 1 (43) (1936), 39–72.
- [370] S. L. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, American Mathematical Society, Providence RI, 1991.
- [371] R. Solovay, *A model of set theory where every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.
- [372] L. A. Steen, *Highlights in the history of spectral theory*, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 359–381.
- [373] H. Steinhaus, *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Z. 5 (1919), 186–221.
- [374] V. A. Steklov, *Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables*, Petersb. Denkschr. (8) 30 (1911), 4, 1–86.
- [375] V. A. Steklov, *Théorème de fermeture pour les polynômes de Tchebychev–Laguerre*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. (6) 10 (1916), 633–642.
- [376] T. J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Toulouse 8 (1894), 1–122, 9 (1895), 1–47; [377] II, 402–566.
- [377] T. J. Stieltjes, *Oeuvres complètes I-II*, Springer, Berlin, 1993.
- [378] O. Stolz, *Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwert*, Math. Ann. 23 (1884), 152–156.
- [379] O. Stolz, *Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerten, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern*, Math. Ann. 26 (1886), 83–96.
- [380] M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space*, New York, 1932.
- [381] M. H. Stone, *Application of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 325–481.
- [382] M. H. Stone, *The generalized Weierstrass approximation theorem*, Math. Mag. 11 (1947/48), 167–184, 237–254.
- [383] Szász Ottó, *Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen*, Math. Ann. 77 (1915–16), 482–496.
- [384] Szegő Gábor, *Orthogonal Polynomials*, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1975.
- [385] Szökefalvi-Nagy Béla [B. Sz.-Nagy], *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Springer, Berlin, 1942.
- [386] Szökefalvi-Nagy Béla, *Valós függvénytan és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

- [387] G. A. Szuhomlinov [Soukhomlinov], *Lineáris funkciondlok kiterjesztéséről komplex vektorterekben és kvaterniók feletti vektorterekben* (oroszul, német ismertetővel), Mat. Sbornik N. S. (3) 4 (1938), 355–358.
- [388] K. J. Thomae, *Ueber bestimmte Integrale*, Z. math. Phys. 23 (1878), 67–68.
- [389] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, J. reine angew. Math. 145 (1910), 9–14.
- [390] A. Toepler, *Bemerkenswerte Eigenschaften der periodischen Reihen*, Wiener Akad. Anz. 13 (1876), 205–209.
- [391] O. Toeplitz, *Das algebrischen Analogen zu einem Satze von Fejér*, Math. Z. 2 (1918), 187–197.
- [392] L. Tonelli, *Sull'integrazione per parti*, Atti Accad. Naz. Lincei (5), 18 (1909), 246–253.
- [393] L. Tonelli, *Successioni di curve e derivazione per serie II*, Atti Accad. Naz. Lincei (5), 25 (1916), 207–213.
- [394] V. Trénoquine, B. Pissarevski és T. Soboléva, *Problèmes et d'exercices d'analyse fonctionnelle*, Mir, Moscou, 1987.
- [395] J. W. Tukey, *Some notes on the separation of convex sets*, Portugal. Math. 3 (1942), 95–102.
- [396] Sz. A. Tyeljakovszkij, *Valós függvénytan feladatgyűjtemény* (oroszul), Nauka, Moszkva, 1980.
- [397] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. 94 (1925), 262–295.
- [398] Ch.-J. de la Vallée-Poussin, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier*, Bull. Acad. Royal Belg. Cl. Sci. 3 (1908), 193–254.
- [399] Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Réduction des intégrales doubles de Lebesgue: application à la définition des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Sci. Bruxelles (1910), 768–798.
- [400] Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Sur l'intégrale de Lebesgue*, Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), 435–501.
- [401] Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, Paris, 1916.
- [402] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna, 1905.
- [403] G. Vitali, *Sulle funzioni integrali*, Atti Accad. Sci. Torino 40 (1905), 753–766.
- [404] G. Vitali, *Sull'integrazione per serie*, Rend. Circ. Mat. Palermo 23 (1907), 137–155.
- [405] V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti I-IV*, Atti Accad. Torino 31 (1896), 311–323, 400–408, 557–567, 693–708; [409] II, 216–254.
- [406] V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti*, Atti R. Accad. Rend. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 5 (1896), 177–185; [409] II, 255–262.
- [407] V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali multipli*, Atti R. Accad. Rend. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 5 (1896), 289–300; [409] II, 263–275.
- [408] V. Volterra, *Sopra alcuni questioni di inversione di integrali definiti*, Annali di Mat. (2) 25 (1897), 139–178; [409] II, 279–313.
- [409] V. Volterra, *Opere matematiche. Memorie e Note I-V*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1954–1962.
- [410] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

- [411] J. V. Wehausen, *Transformations in linear topological spaces*, Duke Math. J. 4 (1938), 157–169.
- [412] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente, Erste Mitteilung*, Sitzungsberichte Akad. Berlin, 1885, 633–639; [413] III, 1–37. Francia fordítás: *Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle*, J. Math. Pures Appl. 2 (1886), 105–138.
- [413] K. Weierstrass, *Mathematische Werke I–VI*, Mayer & Müller, Berlin, 1894–1915, VII, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1927.
- [414] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940.
- [415] N. Wiener, *Limit in terms of continuous transformation*, Bull. Soc. Math. France 50 (1922), 119–134.
- [416] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1980.
- [417] W. H. Young, *The progress of mathematical analysis in the 20th century*, Proc. London Math. Soc. (2) 24 (1926), 421–434.
- [418] L. Zajicek, *An elementary proof of the one-dimensional density theorem*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 297–298.
- [419] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge, London, 1959.

Oktatási megjegyzések

Funkcionálanalízis

- A funkcionálanalízis legtöbb eredményét a kis ℓ^p terekben szemléltetjük, amelyek jól mutatják ezek érvényességének határait.
- A magyar kiadásba felvettük a lineáris programozásban alapvető jelentőségű Farkas–Minkowski lemma szemléletes és elemi bizonyítását is (107. o.).
- Meglepő módon a 15.23 lemma (117. o.) itt ismertetett egyszerű bizonyítása nem közismert.
- Tapasztalatunk szerint féléves előadás keretében ismertethető a 13. fejezet és a 14. fejezet első hét szakasza, a *-gal jelölt anyag kivételével. A 15. fejezetet célszerű egy későbbi, a disztribúcióelméletnek szentelt előadás során tárgyalni.
- Az előadáson célszerű az ℓ^p tereket csak $1 < p < \infty$ esetén vizsgálni. Az ℓ^1 , ℓ^∞ , c_0 terek, valamint a megjegyzések és példák többsége gyakorlatokon dolgozható fel.

Integrálszámítás

- Pedagógiai megfontolásokból a 17. fejezetet az \mathbb{R} -en értelmezett függvényeknek szenteljük, azonban a 19. fejezetben megmutatjuk, hogy valamennyi eredmény érvényben marad tetszőleges mértékterekben. Ez a megközelítés elősegíti az alapvető gondolatok időveszteség nélküli jobb elsajátítását.
- A Radon–Nikodým tételt igen általános formában tárgyaljuk; bizonyításunk az eddigieknél egyszerűbbnek és rövidebbnek tűnik.
- Féléves előadás esetében javasoljuk a nullahalmazok definíciójával és a egyszerű 16.3 állítással kezdeni. Ezt követően ismertethető a 17. és 19. fejezet, kivéve a 19.7. szakaszt. Javasoljuk mindazonáltal (ha bizonyítás nélkül is) Lebesgue két további klasszikus eredményének: a monoton függvények deriválhatóságáról szóló tételnek és az általánosított Newton–Leibniz formulának az ismertetését (129. és 171. o.), valamint az L^p tereknek a *Függvényterek* részbeli 21.1 szakasz szerinti rövid tárgyalását (254. o.).

Függvényterek

- A témával először ismerkedők munkájának megkönnyítésére a funkcionálanalízis tárgyalása során elkerültük a folytonos függvények,

és a Lebesgue-integrálható függvények tereinek a használatát. Ez anakronisztikus eljárás volt, hiszen éppen ezen terek tanulmányozása vezetett a funkcionálanalízis első nagy felfedezéseihez. Ezek a függvényterek ma is elsőrendű szerepet töltenek be a matematikában és alkalmazásaiban. Könyvünk utolsó részét nekik szenteljük.

- Számos alapvető tételt több különböző módon is igazolunk, ezáltal jobban kiemeljük az analízis ágai közti összefüggéseket.
- Nagy számú olyan fontos példát ismertetünk ebben a részben, amelyek nehezen lelhetők fel a szakirodalomban.

Tárgymutató

- \cup^* , 179
- \rightarrow , 24, 60
- $\xrightarrow{*}$, 110
- abszolút folytonos
 - előjeles mérték, 200
 - függvény, 166
 - mérték, 193
- adjungált operátor, 29, 80
- affin hipersík, 13, 14, 47
- altér, 2
- Arzelà–Ascoli tétel, 227
- Ascoli tétele, 49
- általánosított Newton–Leibniz formula, 171
- általánosított integrál, 159, 208
- $\mathcal{B}(K)$ tér, 43
- $\mathcal{B}(K, X)$ tér, 43
- Baire-féle előjeles mérték, 244
- Baire-halmaz, 244
- Baire-lemma, 26
- Baire-mérték, 244
- Baire-mértékek regularitása, 244
- balra tolás, 89
- balról láthatatlan pont, 136
- Banach–Steinhaus tétel, 60, 61
- Banach-algebra, 37, 45
- Banach-tér, 42
- Beppo Levi tétele, 148
- Bernstein-polinomok, 237
- Bessel-egyenlőség, 19
- Bessel-egyenlőtlenség, 20
- biduális tér, 67
- Bohman–Korovkin tétel, 236
- Bolzano–Weierstrass tétel, 24, 27
- Brunn tétele, 49
- c_0 tér, 43
- C_0 függvényosztály, 141
- C_1 függvényosztály, 145
- C_2 függvényosztály, 146
- $C(K)$ tér, 43
- $C(K, X)$ tér, 43
- $C_b(K)$ tér, 43
- $C_b(K, X)$ tér, 43
- $C_c(I)$ tér, 260
- $C_{2\pi}$ tér, 221
- $C_b^k(U, Y)$ tér, 43
- Cantor-függvény, 167
- Cantor-féle
 - átlós módszer, 28, 71
 - triadikus halmaz, 127
- Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség, 4, 40
- csúcs, 101
- csúszó púpok, 61
- Dini tétele, 246
- Dini-deriváltak, 133
- Dirac-féle funkcionál, 282
- Dirac-mérték, 180, 252, 253
- direkt összeg, 84
- Dirichlet-függvény, 139
- Dirichlet-mag, 229
- diszjunkt
 - halmazrendszer, 124
 - halmazsorozat, 124

- disztribúcióelmélet, 282
 Eberlein–Šmulian tétel, 70
 egyenletes
 korlátosság tétele, 61
 egyenletesen
 konvex, 55
 konvex tér, 271
 egyformán folytonos függvényrendszer, 227
 Eidelheit tétele, 49
 ekvivalens normák, 77
 előjeles mérték, 196
 teljes változása, 245
 erős konvergencia, 26, 60
 euklideszi tér, 4
 extrémális pont, 101

 Faber tétele, 243
 faktortér, 84
 Farkas–Minkowski lemma, 107
 Fatou-lemma, 153
 Fejér tétele, 232
 Fejér-mag, 232
 „felkelő Nap” lemma, 135
 félgűrű, 179
 félnorma, 95
 fordított
 Hölder-egyenlőtlenség, 290
 Minkowski-egyenlőtlenség, 290
 Young-egyenlőtlenség, 290
 Fourier-együtthatók, 20
 Fourier-sor, 22
 Fourier-sorok divergenciája, 228
 Fredholm-alternatíva, 38, 90
 Freud tétele, 235
 Fubini tétele, 168, 189
 függvény
 negatív része, 151
 pozitív része, 146, 151
 teljes változása, 137

 generált zárt altér, 12
 gömb, 95
 Gram–Schmidt ortogonalizáció, 23

 gyenge
 konvergencia, 24, 60
 konvergencia $C'(K)$ -ban, 252
 konvergencia L^p -ben, 282
 topológia, 104
 gyenge csillag
 konvergencia, 110
 konvergencia L^∞ -ben, 282
 topológia, 110
 gyűrű, 162, 180

 Hahn-felbontás, 197
 halmazrendszer által generált gyűrű, 181
 Harsiladze–Lozinszkij tétele, 239, 242
 határozatlan integrál, 166
 háromszög-egyenlőtlenség, 4, 39
 Helly–Banach–Steinhaus tétel, 61
 Helly–Hahn–Banach tétel, 54
 helyettesítéssel integrálás, 205
 Hermite-polinomok, 263
 Hilbert spektráltétele, 33
 Hilbert–Schmidt operátor, 32, 34, 259
 Hilbert-tér, 5
 hipersík, 47
 Hölder-egyenlőtlenség, 44, 255

 integrál, 142, 145, 146, 159, 208
 integrálható
 függvény, 146
 majoráns, 151
 intervallumon integrálható függvény, 165
 inverz leképezés tétele, 77
 izometria, 37

 James tétele, 72
 Jegorov tétele, 305
 jobbra tolás, 89
 jobbról láthatatlan pont, 134
 Jordan-felbontás, 138, 197

 Kakutani–Krein tétel, 225
 karakterisztikus függvény, 143
 kiválasztási tétel, 27, 70, 113
 Klee tétele, 72
 kompakt
 lineáris leképezés, 82
 operátor, 31
 tartójú, folytonos függvény, 260
 komplex

- antilineáris leképezés, 39
- euklideszi tér, 39
- Hilbert-tér, 40
- lineáris leképezés, 39
- normált tér, 39
- norma, 39
- skaláris szorzat, 39
- konvex zárt burok, 102
- konvolúció, 267, 268
- konvolúció-szorzat, 268
- korlátos
 - halmaz, 97
 - változású függvény, 137
- Korovkin tétele, 234
- körszerű halmaz, 48
- Krein–Milman tétel, 101, 103
- kvázi-egyenletes konvergencia, 305
- ℓ^2 tér, 5
- ℓ^p tér, $1 \leq p < \infty$, 43
- ℓ^p tér, $0 < p \leq 1$, 117
- ℓ^∞ tér, 43
- $L(X, Y)$ tér, 45
- $L^p(I)$ tér, $1 \leq p < \infty$, 47
- L_w^p tér, 260
- L^0 tér, 295
- L^1 tér, 154
- L^2 tér, 7
- L^p tér, $1 \leq p \leq \infty$, 255
- L^p tér, $0 < p \leq 1$, 289
- L^∞ tér, 255
- Laguerre-polinomok, 263
- Lebesgue
 - differenciálhatósági tétele, 129
 - felbontási tétele, 175, 193
 - konvergencia tétele, 151
 - sűrűségi tétele, 171
- Lebesgue–Vitali tétel, 171
- Lebesgue-felbontás, 175, 193
- Lebesgue-mérték, 161
- lépcsős függvény, 140, 184
- lineáris
 - funkcionál, 47
 - leképezés értékkészlete, 84
 - leképezés magja, 84
- lokálisan
 - konvex tér, 96
 - mérhető függvény, 207
 - mérhető halmaz, 209
- m.m., 129
- majdnem mindenütt, 129
- majorált konvergencia tétel, 151
- Mazur tétele, 49
- megszámlálható, 123
 - halmaz, 123
- merőleges
 - felbontás, 12
 - vetítés, 10
- mérhető
 - függvény, 157
 - halmaz, 161
 - tartójú előjeles mérték, 200
- mérték, 179
 - σ -szubadditivitás, 183
 - folytonossága, 183
 - leszűkítése, 180
 - monotonitása, 183
 - teljes változása, 197
 - véges része, 180
- mértékben való konvergencia, 299
- mértékcsera az integrálban, 205
- mértékek direkt szorzata, 180
- mértéktér, 180
- Milman–Pettis tétel, 276
- Minkowski tétele, 49
- Minkowski-egyenlőtlenség, 44, 255
- $N(A)$, 84
- negatív halmaz, 198
- nem-degenerált intervallum, 125
- nívóhalmaz, 164
- norma, 3
- normális operátor, 41
- normált tér, 4
- nullahalmaz, 126, 185
- nyílt leképezés tétel, 77
- Nyikolajev tétele, 243
- oldal, 103
- operátor, 29
 - értékkészlete, 84

- képtere, 84
- magja, 17, 34, 84
- ortogonális
 - komplementum, 12, 52, 100
 - polinomok, 262
- ortogonalitás, 9
- ortonormált
 - bázis, 23
 - család, 24
 - sorozat, 19
- önadjungált operátor, 33
- az ördög lépcsője, 172
- paralelogramma-azonosság, 4, 40
- paraméteres integrálok, 156
- Parseval-egyenlőség, 22
- pontbeli sűrűség, 170
- pontonként korlátos függvényrendszer, 227
- pozitív
 - lineáris funkcionál, 142, 247
 - lineáris leképezés, 234
- prehilbert tér, 4
- primitív függvény, 171
- pszeudonorma, 292
- $R(A)$, 84
- Radon–Nikodým derivált, 201
- Radon–Nikodým tétel, 201
- Radon–Riesz tulajdonság, 60, 275
- reflexív tér, 67
- részalgebra, 223
- rezolvens halmaz, 88
- Riemann–Lebesgue lemma, 284
- Riesz tétele, 57
- Riesz–Fischer tétel, 154, 255
- Riesz–Fréchet tétel, 17
- Riesz-féle reprezentációs tétel, 246, 279
- Riesz-lemma, 75, 154, 256, 295, 299, 301
- sajátaltér, 34
- sajátvektor, 34
- Schauder tétele, 83
- Schur tétele, 64
- skaláris szorzat, 4
- spektrum, 37, 88
- Steinhaus-féle reprezentációs tétel, 279
- Stone–Weierstrass tétel, 224
- σ -additív, 179
- σ -algebra, 209
- σ -gyűrű, 161
- σ -véges mérték, 187
- $\sigma(L^p, L^q)$ topológia, 283
- $\sigma(L^\infty, L^1)$ topológia, 258
- $\sigma(X, X')$ topológia, 104
- $\sigma(X', X)$ topológia, 110
- szigorúan konvex, 55
- szimmetrikus operátor, 33
- szinguláris
 - függvény, 175
 - mérték, 193
- szingularitások kondenzációja, 61
- sztochasztikus konvergencia, 299
- teljes
 - mérték, 162
 - ortonormált sorozat, 23
- teljesen folytonos operátor, 31, 82
- Tonelli tétele, 191
- topologikus vektortér, 117
- trigonometrikus
 - polinom, 222
 - rendszer, 19, 263
- Tukey tétele, 49
- Tukey–Klee tétel, 99
- ugrófüggvény, 132
- unitér operátor, 41
- vektorháló, 142
- véges mérték, 184
- Vitali tétele, 301
- Vitali–Hahn–Saks tétel, 301
- Weierstrass
 - első approximációs tétele, 218
 - második approximációs tétele, 221
- zárt gráf tétel, 77

Névmutató

- Alaoglu, 113
 Arkhimédész, 122
 Arzelà, 151, 227
 Ascoli, 49, 126, 227
 Austin, 133

 Baire, 26, 122, 148, 244
 Banach, 2, 26, 42, 54, 55, 60, 61, 77, 80, 113–115, 163, 246
 Bernoulli, Daniel, 228
 Bernstein, 237
 Bessel, 19
 Bochner, 178
 Bohman, 236
 Bohnenblust, 93
 du Bois-Reymond, 126, 192, 228
 Bolzano, 24
 Borel, 122, 128, 179, 237
 Bourbaki, 115
 Brunn, 49

 Cantor, 28, 30, 71, 122–125, 167, 179
 Carleson, 263, 264
 Cauchy, 4, 40, 122, 192, 232
 Clairaut, 20
 Clarkson, 223, 271, 276

 Császár, 132

 Darboux, 171
 Day, 295
 Denjoy, 165, 171
 Dieudonné, 2, 17
 Dini, 133, 167, 171, 246

 Dirac, 180
 Dirichlet, 122, 139, 188, 229
 Dunford, 279

 Eberlein, 70
 Eidelheit, 49
 Ellis, 281
 Erdős, 223
 Euklidész, 286
 Euler, 20, 23, 188

 Faber, 243
 Farkas, 107
 Fatou, 153
 Fejér, 232
 Fichtenholz, 55
 Fischer, 122, 154, 255
 Fourier, 20, 122, 228, 268
 Fredholm, 2, 38, 84, 90
 Freud, 235
 Fréchet, 2, 17, 42, 122, 178, 299, 306
 Frobenius, 41
 Fubini, 122, 168, 188

 Goldstine, 113
 Goodner, 55
 Gram, 19

 Haar, 263
 Hahn, 2, 42, 54, 67, 197, 301
 Hankel, 61, 126
 Hardy, 42, 254
 Harnack, 122, 126, 127, 167, 179
 Harsiladze, 239, 242

- Hausdorff, 163
 Heine, 128
 Hellinger, 65, 79
 Helly, 2, 54
 Henstock, 165
 Hermite, 139, 263
 Hilbert, 2, 3, 5, 24, 27, 31–34, 37, 40, 41, 82, 123, 259
 Hildebrandt, 90, 275
 Hobson, 189
 Hölder, 44, 255, 290

 Jackson, 223
 James, 72
 Jegorov, 305
 Joó, 284
 Jordan, 122, 137, 138, 179, 197

 Kadec, 276
 Kakutani, 115, 225, 246
 Kalton, 294
 Kantorovics, 55
 Kelley, 55
 Kindler, 247
 Klee, 72, 99
 Kolmogorov, 98, 117, 122, 178
 Korovkin, 234, 236
 Kottman, 76
 Krein, M. G., 101, 103, 225
 Krein, S. G., 225
 Kurzweil, 165

 Laczkovich, 163
 Lagrange, 29
 Laguerre, 263
 Landau, 65, 218
 Lebesgue, 61, 122, 129, 151, 166, 167, 171, 172, 175, 178, 189, 193, 223, 284, 299, 305
 Leibniz, 122
 Levi, 10, 148
 Lindenstrauss, 276
 Lions, 288
 Liouville, 264
 Lipiński, 130
 Lozinszkij, 239, 242
 Löwig, 5, 40

 Luzin, 264

 Marcinkiewicz, 239
 Markov, 246
 Mazur, 49, 54, 55
 McShane, 279
 Ménekhmosz, 286
 Milman, 101, 103, 276
 Minkowski, 14, 44, 49, 103, 107, 118, 232, 255, 290
 Murray, 55, 93
 Müntz, 223

 Nachbin, 55
 Neumann, 2, 3, 5, 27, 40, 41, 94, 96, 104, 163, 201, 263
 Newton, 122
 Nikodým, 10, 122, 201, 279, 298
 Novinger, 287

 Nyikolajev, 243

 Orlicz, 255
 Osgood, 151

 Parseval, 22
 Peano, 122, 179
 Peck, 294
 Perron, 165
 Pettis, 70, 116, 276
 Picard, 165
 Poincaré, 139, 232, 284

 Radon, 122, 178, 201, 246, 275
 Rellich, 5, 34, 40
 Riemann, 61, 122, 284
 Riesz, 2, 3, 10, 12, 17, 29, 31, 42, 44, 57, 70, 75, 80, 82, 84, 89, 90, 122, 133, 135, 154, 246, 255, 256, 275, 279, 283, 295, 299, 301
 Riesz, M., 264
 Roberts, 119, 294
 Rogers, 44
 Rubel, 130

 Saks, 26, 62, 246, 301
 Schauder, 77, 80, 83, 90
 Schmidt, 3, 10, 19, 27, 32–34, 259

- Schur, 64
Schwartz, Jacob T., 281
Schwartz, Laurent, 282
Schwarz, 4, 40
Smith, 126
Šmulian, 70, 115
Snow, 281
Sobczyk, 93
Solovay, 163
Steinhaus, 26, 60, 61, 279
Stieltjes, 263
Stobaeus, 286
Stolz, 122, 179, 188
Stone, 79, 223, 224, 226

Szász, 223
Szökefalvi-Nagy, 2, 122, 273
Szmoljanov, 196
Szoboljev, 122
Sztyeklov, 266
Szuhomlinov, 93

Tarski, 163
Thomae, 192
Toepler, 22
Toeplitz, 41, 65, 79
Tonelli, 122, 191
Tukey, 14, 18, 49, 72, 99
Tzafriri, 276

Uriszon, 226

de la Vallée-Poussin, 143, 176, 189, 222
Vitali, 163, 166, 167, 171, 301
Voltaire, 94
Volterra, 215

Wehausen, 105
Weierstrass, 24, 129, 218, 221, 224
Wiener, 39, 42
Wilde, 214

Young, 290

Idézett matematikusok

Abel, Niels Henrik, 1802–1829
 d'Alembert, Jean le Rond, 1717–1783
 Alexander, James Waddell, 1888–1971
 Arkhimédész, i.e. 287–212
 Arzelà, Cesare, 1847–1912
 Ascoli, Giulio, 1843–1896

Baire, René, 1874–1932
 Banach, Stefan, 1892–1945
 Bendixson, Ivar Otto, 1861–1935
 Bernoulli, Daniel, 1700–1782
 Bernoulli, Jacques (Jacob), 1654–1705
 Bernoulli, Jean (Johann), 1667–1748
 Bernstein, Szergej Natanovics, 1880–1968
 Bessel, Friedrich Wilhelm, 1784–1846
 Bochner, Salomon, 1899–1982
 du Bois-Reymond, Paul, 1831–1889
 Bolyai, János, 1802–1860
 Bolyai, Farkas, 1775–1856
 Bolzano, Bernard, 1781–1848
 Bonnet, Pierre Ossian, 1819–1892
 Borel, Émile, 1871–1956
 Briggs, Henry, 1561–1630
 Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 1881–1966
 Brunn, Hermann, 1862–1939
 Bunyakovszkij, Viktor Jakovlevics, 1804–1889
 Bürgi, Joost, 1552–1632
 Cacciopoli, Renato, 1904–1959
 Cantor, Georg, 1845–1918
 Carathéodory, Constantin, 1873–1950
 Cauchy, Augustin-Louis, 1789–1857

Cavalieri, Bonaventura, 1598–1647
 Čech, Eduard, 1893–1960
 Christoffel, Elwin Bruno, 1829–1900
 Clairaut, Alexis Claude, 1713–1765
 Cotes, Roger, 1682–1716
 Cousin, Pierre, 1867–1933

Csebisev, Pafnutyij Lvovics, 1821–1894

Darboux, Gaston, 1842–1917
 Denjoy, Arnaud, 1884–1974
 Descartes, René, 1596–1650
 Dieudonné, Jean, 1906–1992
 Dini, Ulisse, 1845–1918
 Dirac, Paul Adrien Maurice, 1902–1984
 Dirichlet, Peter G. Lejeune, 1805–1859
 Dunford, Nelson, 1907–1986

Eberlein, William F., 1918–1986
 Eidelheit, Max, 1911–1943
 Erdős, Pál, 1913–1996
 Euklidész, i.e. 325–265 körül
 Euler, Leonard, 1707–1783

Faber, Georg, 1877–1966
 Farkas, Gyula, 1847–1930
 Fatou, Pierre, 1878–1929
 Fejér, Lipót, 1880–1959
 Fichtenholz, Grigorij Mihajlovics, 1888–1959
 Fischer, Ernst, 1875–1954
 Fourier, Jean Baptiste Joseph, 1768–1830
 Feldheim, Ervin, 1912–1944
 de Fermat, Pierre, 1601–1665

- Fredholm, Erik Ivar, 1866–1927
 Freud, Géza, 1922–1979
 Fréchet, Maurice, 1878–1973
 Frobenius, Georg, 1849–1917
 Fubini, Guido, 1879–1943

 Gâteaux, René, 1880–1914
 Gauss, Carl Friedrich, 1777–1855
 Gerschgorin, S. A., 1901–1933
 Givens, James Wallace, 1910–1993
 Goursat, Édouard, 1858–1936
 Gram, Jorgen Pedersen, 1850–1916
 Grassmann, Hermann, 1809–1877
 Graves, Lawrence M., 1896–1973
 Gregory, James, 1638–1675

 Haar, Alfréd, 1885–1933
 Hadamard, Jacques, 1865–1963
 Hahn, Hans, 1879–1934
 Hankel, Hermann, 1839–1873
 Hardy, Godfrey Harold, 1877–1947
 Harnack, Axel, 1851–1888
 Harriot, Thomas, 1560–1621
 Hausdorff, Felix, 1868–1942
 Heine, Eduard, 1821–1881
 Hellinger, Ernst, 1883–1950
 Helly, Eduard, 1884–1943
 Hermite, Charles, 1822–1901
 Hesse, Otto, 1811–1874
 Hilbert, David, 1862–1943
 Hildebrandt, Theophil Henry, 1888–1980
 Hobson, E. W., 1856–1933
 Householder, Alston S., 1904–1993
 Hölder, Otto Ludwig, 1859–1937

 Jackson, Dunham, 1888–1946
 Jacobi, Carl Gustav Jacob, 1804–1851
 Jensen, Johann, 1859–1925
 Jegorov, Dimitrij Fjodorovics, 1869–1931
 Jordan, Camille, 1838–1922
 Jordan, Károly, 1871–1959

 Kantorovics, Leonyid Vitaljevics, 1912–1986
 Kelley, John L., 1916–1999
 Kepler, Johann, 1571–1630

 Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics, 1903–1987
 Korkin, Alekszandr Nyikolajevics, 1837–1908
 König, Gyula, 1849–1913
 Krein, Mark Grigorjevics, 1907–1989
 Krein, Szelim Grigorjevics, 1917–1999
 Kuratowski, Kazimierz, 1896–1980

 Lagrange, Joseph Louis, 1736–1813
 Laguerre, Edmond Nicolas, 1834–1886
 Landau, Edmund, 1877–1938
 Laplace, Pierre Simon, 1749–1827
 Lebesgue, Henri, 1875–1941
 Legendre, Adrien Marie, 1752–1833
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646–1716
 Levi, Beppo, 1875–1961
 Lindelöf, Ernst Leonard, 1870–1946
 Liouville, Joseph, 1809–1882
 Lipschitz, Rudolf, 1832–1903
 Lobacevszkij, Nyikolaj Ivanovics, 1793–1856
 Lozinszkij, Szergej Mihajlovics, 1914–1985
 Ljusternyik, Lazar Aronovics, 1899–1981
 Luzin, Nyikolaj Nyikolajevics, 1883–1950

 Maclaurin, Colin, 1698–1746
 Marcinkiewicz, Józef, 1910–1940
 Markov, Andrej Andrejevics, 1856–1922
 Mazur, Stanislav, 1905–1981
 McShane, Edward James, 1904–1989
 Mersenne, Marin, 1588–1648
 Ménekhmosz, i.e. 350 körül
 Méray, Hugue Charles Robert, 1835–1911
 Minkowski, Hermann, 1864–1909
 Minty, George J., 1930–1986
 Moore, Eliakim H., 1862–1932

 Nachbin, Leopoldo, 1922–1993
 Napier (Neper), John, 1550–1617
 Neumann, János, 1903–1957
 Newton, Isaac, 1643–1727
 Nikodým, Otto, 1887–1974

 Oresme, Nicole, vers 1323–1382
 Orlicz, Władisław, 1903–1990
 Osgood, William Fogg, 1864–1943

- Parseval des Chênes, Marc-Antoine, 1755–1836
 Peano, Giuseppe, 1858–1932
 Perron, Oskar, 1880–1975
 Pettis, Billy James, 1913–1979
 Picard, Charles Émile, 1856–1941
 Picone, Mauro, 1885–1977
 Pitagorasz, i.e. 572–501 körül
 Poincaré, Henri, 1854–1912
 Poisson, Siméon Denis, 1781–1840
 Posse, Konsztantyin Alekszandrovics, 1847–1928
 Radon, Johann, 1887–1956
 Raphson, Joseph, 1648–1715
 Rellich, Franz, 1906–1955
 Riemann, Bernhard, 1826–1866
 Riesz, Frigyes, 1880–1956
 Riesz, Marcell, 1886–1969
 Rogers, Leonard James, 1862–1933
 Rolle, Michel, 1652–1719
 Rubel, Lee A., 1928–1995
 Runge, Carle David Tolmé, 1856–1927
 Saks, Stanislaw, 1897–1942
 Schauder, Julius Pawel, 1899–1943
 Schmidt, Erhard, 1876–1959
 Schwartz, Laurent, 1915–2002
 Schoenberg, Isaac Jacob, 1903–1990
 Schwarz, Hermann Amandus, 1843–1921
 Segner, János András, 1704–1777
 Simpson, Thomas, 1710–1761
 Smith, Henry J. S. 1826–1883
 Smuljan, Vitold Lvovics, 1915–1945
 Sobczyk, Andrew, 1915–1981
 Steinhaus, Hugo Dionisy, 1887–1972
 Stieltjes, Thomas Joannes 1856–1894
 Stolz, Otto, 1842–1905
 Stone, Marshall Harvey, 1903–1989
 Sturm, Jacques Charles François, 1803–1855
 Szász, Ottó, 1884–1952
 Szoboljev, Szergej Lvovics, 1908–1988
 Szonyin, Nyikolaj Jakovlevics, 1849–1915
 Szőkefalvi-Nagy, Béla, 1913–1998
 Sztjeklov, Vlagyimir Andrejevics, 1864–1926
 Taylor, Brook, 1685–1731
 Tarski, Alfred, 1902–1983
 Thomae, Karl J., 1840–1921
 Tietze, Heinrich, 1880–1964
 Toeplitz, Otto, 1881–1940
 Tonelli, Leonida, 1885–1946
 Tucker, Albert William, 1905–1995
 Tukey, John Wilder, 1915–2000
 Turán, Pál, 1910–1976
 Tyihonov, Andrej Nyikolajevics, 1906–1993
 Uriszon, Pavel Samujlovics, 1898–1924
 de la Vallée Poussin, Charles Jean, 1866–1962
 Vitali, Giuseppe, 1875–1932
 Volterra, Vito, 1860–1940
 Weierstrass, Karl, 1815–1897
 Wiener, Norbert, 1894–1964
 Wirtinger, Wilhelm, 1865–1945
 Young William Henry, 1862–1942
 Zolotarjov, Jegor Ivanovics, 1847–1878
 Zorn, Max A., 1906–1993